RENÉ THOM

Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 281, p. 69-80
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__69_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 281

Décembre 1964

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES LOCALES DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

par René THOM

(d'après H. WHITNEY [5] , [6])

Introduction. - Si M^{p-q} est une sous-variété différentiable plongée dans l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^p$, on sait définir ce qu'est une application différentiable f d'une variété différentiable V^n dans $\underset{\sim}{R}^p$ transversale sur la sous-variété M^{p-q}. Vu l'importance de cette notion en topologie différentielle, on aimerait pouvoir définir de même ce qu'est une application $f : V^n \to \underset{\sim}{R}^p$ transversale sur un sous-ensemble algébrique ou analytique A de $\underset{\sim}{R}^p$, même si l'ensemble A a des points singuliers. On y parvient grâce à une "stratification" de A , c'est-à-dire, en une partition de A en variétés ouvertes différentiablement plongées et localement fermées $A = \bigcup_j U_j$; les variétés U_j seront dites les strates de l'ensemble A , et on déclarera, brutalement, qu'une application f est transversale sur A , si elle est transversale sur toutes les strates de (A) . Le problème est alors d'imposer à cette stratification suffisamment de conditions pour que soient réalisées les conditions qu'on attend en général de la transversalité, notamment :

1° Les applications $f : V^n \to \underset{\sim}{R}^p$ transversales sur A forment un ouvert partout dense dans l'espace fonctionnel C^m des applications de V dans $\underset{\sim}{R}^p$.

2° La contre-image $f^{-1}(A)$, lorsque f est une immersion transversale sur A , présente elle aussi un caractère localement algébroïde (analyticoïde !) qui en fait un ensemble "stratifié".

H. WHITNEY, dans deux papiers récents [5] et [6] (non encore publiés), a donné deux propriétés différentielles locales des stratifications (notées (a) et (b)), dont on peut penser qu'elles répondent aux exigences ci-dessus. On verra que la propriété (a) entraîne immédiatement la propriété (1) ; on montrera que (a) et (b) entraînent (2) dans le cas particulier d'un ensemble A réduit à deux strates.

On s'occupera d'abord des ensembles analytiques complexes, puis des analytiques réels ; on laisse au lecteur le soin de regarder ce qui subsiste de la théorie en caractéristique p ...

1. La stratification "primaire" de Whitney.

Soit A un sous-ensemble analytique complexe défini dans un ouvert relativement compact Ω de $\underset{\sim}{C}^n$; un point x de A est dit <u>régulier</u>, s'il existe, dans une carte locale U autour de x , q fonctions holomorphes f_1 , ... , f_q , telles que $U \cap A$ soit défini dans U par les équations

$$f_1 = f_2 = \dots = f_q = 0 ,$$

avec $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_q \neq 0$ en tout point de $U \cap A$. L'entier positif $m = n - q$ est la dimension de A en x , et la dimension de A est la borne supérieure des dimensions aux points réguliers de A . Rappelons qué l'ensemble $\rho(A)$ des points réguliers de A forme un ouvert partout dense dans A , l'ensemble complémentaire $\sigma(A) = A - \rho(A)$ est un vrai sous-ensemble analytique A_1 de dimension strictement inférieure à $\dim A$. Lorsque A est irréductible, l'ensemble $\rho(A)$ des points réguliers est connexe, et ils ont par suite tous même dimension.

On obtient dès lors immédiatement une partition de A en variétés comme suit :

$$A_1 = \sigma(A) \ , \quad A_2 = \sigma(A_1) \ \dots \ A_j = \sigma(A_{j-1})$$

(cette suite s'arrête pour raison de dimension) ; posons $U_i = A_i - A_{i+1}$; U_i est une variété analytiquement plongée, et l'on a $A = \bigcup_i U_i$. Cette partition ne donne pas satisfaction en deux points :

(i) Une "strate" U_i peut n'être pas connexe ; cela n'est pas grave, car (U_i) ne comporte, sur tout compact, qu'un nombre fini de composantes connexes.

(ii) On aimerait que, comme dans toute bonne subdivision cellulaire de la topologie, la frontière $\partial U = \overline{U} - U$ d'une strate U soit une réunion finie de strates de dimension strictement inférieure à $\dim U$. Or, il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple de l'ensemble $A \subset \underset{\sim}{C}^3$ (x , y , z) réunion de l'axe Oz et du cône quadratique d'équation $z^2 - xy = 0$; la strate U^0 , de dimension 2 , est l'ensemble des points réguliers du cône ; la strate U_1 , de dimension 1 , est Oz ; on n'a pas $\overline{U_0} - U_0 = U_1$.

Pour obvier à cette difficulté, définissons la trace d'un ensemble A sur un sous-ensemble B de A comme l'ensemble C , noté $Tr(A:B)$ défini par

$$C = Tr(A:B) = B \cap \overline{A - B} \ ;$$

C est un sous-ensemble analytique de B , confondu avec B dans le cas où A est irréductible. Cela étant, à partir d'un ensemble A donné, on forme la plus petite famille de sous-ensembles analytiques de A close par rapport aux opérations (σ) (extraction des points singuliers), $\cap$ (intersection), $Tr(A_1:B_1)$ pour tout couple de sous-ensembles $A_1 \supset B_1$ emboités l'un dans l'autre. Cette famille est finie (pour raison de dimension, et aussi à cause du fait qu'un ensemble B ne contient qu'un nombre fini de sous-ensembles de même dimension que B) ; à tout ensemble B de la famille, associons l'ouvert U_B des points non contenus dans les sous-ensembles de la famille inclus dans B . (U_B) ne se compose que de points réguliers de B , et, si B est irréductible, $U_B = B$. La réunion des U forme une partition de A qui satisfait visiblement à la condition (ii) . C'est la stratification "primaire" de A , déjà décrite par WHITNEY dans un article antérieur [3]. On pourra, de plus, supposer chaque strate U connexe ; le bord ∂U et l'étoile $St(U)$ d'une strate (U) sont définies comme dans une subdivision cellulaire ; par construction même, l'adhérence de toute strate V est un ensemble analytique.

<u>Stratification primaire d'un ensemble analytique réel</u>. - On sait que la théorie des ensembles analytiques réels est encombrée de pathologie, heureusement bien élucidée par CARTAN, BRUHAT et WHITNEY [1] , [4]. On a proposé trois définitions, par ordre d'inclusion :

$$\text{Ensembles analytiques généraux} \supset \text{Ensembles C-analytiques (BRUHAT-WHITNEY)} \supset \text{Ensembles cohérents} .$$

Les ensembles de troisième catégorie sont ceux tels que l'ensemble de leurs idéaux locaux de définition forme un système cohérent d'idéaux (ou "Idéal"). Cette classe est beaucoup trop restrictive, puisqu'elle conduit à rejeter des ensembles algébriques aussi anodins que le cône construit sur une cubique plane à point double isolé (dit aussi parapluie).

La distinction entre première et deuxième classes n'entre en jeu que si l'on s'intéresse aux propriétés globales (ou Ω-globales) de l'ensemble. On adoptera donc, dans ce qui suit, la convention suivante :

Les ensembles, considérés globalement, sont des ensembles C-analytiques (i. e. les parties réelles d'une complexification globale de l'ensemble) ; mais toutes les propriétés de caractère local sont vraies aussi pour les ensembles analytiques généraux (première classe).

La stratification "primaire" d'un ensemble analytique réel ne peut s'effectuer à l'aide des seuls ensembles analytiques ; si l'on adopte en effet le même procédé que dans le cas complexe, on sera conduit à former des ensembles traces tels que

$$Tr(A:B) = B \cap \overline{A - B} .$$

Or, des exemples simples (comme celui de la surface d'équation $y^2 - zx^2 = 0$) montrent que l'ensemble $Tr(A:B)$ n'est pas en général un ensemble analytique, mais seulement un ensemble <u>semi-analytique</u>. Rappelons quelques définitions : la famille des ensembles semi-analytiques est la plus petite famille contenant les ensembles analytiques, close par rapport aux opérations d'intersection, de réunion finie, et de passage au complémentaire $A - B$ pour tout couple $(A \supset B)$, et contenant également les composantes connexes de $(A - B)$. On démontre (S. LOJASIEWICZ) que l'adhérence d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique.

Si on part des ensembles algébriques au lieu des ensembles analytiques, on définit de même les ensembles <u>semi-algébriques</u>. Le théorème classique de Tarski-Seidenberg affirme que la projection (ou plus généralement l'image par un morphisme algébrique) d'un ensemble semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique. Par contre, il n'est pas vrai que la projection d'un ensemble semi-analytique est un ensemble semi-analytique (contre-exemple classique : le cône dans $\mathbb{R}^3$, décrit sur une courbe plane transcendante comme directrice, est projection d'un ensemble analytique dans $\mathbb{R}^4$). Néanmoins, dans un cas particulier, la propriété de projection est vraie pour les semi-analytiques.

LEMME 1. - Soient U, V deux variétés analytiques réelles, U', V' leurs complexifications. Soit $p : U \to V$ un morphisme analytique dont le <u>complexifié</u> $p' : U' \to V'$ <u>est propre</u> ; <u>alors l'image par</u> p <u>d'un semi-analytique de</u> U <u>est un semi-analytique dans</u> V.

Ceci résulte du théorème de Remmert qui dit que l'image par p' d'un ensemble analytique est analytique (complexe). Dans ce lemme, les semi-analytiques de U sont engendrés par les C-analytiques pour la complexification U'.

On obtiendra une stratification primaire d'un ensemble analytique réel A en formant la plus petite famille de sous-ensembles close pour les opérations σ (extraction des points singuliers), $\cap$ intersection, et $\partial\mathrm{Tr}$; comme chacune de ces opérations introduit des sous-ensembles de dimension plus petite que celle des ensembles initiaux, cette famille est finie. Les complémentaires de la forme $K - \cup K_j$, $K_j \subset K$, ou les composantes connexes de ces complémentaires, constituent les strates de la stratification. A la différence du cas complexe, l'adhérence d'une strate n'est pas en général un ensemble analytique, mais seulement un semi-analytique.

2. Stratification "secondaire" d'un ensemble analytique.

La stratification primaire n'est pas assez fine pour répondre à nos besoins ; comme le montre l'exemple de la surface (complexe) d'équation $y^2 - zx^2 = 0$, le type topologique local de la strate U^0 (points réguliers) varie au point 0 au voisinage de la strate U_1 constituée par l'axe Oz. Etant données deux strates U, V telles que $\overline{V} \supset U$, on dira qu'il y a "<u>incidence régulière</u>" de V sur U

au voisinage, d'un point $x \in U$, si, dans un voisinage y de x , les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Si y est un point de V , $T_y(V)$ le plan tangent à V en y , alors l'angle de $T_y(V)$ avec $T_x(U)$ tend vers zéro avec $|y - x|$ (i. e. $\lim y \to x$ de $T_y(V) \supset T_x(U)$).

(b) Soit $k : V \to U$ une rétraction locale de V sur U au voisinage de (x) ; si y tend vers x , alors l'angle de $T_y(V)$ avec le vecteur $\overrightarrow{y'y}$, $y' = k(y)$, tend vers zéro avec $|y - x|$.

Ici, la notion d'angle doit évidemment s'entendre comme distance dans une grassmannienne : la condition (a) , par exemple, exprime que la distance du m-plan $T_y(V)$ dans la grassmannienne G_m^{n-m} au cycle de Schubert (Z) des m-plans qui contiennent $T_x(U)$ tend vers zéro avec $|y - x|$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soient G un ensemble analytique, X un sous-ensemble de G sans singularités ; il existe alors un vrai sous-ensemble analytique Y de X tel que l'ouvert des points réguliers $\rho(G)$ soit régulièrement incident sur X en tout point de $X - Y$.

Nous ferons la démonstration immédiatement dans le domaine réel ; deux lemmes y seront nécessaires.

LEMME 2. - Soit, comme dans l'énoncé du théorème, X régulier dans G , et $\dim G = \dim X + 1$.

Au voisinage de presque tout point de X , l'ensemble (G) est une réunion finie de variétés à bord de classe C^1 .

Prenons autour de $x \in X$ un système de coordonnées locales $(u_1 , \dots , u_q , x_1 , x_2 , \dots , x_{n-q})$ tel que, dans cette carte, l'ensemble X soit défini par les équations :

$$u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0 .$$

On doit supposer que X est adhérent à $\rho(G - X)$ pour $|x^i| < \varepsilon$, sans quoi le lemme serait vrai par vacuité ; c'est dire que la section de G par le plan d'équation $x^i = x_0^i$ est non vide pour presque toute valeur des x_0^i ; cette section est un ensemble analytique de dimension 1 , donc une courbe, et, on peut écrire, pour cette courbe, un développement de Puiseux de la forme :

$$u_j = \sum_i a_j^i(x)\, u_1^{\alpha_j + m_i} , \quad 1 < j \leqslant q , \text{ où } \alpha_j > 1 , \quad m_i = n_i^j/p_j , \quad n_i^j \in \underset{\sim}{N} , \quad p_j \in \underset{\sim}{N} .$$

Les coefficients $a_j^i(x)$ sont des fonctions méromorphes en x, et, pour une branche donnée, ont même diviseur : on n'a donc affaire qu'à un nombre fini de diviseurs pour le nombre infini des $a_j^i(x)$; par suite, à l'extérieur de ce diviseur, les développements sont convergents, et, comme l'exposant α_j est > 1, chaque branche définit une variété à bord de classe C^1, de bord X. En se restreignant, si besoin est, à un ouvert plus petit sur X, on peut supposer ces branches toutes distinctes (même si certaines d'entre elles sont multiples), ce qui achève la démonstration.

On observera que, sur une telle variété à bord, de bord X, G est régulièrement incident sur X (les propriétés (a) et (b) sont vraies).

LEMME 3. - Soit $X^r \subset G^{r+s}$, X régulier ; si un voisinage U de $x \in X$ est adhérent aux points réguliers $\rho(G^{r+s})$; il existe un ensemble analytique local Y de dimension $r+1$, tel que $X \subset Y \subset G$, et un ouvert $U_1 \subset U$ adhérent à $\rho(Y) \subset \rho(G)$.

Pour $s = 1$, le lemme est évident : prendre $Y = G$; sinon, supposons le lemme établi pour $s = k - 1$; faisant choix d'un système de coordonnées locales (u, x) comme au lemme 2, on projette localement, par π_i, G sur un $\underset{\sim}{C}^{r+2}$ de coordonnées (x, u_1, u_2) ; si G est non vide, G a localement une courbe de contour apparent de la forme $F(x, u_1, u_2) = 0$; on forme alors la courbe diamétrale d'équation $\partial F/\partial u_1$, $(x, u_1, u_2) = 0$. Il existe au moins une branche Γ de cette courbe qui est dans l'image de la projection $\pi : G \to C^{r+2}$. L'ensemble $G_1 = \pi^{-1}(\Gamma) \cap G$, défini par une intersection transversale, est de dimension $k - 1$, et c'est à G_1 qu'on applique l'induction.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème 1, propriété (a).

Soit comme précédemment, $X^{n-q} \subset G^m$, X régulier adhérent à $\rho(G - X)$ dans R^n ; on forme le fibré F sur $\underset{\sim}{R}^n$, dont les fibres sont les grassmanniennes G_y des m-plans dans $\underset{\sim}{R}^n$ passant par y. Soit $p : F \to \underset{\sim}{R}^n$ la projection canonique. Dans $Q = p^{-1}(X)$, formons l'ensemble Z réunion des cycles de Schubert Z_x : ensemble des m-plans issus de X qui contiennent la variété linéaire X. A tout point régulier y de G, associons le plan tangent $T_y(G)$ qui est un m-plan issu de y, donc un point de la fibre $p^{-1}(y)$; on définit ainsi une section $s \in \rho(G)$ de F au-dessus de $\rho(G)$; l'adhérence de $s(\rho(G))$ définit un ensemble analytique G_1 (complexifier au besoin, et revenir à la partie réelle) ; dire que la propriété (a) est vérifiée sur X, c'est dire que la trace de G_1 sur $G_1 \cap Q$ est contenue toute entière dans Z. Si $L = \mathrm{Tr}(G_1, G_1 \cap Q)$ n'est pas contenue dans Z, il existe un sous-ensemble semi-analytique W non vide défini par

$W = L - L \cap Z$; on va montrer, par l'absurde, que la projection $p : W \to X$ ne peut être localement surjective.

Supposons en effet qu'il existe un ouvert U de X contenu dans $p(W)$; on fait choix d'un ensemble $U_1 \subset p^{-1}(U) \cap W$, tel que $\dim p(U_1) = \dim X$; U_1 est adhérent à l'ensemble $s(\rho(G))$, et, par application du lemme 3, on peut construire un ensemble analytique local S tel que $U_1 \subset S \subset G_1$, $\rho(S) \subset \rho(G_1)$; l'ensemble projection $p(S)$ est un ensemble analytique (lemme 1) qui contient un sous-ouvert U' de U $(U' = p(U_1))$; par nouvelle application du lemme 3, on forme un sous-ensemble Y de dimension égale à $\dim X + 1$, et tel qu'un sous-ouvert U'' de U soit adhérent à $\rho(Y) \subset \rho(p(S))$, et tel que Y soit une variété à bord de classe C_1. Soit y un point de Y ; faisons tendre y vers $x \in U'' \subset X$; on a $T_y(G) \to T_y(Y)$; mais $\lim T_y(Y)$, pour $y = x$, contient $T_x(X)$ (Y de classe C_1) ; mais, par ailleurs, $T_y(G)$ se relève par s en un point de l'ensemble S, et, quand y tend vers x, $s(y)$ tend vers $S \cap Q = U_1$; or U_1 est par construction à l'extérieur de l'ensemble Z des m-plans qui sont tangents à X : d'où contradiction.

On observera qu'en raison du lemme 1, l'ensemble exceptionnel $p(W)$ où la propriété (a) cesse d'être vérifiée est semi-analytique ; n'étant pas localement dense, il est contenu dans un vrai sous-ensemble analytique de X qu'on notera $\Sigma_a(X ; G)$.

La propriété (b). - La définition de la propriété (b) fait, en apparence, jouer un rôle à une rétraction (qu'on peut supposer linéaire de rang maximum) d'un voisinage de la grande strate V sur la petite strate U, $k = V \to U$; en fait, si l'on est à l'extérieur du mauvais lieu $\Sigma_a(U , V)$, on voit immédiatement que la propriété (b) sera vraie pour toute autre rétraction $k' : V \to U$, si elle est vraie pour la rétraction k : en effet, les vecteurs $\overrightarrow{y'y}$ et $\overrightarrow{y''y}$ $(y' = k(y)$, $y'' = k'(y))$ ne diffèrent que par un vecteur $\overrightarrow{y'y''}$ qui est contenu dans X ; donc, si (a) est vérifiée, $\lim y = x$ de l'angle de $\overrightarrow{y'y}$, avec $T_y(V) = 0$, entraîne la même propriété pour $\overrightarrow{y''y}$. On trouve d'ailleurs dans WHITNEY [6] une formulation de (b) indépendante de toute rétraction locale.

Revenons à la situation précédente : X régulier sous-ensemble de G dans $\mathbb{R}^n$, X adhérent à $\rho(G)$; une étape intermédiaire est nécessaire dans la démonstration par rapport à la démonstration de (a) : on commence par effectuer une transformation monoïdale de centre X dans $\mathbb{R}^n$ (éclatement de X dans $\mathbb{R}^n$) : on obtient ainsi une variété U^n qui s'applique sur $\mathbb{R}^n$ par q ; q est un difféomorphiqme de $U - q^{-1}(X)$ sur $\mathbb{R}^n - X$; la variété $q^{-1}(X)$ est un fibré de base X, de fibre $\mathbb{P}\mathbb{R}(q - 1 ; \mathbb{R})$; grâce à une rétraction locale $k(x , u) \to (x , 0)$, on peut trivialiser localement ce fibré : un point $(x, d) \in q^{-1}(X)$ est le couple formé d'un point x de X et d'une direction d du plan transverse à X en x, $k^{-1}(x)$; on désignera par G_1 l'ensemble $q^{-1}(G)$. Cela étant, on construit sur U le fibré F en grassmanniennes G_m^{n-m} ; soit $p : F \to U$ la projection canonique, $Q = p^{-1}(q^{-1}(X))$ la contre-image de X ; la section s de F, définie au-dessus de $\rho(G_1)$ par le plan tangent $T_V(\rho(G_1))$ définit par complétion un ensemble analytique $G_2 \subset F$. Soit H l'ensemble des points de Q, qui, considérés comme des m-plans liés aux points de $q^{-1}(X)$, ont la propriété suivante : Au point (x, d) de la trivialisation décrite plus haut, le m-plan, projeté par p, dans $\underset{\sim}{R}^n$, contient la direction d. Dire que la propriété (b) est vérifiée, c'est dire que la trace L de G_2 sur $G_2 \cap Q$ est toute entière contenue dans H. Si tel n'est pas le cas, il existe un sous-ensemble semi-analytique W tel que $W \subset L - L \cap H$; on montre, comme pour (a) que la projection $q \circ p(W)$ ne peut être localement surjective : on fera passer par W un ensemble analytique S contenu dans G, et dans la projection $q \circ p(S)$ on extraiera une sous-variété à bord Y de classe C^1, de bord dans X ; comme $T_y(G) \supset T_y(Y)$, et que $T_{y_1}(Y)$ contient à la limite le vecteur d tangent à la courbe section de Y par $k^{-1}(x)$, on obtient une contradiction.

Ici encore, le mauvais lieu de X où la propriété (b) n'est pas vérifiée est un semi-analytique (lemme 1) contenu dans un vrai sous-ensemble analytique, noté $\Sigma_b(X ; G)$. On posera

$$\Sigma(X ; G) = \Sigma_a(X ; G) \cup \Sigma_b(X ; G) :$$

$\Sigma(X ; G)$ est le <u>lieu d'incidence singulière</u> de G sur X.

COROLLAIRE de (b). - Si X est réduit à un point (singulier isolé) de l'ensemble G, le théorème montre que, pour $y \in G$ voisin de X, l'angle du plan tangent $T_y(G)$ avec le vecteur $\overrightarrow{xy}$ tend vers zéro avec $|y - x|$.

<u>Quelques exemples</u>. - Dans ces exemples, (G) est la surface de R^3 d'équation donnée, (X) l'axe Oz, et $\Sigma(X ; G)$ l'origine O.

(i) <u>(b) vrai, mais non (a)</u> : le classique "point cuspidal" :

$$(G) \qquad y^2 - zx^2 = 0 .$$

Autre exemple, où O est topologiquement non singulier :

$$(G) \qquad yz = x^3 - xy^2 .$$

(ii) <u>(a) vrai, mais non (b)</u> : le "cône aplati" :

$$(G) \qquad y(y - z^2) + x^2 = 0 .$$

3. Stratification d'un ensemble analytique et applications.

Etant donné l'ensemble analytique A, on forme la plus petite famille close par rapport aux opérations σ, $\cap$, $\partial\mathrm{Tr}$, et $\Sigma(U, V)$. Cette famille est finie, et les complémentaires $K - \bigcup K_j$, $K_j \subset K$ donnent naissance à une stratification "secondaire" (ou plus brièvement, une stratification) de l'ensemble A.

Il n'a pas encore été établi (bien que la chose soit probable) que les propriétés (a) et (b) sont suffisantes pour assurer les résultats d'invariance topologique locale qu'on attend d'une stratification. On va les établir ici, dans le cas particulier d'un ensemble A réduit à deux strates U, V. On établira auparavant quelques propriétés générales des stratifications.

Images réciproques d'un ensemble stratifié. - Il résulte de la propriété (a), que, si $f : V \to \mathbb{R}^n$ est transversale sur une strate (A) d'un ensemble stratifié (E), alors f est de ce fait transverse à toutes les strates de l'étoile de (A), dans un voisinage assez petit de A ; par suite, les applications transversales sur E forment un ouvert partout dense dans l'espace $L(V, \mathbb{R}^n)$ muni de la C-topologie, si V est compacte (dans la $\mathcal{C}$-topologie, si V est paracompacte non compacte). Si f est transversale sur E, la contre-image de toute strate $X \subset E$ est une variété dans V ; la contre-image $f^{-1}(E)$ apparait donc comme une réunion de variétés $\tilde{Y}_j = f^{-1}(Y_j)$, et on aimerait savoir si ces $\tilde{Y}_j$ forment ce qu'on pourrait appeler une stratification. On a à cet égard le résultat suivant :

THÉORÈME. - *Si* f *est une immersion transversale sur l'ensemble stratifié* E, *l'image réciproque* $f^{-1}(E)$ *présente une partition en variétés qui jouit des propriétés* (a) *et* (b).

Énonçons le lemme suivant :

LEMME. - Si P et Q sont deux plans variables de $\mathbb{R}^n$ qui se coupent transversalement, et si l'angle des deux plans est minoré par une constante fixe, alors la limite de l'intersection $P \cap Q$ est l'intersection des limites $\lim P \cap \lim Q$.

Soit $j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une immersion transversale sur un couple de strates U, V d'un ensemble E de $\mathbb{R}^n$; on veut montrer que le couple des variétés $X = j^{-1}(U)$, $Y = j^{-1}(V)$ jouit des propriétés (a) et (b). D'abord la propriété (a) : Soit $y \in Y$ voisin de $x \in X$; posons $u = j(x)$, $v = j(y)$; on a, puisque j est transversale sur V :

$$j(T_y(Y)) = T_v(j(\mathbb{R}^p)) \cap T_v(V) .$$

Faisons tendre y vers x, donc v vers u ; alors, d'après le lemme ci-dessus,

$$\lim j(T_y(Y)) = \lim T_v(j(\mathbb{R}^p)) \cap \lim T_v(V) .$$

Mais, d'après (a), $\lim T_v(V) \supset T_u(U)$ transversale à $j(\underset{\sim}{R}^p)$; donc

$$\lim j(T_y(Y)) \supset \lim T_u(j(\underset{\sim}{R}^p)) \cap \lim T_u(U) = j(T_x(X))$$

et comme j est injectif, ceci achève la démonstration.

Propriété (b). - Soit k une rétraction locale de Y sur X ; l'image par j de k est une rétraction locale k_1 de la variété plongée $j(R^p)$ sur $U \cap j(\underset{\sim}{R}^p) = j(X)$; puisque j est un plongement local transversal sur U, la rétraction k_1 se prolonge en une rétraction locale k_2 de $\underset{\sim}{R}^n$ sur U qui laisse globalement invariante la variété $j(\underset{\sim}{R}^p)$. Posons alors $y' = k(y)$, $v' = k_2(v) = k_1(v)$. On a, d'après (b) :

$$\lim \overrightarrow{v'v} \subset \lim T_v(V) .$$

Quand v tend vers u, v' tend aussi vers u, et $\lim \overrightarrow{v'v}$ est dans le plan tangent en u à $j(R^p)$:

$$\lim \overrightarrow{v'v} \subset T_u(j(\underset{\sim}{R}^p)) .$$

Par suite, on a aussi :

$$\lim \overrightarrow{v'v} \subset \lim T_v(j_x(\underset{\sim}{R}^p)) \cap \lim T_v(V) = \lim j_x(Y))$$

$$\lim j_x(\overrightarrow{x'x}) \subset \lim j_x(T_y(Y))$$

C. Q. F. D.

Invariance topologique locale. - Soit $\overline{V}$ un ensemble analytique dont la stratification ne contient que deux strates $V = \rho(\overline{V})$ et $U = \partial V$; supposons U défini localement par les équations locales $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$, et formons la fonction $G = \sum u_i^2$. Soit k la rétraction locale définie par $k(u , x) \to (0 , x)$. Je dis que k est de rang maximum sur les variétés de niveau $G = \varepsilon$ de la restriction de G à V, pour ε assez petit, et sur tout un voisinage des x. En effet, k est de rang maximum sur $T_v(V)$ (propriété (a)) d'une part, et sur le plan tangent en v au cylindre $G = \varepsilon$ d'autre part ; k est donc de rang maximum sur leur intersection $T_v(V \cap G^{-1}(\varepsilon))$, pourvu qu'on puisse minorer l'angle de ces deux plans de manière uniforme quand v tend vers U. Or cela résulte de la propriété (b) : Si $v' = k(v)$, l'angle de $\overrightarrow{v'v}$ avec $T_v(V)$ tend vers zéro avec la distance de v à U ; or $\overrightarrow{v'v}$ est orthogonal à la variété $G = \varepsilon$. L'angle des deux plans $T_v(V)$ et $T_v(G^{-1}(\varepsilon))$ tend donc vers $\pi/2$ lorsque v tend vers U, ce qui assure la minoration cherchée.

Cela étant, soit Z un champ de vecteurs dans X ; puisque $k : V \cap G^{-1}(\varepsilon)$ est de rang maximum, ce champ Z se relève en un champ Z_1 dans $G^{-1}(\varepsilon)$, tangent à la variété $V \cap G^{-1}(\varepsilon)$; un tel champ Z_1 peut d'ailleurs se construire dans toute variété de la forme $a < G < \varepsilon$, où a tend vers zéro. On construit ainsi un champ Z dans $G \leqslant \varepsilon$, tel que $k(Z_1) = Z$, mais non nécessairement continu sur U . L'intégration de ce champ de vecteurs (possible dans toute variété de niveau $G^{-1}(c)$, $0 < c \leqslant \varepsilon$) conduit à un difféomorphisme local de $\underset{\sim}{R}^n - U$, qui se prolonge pour $c = 0$ en un homéomorphisme de $\underset{\sim}{R}^n$ autour de U , et qui laisse invariantes globalement U et V . En intégrant un champ radial issu d'un point $x_0 \in U$ dans un voisinage W et ses relèvements dans $G < \varepsilon$, on définit une structure globale de produit sur $k^{-1}(W)$ compatible avec V ; en particulier les sections $k^{-1}(x) \cap V$ sont des variétés homéomorphes.

On voit qu'ainsi le voisinage de V autour de U a une structure fibrée, et que, de plus, cette propriété se conserve par section transversale.

Dans [3], WHITNEY conjecture que c'est là une situation tout-à-fait générale : si X est un sous-ensemble analytique de G , en presque tout point de X , un voisinage de X dans G est fibré sur X par une rétraction locale. WHITNEY conjecture même qu'il existe des trivialisations de ce fibré qui sont analytiques par rapport au point de base, et seulement continues par rapport à la fibre. WHITNEY peut prouver cette conjecture dans le cas où $\dim X = \dim G - 1$. On ne peut espérer trouver une trivialisation analytique (ni même différentiable) dudit voisinage fibré, comme le montre l'exemple de la surface d'équation

$$xy(x + y)(x - zy)(x - e^z y) = 0$$

qu'on ne peut transformer en un produit à cause de l'invariance du rapport anharmonique des droites de section par les plans $z = \text{Cte}$. Mais l'existence d'une trivialisation Lipschitz en la fibre, analytique en la base, ne semble pas exclue.

Questions d'algèbre locale. - On a pu s'étonner de voir traiter sans outil algébrique une question, qui, bien évidemment, relève de l'algèbre locale ; c'est que les problèmes sous-jacents, liés à la classification des idéaux ponctuels en familles continues, n'ont guère attiré jusqu'à présent l'attention des algébristes. On trouvera dans le Compte-Rendu du Colloque de Woods Hole [2], [7] deux exposés traitant du sujet ; l'un, assez pessimiste, de ZARISKI, que ces problèmes ont toujours intéressé. L'autre, plus optimiste, d'HIRONAKA ; il y donne une définition générale de l'incidence régulière (equisingularity) en termes de désingularisation, qui semble très prometteuse. Une chose paraît certaine "a priori" : les considérations actuelles dépassent la théorie des ensembles algébriques ou analytiques, et devraient avoir une expression uniquement fonctionnelle C^∞ , en termes de jets ; par exemple, si $X \subset G \subset \underset{\sim}{R}^n$, et si G est une intersection complète définie par $G = F^{-1}(0)$, où $F : \underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^k$, on devra s'attendre à ce que les propriétés (a) et (b) s'expriment par le fait que le jet de l'application F en x est en dehors de certaines sous-variétés de l'espace des jets locaux $J^p(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^k)$; ce que sont ces variétés, nul n'en a, pour le moment, aucune idée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 988-990.

[2] HIRONAKA (H.). Equivalences and deformations of isolated singularities, Lectures notes of the summer institute of algebraic geometry [1964. Woods Hole (Mass.)].

[3] WHITNEY (H.). - Elementary structures of real algebraic varieties, Annals of Math., t. 66, 1957, p. 545-556.

[4] WHITNEY (H.) et BRUHAT (F.). - Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels, Comment. Math. Helvet., t. 33, 1959, p. 132-160.

[5] WHITNEY (H.). - Local properties of analytic varieties. - Princeton, Princeton University Press, 1964.

[6] WHITNEY (H.). - Tangents to an analytic variety (à paraitre).

[7] ZARISKI (O.). - Equisingularity and related questions of classification of singularities, Lectures notes of the summer institute of algebraic geometry [1964. Woods Hole (Mass.)].