PAUL-ANDRÉ MEYER

Le théorème de continuité de P. Lévy sur les espaces nucléaires

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 311, p. 509-522

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__509_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 311 Juin 1966

LE THÉORÈME de CONTINUITÉ de P. LÉVY sur les ESPACES NUCLÉAIRES
(d'après X. FERNIQUE)

par Paul-André MEYER

Le théorème de continuité de P. Lévy est un résultat très utile, qui affirme que, pour qu'une suite (μ_n) de mesures positives de masse 1 sur $\underset{\sim}{R}^n$ converge étroitement (i.e., converge vaguement vers une mesure de masse 1), il faut et il suffit que la suite des transformées de Fourier $(\hat{\mu}_n)$ converge simplement vers une fonction continue à l'origine. Ce théorème vient d'être étendu par Fernique aux suites de mesures sur $\underline{\underline{D}}'$, et plus généralement sur un dual d'espace $(\underline{\underline{LF}})$ nucléaire. Comme il faut être compréhensible, je préfère reprendre toute la question, plutôt que de renvoyer à l'exposé de Cartier de Mai 1964 sur le théorème de Minlos, que tout le monde a dû un peu oublier.

I. Rappels.

A. Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Soit E un espace de dimension finie muni d'une forme quadratique positive h , que nous supposerons d'abord non dégénérée, et soit Q une forme quadratique positive sur E : si l'on prend une base orthonormale de E , Q s'écrit $\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$, et ce n'est un mystère pour personne que les coefficients a_{ii} sont tous positifs, et que $\sum_i a_{ii}$ ne dépend pas de la base choisie. Nous noterons ce nombre $S(Q)$, ou $S_h(Q)$. Si E n'est pas de dimension finie, nous étendrons cette définition en posant $S(Q) = \sup_F S(Q|F)$, F parcourant l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E .

Enfin, si la forme quadratique h est dégénérée, nous poserons $S(Q) = +\infty$ si Q ne passe pas au quotient sur l'espace préhilbertien séparé associé à h, et dans le cas contraire $S(Q) = S(\dot{Q})$, $\dot{Q}$ étant déduite de Q par passage au quotient.

Par exemple, supposons que (y_n) soit une suite d'éléments de E^* telle que $h(x) = \sum_n \langle x,y_n\rangle^2 < +\infty$ pour tout $x \in E$, soit (λ_n) une suite bornée de nombres positifs, et soit $Q(x) = \sum_n \lambda_n \langle x,y_n\rangle^2$; on a alors $S_h(Q) \leq \sum_n \lambda_n$.

Soient H_1 et H_2 deux espaces préhilbertiens réels, u une application linéaire de H_1 dans H_2, h et Q respectivement les formes $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (u(x))^2$ sur H_1. Nous poserons $S(u) = S(Q)$, et nous dirons que u est une application de Hilbert-Schmidt si $S(u) < +\infty$.

B. Mesures de Radon bornées ; convergence étroite.

Soit T un espace séparé, et soit $\underline{\underline{B}}(T)$ la tribu borélienne de T. On appellera mesure sur T dans la suite toute fonction d'ensemble positive, dénombrablement additive et bornée μ sur $\underline{\underline{B}}(T)$ qui possède la propriété de "régularité intérieure" suivante

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact}}} \mu(K) \qquad \text{pour tout } A \in \underline{\underline{B}}(T) .$$

L'expression correcte pour désigner un tel objet est "mesure de Radon positive bornée". On désignera par $\underline{\underline{M}}_+^b(T)$ l'ensemble des mesures sur T. On sait faire avec ces mesures tout ce qu'on sait faire avec les mesures abstraites bornées sur $\underline{\underline{B}}(T)$ (intégrer, prendre des images par des applications continues ...), et aussi quelques autres choses agréables. La proposition suivante, en particulier, jouera un grand rôle :

PROPOSITION 1.- Soient I un ensemble préordonné filtrant, (T_i, p_{ij}) un système projectif d'espaces topologiques séparés, indexé par I , T un espace séparé. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application continue p_i de T dans T_i , satisfaisant aux conditions de compatibilité $p_j = p_{ji} \circ p_i$ si $i > j$, et on suppose que les p_i séparent les points de T . Pour chaque $i \in I$, on se donne une mesure μ_i sur T_i , satisfaisant aux conditions de compatibilité $\mu_j = p_{ji}(\mu_i)$ si $i > j$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a) Il existe une mesure μ sur T (unique) telle que $\mu_i = p_i(\mu)$ pour tout $i \in I$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\mu_i(T_i - p_i(K)) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in I$.

La condition b) est toujours satisfaite si I admet un ensemble cofinal dénombrable, et si $T = \varprojlim T_i$.

Supposons maintenant que T soit complètement régulier, et soit $\underline{\underline{C}}^b(T)$ l'espace des fonctions continues bornées sur T ; on appelle topologie étroite sur $\underline{\underline{M}}_+^b(T)$ la topologie de la convergence simple sur $\underline{\underline{C}}^b(T)$; c'est une topologie séparée. On dit qu'une partie H de $\underline{\underline{M}}_+^b(T)$ satisfait à la condition de Prokhorov si :

1) $\sup_{\mu \in H} \mu(T) < +\infty$,

2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\sup_{\mu \in H} \mu(T - K) \leq \varepsilon$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Si $H \subset \underline{\underline{M}}_+^b(T)$ satisfait à la condition de Prokhorov, H est relativement compact pour la topologie étroite.

Nous aurons enfin besoin de la propriété suivante :

PROPOSITION 3.- Avec les notations de la prop. 1, supposons que I admette un ensemble cofinal dénombrable, et que $T = \varprojlim T_i$. Soit H une partie de $\underline{\underline{M}}_+^b(T)$, telle que $p_i(H) \subset \underline{\underline{M}}_+^b(T_i)$ satisfasse à la condition de Prokhorov pour tout $i \in I$; H satisfait alors à la condition de Prokhorov.

C. Fonctions de type positif.

Soit E un espace localement convexe séparé, et soit E' le dual de E . Soit μ une mesure sur E' faible (on notera que toute mesure sur E' , muni d'une topologie compatible avec la dualité, est aussi une mesure sur E' faible). Par définition, la transformée de Fourier de μ est la fonction $\underline{\underline{F}}\mu$, définie sur E par :

$$\underline{\underline{F}}\mu(x) = \int \exp(i\langle x,y\rangle)\, d\mu(y) .$$

Il est facile de vérifier que la transformation de Fourier est injective. Si E est tonnelé, comme μ est portée à ε près par une partie faiblement compacte (donc équicontinue) de E' , on vérifie aisément que $\underline{\underline{F}}\mu$ est une fonction continue de type positif sur E . Dans ce cas, d'ailleurs, les ensembles faiblement compacts sont compacts pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes compactes de E , et μ est une mesure sur E'_c .

Passons au problème inverse : soit Φ une fonction de type positif continue sur E ; Φ est-elle de la forme $\underline{\underline{F}}\mu$? Soit I l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E , ordonné par inclusion. Si $i \in I$, nous désignerons par T_i le dual de i, équipé de son unique topologie d'evt. Si $j \subset i$, p_{ji} est l'application canonique (restriction à j) de T_i sur T_j . De même, p_i sera l'application canonique de E' sur T_i . D'après le théorème de Bochner, il existe une mesure unique μ_i sur T_i dont la transformée de Fourier est $\Phi \mid i$; comme les fonctions $\Phi \mid i$ s'induisent, les μ_i forment un système projectif, et on est ramené à appliquer (si l'on peut) la prop. 1.

Il nous sera commode de savoir qu'une fonction de type positif Φ continue à l'origine de E est continue : cela résulte de l'inégalité bien connue :

$$|\Phi(x) - \Phi(x+y)|^2 \leqslant 2\Phi(0)(\Phi(0) - \Phi(y)) .$$

II. Le théorème de Minlos.

LEMME 1.– Soient E un espace de dimension finie, muni d'une semi-norme préhilbertienne $\| \ \|$; soit E^* le dual de E. Si $y \in E^*$, on pose

$$\|y\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x,y\rangle| \qquad \text{(éventuellement } +\infty \text{)}.$$

Soient μ une mesure sur E^*, Φ sa transformée de Fourier. La relation

(1) $$\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\,\Phi(x) \leqslant \varepsilon + Q(x) ,$$

où Q et ε sont respectivement une forme quadratique positive sur E, et un nombre $\geqslant 0$, entraîne l'inégalité

(2) $$\mu\left\{ y \in E^* : \|y\| \geqslant r \right\} \leqslant 3(\varepsilon + \frac{S(Q)}{r^2}) \qquad \text{pour tout } r > 0 .$$

Nous allons commencer par traiter le cas où la semi-norme $\| \ \|$ est une norme. Choisissons alors une base orthonormale $e_1, \dots, e_n$ de E, et identifions E à E^* grâce au produit scalaire. Q s'écrit $\sum a_{ij}x_ix_j$, et $S(Q) = \sum_i a_{ii}$. Soit $A_r = \left\{ y \in E^* : \|y\| \geqslant r \right\}$; si $y \in A_r$, on a

$1 - \exp(-\|y\|^2/2r^2) \geqslant 1 - \exp(-1/2) \geqslant 1/3$, et par conséquent

$$\frac{1}{3}\,\mu(A_r) \leqslant \int [1 - \exp(-(y_1^2 + \dots + y_n^2)/2r^2)]\, d\mu(y_1, \dots, y_n) = \Phi(0) - \int [\exp..]\, d\mu .$$

Posons $K = r^n(2\pi)^{n/2}$; l'exponentielle sous le signe somme est la transformée de Fourier de $K\exp(-r^2\|x\|^2/2)$, et le théorème de Fubini donne donc

$$\frac{1}{3}\,\mu(A_r) \leq \Phi(0) - K\int \exp(-r^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2)/2)\Phi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\ .$$

Remplaçons Φ par $\underline{\underline{R}}\Phi$, puis utilisons l'inégalité $\underline{\underline{R}}\Phi(x) \geq \Phi(0) - \varepsilon - Q(x)$, et effectuons le calcul ; il vient (2).

Etendons maintenant (2) au cas où E n'est pas séparé. Choisissons une base $e_1,\ldots,e_n$ dont les k premiers vecteurs sont orthonormaux pour $\|\ \|$, tandis que les $n-k$ derniers sont de longueur nulle. L'inégalité (2) est triviale si $S(Q) = +\infty$. Si $S(Q) < +\infty$, Q s'écrit $\sum a_{ij}x_ix_j$, où les a_{ii} sont nuls pour $i > k$, et $S(Q) = \sum a_{ii}$. Soit t un nombre > 0 ; posons $\|x\|' = (\sum_{i\leq k} x_i^2 + t\sum_{i>k} x_i^2)^{1/2}$, et appliquons la formule (2) à la norme $\|\ \|'$, en remarquant que le changement de norme n'altère pas $S(Q)$, puis faisons tendre t vers 0 : (2) en résulte immédiatement.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> H <u>un espace préhilbertien, et soit</u> Q <u>une forme quadratique sur</u> H , <u>telle que</u> $S(Q) < +\infty$. <u>Soit</u> Φ <u>une fonction de type positif sur</u> H , <u>continue pour la topologie définie par</u> Q . <u>Il existe alors une mesure</u> μ <u>sur</u> H' <u>faible, telle que</u> $\Phi = \underline{\underline{F}}\mu$.

(N.B.- Si H est séparable (de type dénombrable, dit Bourbaki), H' est polonais, H' faible est lusinien, ces deux espaces ont les mêmes mesures).

En effet, soit η un nombre > 0 ; comme Φ est continue pour la topologie définie par Q , il existe $\lambda > 0$ tel que $\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\Phi(x) \leq \eta$ sur la Q-boule $\{x : Q(x) \leq \lambda\}$, et on a donc $\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\Phi(x) \leq \eta + Q(x)/\lambda$. Soit K^r la boule de rayon r dans H' . Soit i un sous-espace de dimension finie de E , et soit T_i son dual ; le lemme nous donne l'inégalité suivante, avec les notations de la première partie, C) :

$$\mu_i(T_i \setminus p_i(K^r)) \leq 3(\eta + \frac{S(Q)}{\lambda r^2})\ .$$

Le second membre peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de η , puis de r , et on conclut par la prop. 1.

Voici maintenant la forme de la définition des espaces nucléaires qui nous sera commode. Il est facile de voir, avec cette définition, que si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{D}}_K$ est un Fréchet nucléaire ; il est un peu plus difficile de voir que $\underline{\underline{D}}$, et surtout $\underline{\underline{D}}'_K$, $\underline{\underline{D}}'$, sont nucléaires, mais nous n'aurons pas besoin de ces résultats.

DÉFINITION.- Un ELC séparé E est dit nucléaire si, pour toute semi-norme continue g sur E, il existe deux semi-normes préhilbertiennes $\sqrt{Q}$ et $\sqrt{h}$ continues sur E, telles que $\sqrt{h} \geq \sqrt{Q} \geq g$, et que $S_h(Q) < +\infty$.

Voici alors la forme améliorée du théorème de Minlos, due à Schwartz :

THÉORÈME 1.- Soit E un espace nucléaire.

a) Soit Φ une fonction de type positif continue sur E ; il existe une mesure μ sur E'_c telle que $\Phi = \underline{\underline{F}}\mu$.

b) Soit H un ensemble de fonctions de type positif continues sur E, tel que les fonctions $\underline{\underline{R}}\Phi$ $(\Phi \in H)$ soient uniformément bornées sur E, et équicontinues au point 0. L'ensemble des mesures sur E'_c associées aux éléments de H satisfait alors à la condition de Prokhorov.

La démonstration est presque identique à celle du corollaire ci-dessus. Si Φ est continue, il existe une semi-norme continue g sur E telle que $\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\Phi(x) \leq \eta$ sur $\{x \in E : g(x) \leq 1\}$; on a donc $\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\Phi(x) \leq$ $\leq \eta + \Phi(0)g(x)$ pour tout x. Si Φ parcourt H (hypothèse b)), il existe une même semi-norme continue g qui satisfait à $\Phi(0) - \underline{\underline{R}}\Phi(x) \leq \eta + Mg(x)$ pour tout $\Phi \in H$, où $M = \sup\limits_{\Phi \in H} \Phi(0)$. Choisissons alors deux formes quadratiques Q et h satisfaisant aux conditions de la définition des espaces nucléaires, et désignons par K^r l'ensemble des formes linéaires y sur E tellesque $|\langle x,y\rangle| \leq r\sqrt{h(x)}$ pour tout $x \in E$: K^r est équicontinu faiblement fermé dans E', donc compact pour E'_c. Soit i un sous-espace de E, de dimension finie, soit T_i son dual ; le lemme nous donne l'inégalité (avec les notations de la première partie, C))

$$\mu_i(T_i - p_i(K^r)) \leq 3(\eta + \frac{M^2 s_h(Q)}{r^2}) ,$$

si le système projectif μ_i est construit à partir d'une $\Phi \in H$ arbitraire. Le théorème en résulte aussitôt.

III. Le théorème de continuité.

Nous allons commencer par traiter le cas d'un Fréchet nucléaire.

THÉORÈME 2.- <u>Soit E un Fréchet nucléaire, et soit (μ_k) une suite de mesures sur E'_c, telle que la suite des fonctions $\Phi_k = \underline{\underline{F}}\mu_k$ converge simplement vers une fonction Φ continue à l'origine. La suite (Φ_k) est alors équicontinue à l'origine sur E, la suite (μ_k) converge étroitement sur E'_c vers une mesure μ, et on a $\Phi = \underline{\underline{F}}\mu$.</u>

Remarquons d'abord que Φ est de type positif, continue à l'origine, et donc continue (voir la première partie, C)). Il existe donc une mesure μ telle que $\Phi = \underline{\underline{F}}\mu$. Nous allons montrer que la logique s'écroule si les $\underline{\underline{R}}\Phi_k$ ne sont pas équicontinues à l'origine, et le théorème en découlera sans peine.

Supposons donc que les $\underline{\underline{R}}\Phi_k$ ne soient pas équicontinues à l'origine. Il existe un nombre $\eta > 0$, et une suite (x_n) d'éléments de E tels qu'on ait, en désignant par (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E

$$(1) \qquad p_n(x_n) \leq 2^{-2n} \quad , \quad \Phi'_n(0) - \underline{\underline{R}}\Phi'_n(x_n) \geq \eta \quad ,$$

où (Φ'_n) est une suite extraite de (Φ_n). Posons pour tout $y \in E'$

$$h(y) = \sum_{n \geq n_0} 2^n < x_n, y >^2$$

$$Q(y) = \sum_{n \geq n_0} < x_n, y >^2 .$$

La suite $(2^n x_n)$ converge vers 0, et son enveloppe convexe équilibrée B est compacte. Si y appartient à B^o, on a $\langle x_n, y\rangle \leq 2^{-n}$, et donc $h(y) \leq 2$. Il en résulte que h et Q sont des formes quadratiques positives continues sur E'_c, et on a évidemment $S_h(Q) < +\infty$. Considérons alors la fonction $U(y) = \exp(-Q(y))$ sur E'_c : U est une fonction de type positif continue pour la topologie définie par Q, et d'après le cor. du lemme 1 il existe une mesure λ sur le dual F de $E'_{\sqrt{h}}$ (faible), portée à ε près par des boules de F pour tout $\varepsilon > 0$, et telle que $U(y) = \int \exp(i\langle x,y\rangle) d\lambda(x)$. Mais E est réflexif, on a donc $F \subset E$, les boules de F sont compactes pour la topologie induite par E, et λ peut être considérée comme une mesure de Radon sur E, portée par F. Nous avons alors, d'après le théorème de Lebesgue, $\lim\limits_k \lambda(\Phi'_k) = \lambda(\Phi')$, d'où en appliquant Fubini, $\lim\limits_k \mu_k(U) = \mu(U)$.

Donnons nous maintenant un nombre $\varepsilon > 0$, et choisissons n_0 assez grand pour que $\int [1 - \exp(-Q(y))]\, d\mu(y) < \varepsilon$. D'après ce qui précède, il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ entraîne $\int [1 - \exp(-Q(y))]\, d\mu_n(y) \leq \varepsilon$, et a fortiori $\int [1 - \exp(-\langle x_n,y\rangle^2)]\, d\mu_n(y) \leq \varepsilon$ si $n \geq \sup(N, n_0)$. Soit $M = \sup\limits_t \dfrac{1 - \cos t}{1 - \exp(-t^2)}$; on a alors $\Phi'_n(0) - \underline{\underline{R}}\Phi'_n(x_n) = \int [1 - \cos(\langle x_n,y\rangle)]\, d\mu_n(y) \leq M\varepsilon$, ce qui contredit (1) si ε est choisi tel que $M\varepsilon < \eta$.

La fin de la démonstration n'est plus qu'un jeu : les $\underline{\underline{R}}\Phi_k$ sont équicontinues à l'origine, donc (th. 1) les μ_k satisfont à la condition de Prokhorov, donc (prop. 2) forment un ensemble étroitement compact. Si ν est un point adhérent à la suite (μ_k), on a $\underline{\underline{F}}\nu = \Phi = \underline{\underline{F}}\mu$, donc $\nu = \mu$, et par conséquent la suite (μ_k) converge vers μ.

IV. Extension aux limites inductives.

Soit E un e.l.c., limite inductive stricte d'une suite (E_n) de sous-espaces de E. On peut démontrer directement le résultat suivant : soit Φ une fonction de type positif sur E ; pour que Φ soit continue sur E, il faut et il suffit que $\Phi|E_n$ soit continue pour tout n. De même, pour qu'un ensemble H de fonctions de type positif sur E soit équicontinu à l'origine sur E, il faut et il suffit que l'ensemble H_n des $\Phi|E_n$ $(\Phi \in H)$ soit équicontinu à l'origine de E_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, il est bien connu que si les E_n sont nucléaires, E est nucléaire. Mais nous n'utiliserons aucun de ces résultats pour prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.- Soit E un e.l.c., limite inductive stricte d'une suite (E_n) d'espaces de Fréchet nucléaires.

a) Soit Φ une fonction de type positif sur E, telle que $\Phi|E_n$ soit continue à l'origine pour tout $n \in \mathbb{N}$; Φ est alors de la forme $\underline{\underline{F}}\mu$, où μ est une mesure sur E'_c (et Φ est continue sur E).

b) Soit H un ensemble de fonctions de type positif sur E, tel que les fonctions $\underline{\underline{R}}\Phi|E_n$ $(\Phi \in H)$ soient uniformément bornées, équicontinues à l'origine pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Les mesures sur E'_c associées aux fonctions $\Phi \in H$ satisfont alors à la condition de Prokhorov (et H est équicontinu sur E).

c) Soit (Φ_k) une suite de fonctions de type positif sur E, qui converge simplement vers une fonction Φ continue sur chaque E_n (et donc sur E). Les mesures μ_k associées aux Φ_k convergent alors étroitement vers une mesure μ telle que $\underline{\underline{F}}\mu = \Phi$ (et les Φ_k sont équicontinues sur E).

Nous ne démontrerons pas les assertions entre parenthèses, qui résultent facilement des propriétés des mesures associées, et du fait que E est tonnelé. Soit Φ de type positif, continue à l'origine sur chaque E_n, et soit μ^n la mesure sur $(E_n)'_c$ dont la transformée de Fourier est $\Phi | E_n$. Les mesures μ^n forment un système projectif ; comme on a $E'_c = \varprojlim (E_n)'_c$ (tout compact de E étant contenu dans l'un des E_n), la prop. 1 entraîne l'existence d'une limite projective μ sur E'_c, et on a $\underline{\underline{F}}\mu = \Phi$. De même, sous l'hypothèse b), si Φ parcourt H, l'ensemble des μ^n satisfait à la condition de Prokhorov pour tout n (th. 1), et la proposition 3 entraîne que les mesures μ associées aux $\Phi \in H$ satisfont à la condition de Prokhorov. Enfin, sous l'hypothèse c), la suite (Φ_k) est équicontinue à l'origine de chaque E_n (th. 2), l'ensemble des μ_k satisfait à la condition de Prokhorov d'après b), et on en déduit aussitôt que les μ_k convergent vers l'unique mesure μ telle que $\underline{\underline{F}}\mu = \Phi$.

V. Condition de Prokhorov et compacité étroite.

On a signalé au début de l'exposé l'importance de la condition de Prokhorov, condition suffisante pour qu'un ensemble de mesures soit relativement compact pour la topologie étroite (prop. 2). Dans les espaces polonais, Prokhorov a montré que cette condition était aussi nécessaire. Elle l'est aussi, assez trivialement, pour les espaces localement compacts, mais on ne savait guère quelle était la situation sur des espaces topologiques plus généraux. Fernique vient de faire progresser assez considérablement cette question ; d'abord, en donnant un joli contre-exemple : celui d'une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable, muni de la topologie faible, qui converge étroitement vers la masse unité à l'origine, et qui est telle que $\mu_n(B) \longrightarrow 0$ pour toute boule B. D'autre part, en indiquant plusieurs classes intéressantes d'espaces localement convexes, sur lesquels les ensembles étroitement compacts de mesures positives satisfont à la condition de Prokhorov. La démonstration de Fernique repose sur deux lemmes, que voici.

LEMME 2.- Soit T un espace complètement régulier, et soit H une partie de $\underline{\underline{M}}_+^b(T)$, relativement compacte pour la topologie étroite. Soit $\underline{\underline{A}}$ une famille filtrante croissante d'ouverts, qui recouvre T. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \in \underline{\underline{A}}$ tel que $\mu(T \setminus U) \leq \varepsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$.

En effet, les fonctions $\mu \mapsto \mu(T \setminus U)$ $(U \in \underline{\underline{A}})$ sur $\bar{H}$ forment une famille filtrante décroissante de fonctions semi-continues supérieurement, dont l'enveloppe inférieure est 0. Le lemme 2 est donc tout simplement ce vieux lemme de Dini.

On notera que le lemme 3 qui suit entraîne le résultat de Prokhorov cité plus haut.

LEMME 3.- Les notations étant les mêmes que ci-dessus, supposons que η soit un nombre > 0, et qu'il existe une partie polonaise fermée P de T telle qu'on ait :

$$\sup_{\mu \in H} \mu(T \setminus P) < \eta .$$

Il existe alors un compact $K \subset P$ tel que $\sup_{\mu \in H} \mu(T \setminus K) < \eta$.

Plongeons T dans son compactifié de Čech S : P est l'intersection d'une suite décroissante (U_m) d'ouverts de S. Pour chaque m, soit f_m une fonction continue dans S, égale à 1 sur P et à 0 hors de U_m, et soit H_m l'ensemble des mesures $f_m\mu$, où μ parcourt $\bar{H}$: mais $\bar{H}$, considéré comme ensemble de mesures sur S, est étroitement compact, et les mesures $f_m\mu$ sont portées par U_m. D'après un résultat classique sur la topologie étroite, H_m peut être considéré comme un ensemble étroitement compact de mesures sur U_m. D'après la théorie de la convergence étroite sur les espaces localement compacts, il existe un compact $K_m \subset U_m$ qui porte les mesures $f_m\mu$ $(\mu \in H)$ à $\varepsilon 2^{-m-1}$ près. La relation $\int f_m \varphi_{T \setminus K_m} d\mu \leq \varepsilon 2^{-m-1}$ donne par addition $\int g d\mu \leq \varepsilon$, où $g = \sum_m f_m \varphi_{T \setminus K_m}$. Si $K = \bigcap_m K_m$, K est un compact de P et la relation $x \in P \setminus K$ entraîne $g \geq 1$. On a donc $\mu(P \setminus K) \leq \varepsilon$ pour toute $\mu \in H$, et l'inégalité de l'énoncé si ε est assez petit.

Voici maintenant le principal résultat de Fernique à ce sujet.

THÉORÈME 4.- Soit E un espace localement convexe de l'un des types suivants

a) limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet séparables ;

b) dual fort d'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet-Montel

(on rappelle que les espaces de Fréchet-Montel sont séparables).

Toute partie relativement compacte H de $\underline{\underline{M}}_+^b(E)$ satisfait alors à la condition de Prokhorov.

a) Désignons par (E_n) une suite croissante de sous-espaces de Fréchet séparables de E, dont la réunion soit E, définissant la topologie limite inductive. Tout revient à démontrer qu'il existe, pour tout $\eta > 0$, un E_n qui porte à η près toutes les mesures $\mu \in H$ (lemme 3). Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un η, et une suite (μ_n) d'éléments de H, tels que $\mu_n(E \setminus E_n) > \eta$. Comme E_n est l'intersection des sous-espaces fermés de codimension finie qui le contiennent, et que μ_n est une mesure de Radon, il existe un espace fermé de codimension finie $F_n \supset E_n$ tel que $\mu_n(E \setminus F_n) > \eta$. Il est alors immédiat de construire un ouvert convexe $G_n \supset F_n$ tel que $\mu_n(E \setminus G_n) > \eta$. Posons alors $A_n = \bigcap_{m \geq n} G_m$: A_n est convexe, rencontre chaque E_k suivant un ouvert : A_n est donc ouvert, et on a $\mu_n(E \setminus A_n) > \eta$. Mais les A_n croissent et recouvrent E, l'ensemble des μ_n est relativement compact, et cette relation contredit le lemme 3.

b) Soit F un espace de Fréchet-Montel, et soit E son dual fort ; soit (V_n) une suite fondamentale décroissante de voisinages de 0 dans F, et soit $K_n = V_n^\circ$:

les K_n croissent, leur réunion est E, ils sont équicontinus, donc fortement compacts, car E est un Montel. Supposons que $H \subset \underset{\Rightarrow+}{M}^b(E)$ soit compact, mais ne satisfasse pas à la condition de Prokhorov. Il existe alors un $\eta > 0$ et une suite (μ_n) d'éléments de H, tels que $\mu_n(E \underset{\sim}{-} K_n) > \eta$. Comme μ_n est une mesure de Radon, il existe une partie finie L_n de V_n telle que $\mu_n(E \underset{\sim}{-} L_n^o) > \eta$. Soit $J_n = \bigcup_{m \geq n} L_m$; J_n est l'ensemble des points d'une suite qui tend vers 0, donc un compact de F, donc J_n^o est un voisinage de 0 dans E, et on a $\mu_n(E \underset{\sim}{-} J_n^o) > \eta$. Mais les J_n^o croissent avec n, et les ensembles $\frac{1}{2} J_n^o$ recouvrent E, de sorte que (0 étant intérieur à J_n^o) les intérieurs des J_n^o recouvrent E. Mais l'ensemble des μ_n est relativement compact : la relation $\mu_n(E \underset{\sim}{-} J_n^o) > \eta$ contredit le lemme 2.

c) Soit F une limite inductive stricte d'une suite de sous-espaces de Fréchet-Montel, soit (F_n) une suite de définition de F, soient E le dual de F, E_n le dual de F_n. Comme tout borné de F est dans l'un des F_n, on a $E = \varprojlim E_n$ pour les topologies fortes. Soit H une partie compacte de $\underset{\Rightarrow+}{M}^b(E)$, et soit H_n son image canonique dans $\underset{\Rightarrow+}{M}^b(E_n)$; H_n satisfait à la condition de Prokhorov d'après b), et H y satisfait donc aussi (prop. 3).

ERRATA

Page 311-06 - Ligne 6 du bas, au lieu de " $\leq \eta + Q(x)/\lambda$ ", lire " $\leq \eta + \Phi(0)Q(x)/\lambda$ ".

Ligne 3 du bas, au lieu de " $\leq 3(\eta + \frac{S(Q)}{\lambda r^2})$ ", lire " $\leq 3(\eta + \frac{S(Q)\Phi(0)}{\lambda r^2})$ ".

-:-:-:-