SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PHILIPPE COURREGE

Problèmes aux limites elliptiques et principe du maximum

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 302, p. 367-384

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__367_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 302

Février 1966

PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES ET PRINCIPE DU MAXIMUM.

par Philippe COURREGE

Reprenant un résultat de Wentzel (voir Wentzel [9] et Ueno [7]), on décrit, relativement à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients continus, les problèmes aux limites donnant lieu au principe du maximum (voir en 0.5 ci-dessous). Pour un exposé plus complet, on renvoie à [2] .

§0 - Position du problème.

0.1- Dans toute la suite, on désigne par M une variété à bord compacte et connexe de classe C^∞ et de dimension n $(n \geq 1)$, et par ∂M son bord (supposé non vide).

On ne considère que des cartes locales (U, X) de M pour lesquelles $X(U) \subset \overline{R^{n+}} = \{z \mid z \in R^n \text{ et } z^1 \geq 0\}$ de telle sorte que, au voisinage du bord, c'est la coordonnée X^1 qui le définit : $x \in U \setminus \partial M \Longleftrightarrow x \in U$ et $X^1(x) > 0$.

Les espaces $C(M) = C^\circ(M)$ et $C(\partial M) = C^\circ(\partial M)$ sont toujours munis de la norme uniforme $\| \ \|_\infty$.

On désigne, par ailleurs, par P un opérateur différentiel du second ordre sur M à coefficients réels et continus : ainsi P applique $C^2(M)$ dans $C(M)$. Notant Π la partie principale d'ordre 2 de P, on fait, une fois pour toute ici, sur P les deux hypothèses suivantes :

(A) P est fortement elliptique en ce sens que, pour chaque $x \in M$, et chaque $\omega \in T_x^*(M)$ (espace cotangent en x à M),

$$\omega \neq 0 \Rightarrow \Pi_x(\omega, \omega) > 0$$

(B) La fonction continue $a = -P1$ est ≥ 0 sur M.

0.2-On appellera *domaine de résolution* tout sous espace vectoriel $\underline{U}$ de l'espace $C^2(M)$, *dense dans* $C(M)$ (pour la topologie de la norme uniforme). *Le problème aux limites* (homogène) relatif à $\underline{U}$ et à P consiste alors en l'étude de l'opérateur non borné sur $C(M)$ (que l'on notera $(\underline{U},P)$) obtenu en prenant la restriction de P à $\underline{U}$.

En particulier, on dira que $\underline{U}$ *est riche par rapport à* P si,

(R) pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda - P$ applique $\underline{U}$ sur un sous espace dense de $C(M)$.

0.3-On appellera *opérateur frontière* toute application linéaire Γ de $C^2(M)$ dans l'espace $B(\partial M)$ des fonctions numériques boréliennes bornées sur ∂M.

On dira qu'un tel opérateur Γ est *consistant*, si

(C) pour tout $x \in \partial M$, il existe $u \in C^2(M)$ tel que $\Gamma u(x) \neq 0$.

On dira que Γ est (de type) *local* si,

(L) pour tout $u,v \in C^2(M)$, et tout ouvert U de ∂M $(U \cap \partial M \neq 0)$,
$u(y) = v(y)$ pour tout $y \in U \Longrightarrow \Gamma u(x) = \Gamma v(x)$ pour tout $x \in U \cap \partial M$.

On dira que Γ est (de type) *quasi local* si,

(QL) pour tout $u,v \in C^2(M)$ et tout ouvert U de M *contenant* ∂M,
$u(y) = v(y)$ pour tout $y \in U \Longrightarrow \Gamma u(x) = \Gamma v(x)$ pour tout $x \in \partial M$.

Pour chaque opérateur frontière Γ, on posera,

$$\underline{U}_\Gamma = \{u \mid u \in C^2(M) \text{ et } \Gamma u = 0\}. \tag{0.2}$$

Exemple. *Le problème aux dérivées obliques* : Si, on pose,
$\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma . \gamma^o u$ (1) $(u \in C^2(M))$, où n est un champ de vecteurs sur ∂M strictement dirigé vers l'extérieur et σ une fonction ≥ 0 sur ∂M, tous deux assez réguliers, $\underline{U}_\Gamma$ est un domaine de résolution riche par rapport à P (2).

Remarque Par contre, le *problème de Dirichlet* ne rentre pas dans le cadre étudié ici, puisque $\underline{U}_{\gamma o} = \{u \mid u \in C^2(M) \text{ et } \gamma^o u = 0\}$ n'est pas dense dans $C(M)$.

0.4-Si $\underline{U}$ est un domaine de résolution, on dira que P *satisfait au principe du maximum sur* $\underline{U}$, si,

(M) pour tout $u \in \underline{U}$, et tout $x \in M$,

$$u(x) = \operatorname{Sup} u \geq 0 \Longrightarrow Pu(x) \leq 0 \quad (3) \tag{0.3}$$

---

(1) $\gamma^o u$ désignant la restriction de u à δM

(2) Voir Hörmander [3] p. 265, ou Ladyzenskaya [4] p. 163

(3) $\operatorname{Sup} u = \operatorname{Sup}_{x \in M} u(x)$.

0.5 - L'objet de cet exposé est alors, d'une part, de montrer (voir en 2.4) que tout domaine de résolution riche par rapport à P et sur lequel P satisfait au principe du Maximum [(1)] est contenu dans un domaine de résolution de la forme $\underline{U}_\Gamma$, où Γ appartient à une classe d'opérateurs frontière consistants qui sera décrite au §2 ci-dessous ; d'autre part, et inversement, de montrer que pour certains de ces opérateurs Γ les propriétés requises pour le domaine $\underline{U}_\Gamma$ sont effectivement satisfaites (voir en 3.3).

§1. Principe du maximum et semi groupes de Feller.

1.1- Désignant par E un espace compact, un semi groupe de Feller sur l'espace de Banach $C(E)$ est un semi groupe $(N_t)_{t \geq 0}$ $(N_o = 1)$ d'opérateurs linéaires bornés sur $C(E)$ $(N_t N_s = N_{t+s}$, $t,s \geq 0)$, fortement continu $(\lim_{t \downarrow o} ||N_t f-f||_\infty = 0$ $\forall f \in C(E))$ et tel que, pour tout $t \geq 0$

(1.1) $\qquad f \in C(E)$ et $0 \leq f \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq N_t f \leq 1.$

Ceci étant, voici une forme du Théorème de Hille Yosida utile ici :

THÉORÈME de Hille-Yosida-Ray. Soit $(\underline{D}, D)$ un opérateur linéaire (non borné) sur $C(E)$ préfermé et de domaine $\underline{D}$ dense tel que,

1) Pour chaque $\lambda > 0$, $(\lambda-D)(\underline{D})$ est dense dans $C(E)$,

2) Si $u \in \underline{D}$ est telle que $\text{Sup } u > 0$, il existe au moins un point $x \in E$ tel que $u(x) = \text{Sup } u$ et $Du(x) \leq 0$.

Alors il existe un semi groupe de Feller (N_t) sur $C(E)$, et un seul, dont le générateur infinitésimal $(\underline{D}_A, A)$ coïncide avec la fermeture de l'opérateur $(\underline{D}, D)$.

On va déduire ce résultat du Théorème classique de Hille-Yosida :
D'abord l'hypothèse (2) entraîne que, si $\lambda > 0$, $u \in \underline{D}$ et $f = \lambda u - Du$,

$$(1.2) \qquad -(\inf f)^- \leq \lambda u \leq (\sup f)^+ .$$

---

(1) D'après le principe du maximum élémentaire (Lemme A1-1, Appendice 1) la relation (0.3) est satisfaite pour tout $x \in M \setminus \partial M$. La question est donc de savoir pour quels $\underline{U}$ elle l'est aussi pour $x \in \partial M$.

En effet, si, par exemple, $\inf u < 0$ et $\sup u > 0$, il existe, d'après (2), $x_o \in E$ et $x_1 \in E$ tels que,

$$u(x_o) = \sup u \quad , \quad u(x_1) = \inf u \quad , \quad Du(x_o) \leqq 0 \quad \text{et} \quad Du(x_1) \geqq 0 \text{ ; et}$$

on a, pour $y \in E$,

$$\inf f \leqq f(x_1) \leqq f(x_1) + Du(x_1) = \lambda u(x_1) \leqq \lambda u(y), \text{ et}$$

$$\lambda u(y) \leqq \lambda u(x_o) = f(x_o) + Du(x_o) \leqq f(x_o) \leqq \operatorname{Sup} f.$$

De (1.2) et de l'hypothèse (1), il résulte ensuite que, pour chaque $\lambda > 0$, il existe un opérateur <u>positif</u> V_λ de $C(E)$ dans lui-même, et un seul, tel que

$$||V_\lambda|| \leqq \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V_\lambda(\lambda - D)u = u \quad \text{pour tout} \quad u \in \underline{D}$$

Désignant enfin par $(\hat{\underline{D}}, \hat{D})$ la fermeture de l'opérateur $(\underline{D}, D)$, on vérifie sans difficulté que, pour chaque $\lambda > 0$,

(1.4) $\quad V_\lambda (\lambda - \hat{D})u = u$ pour tout $u \in \hat{\underline{D}}$, et

(1.5) $\quad V_\lambda f \in \hat{\underline{D}}$ et $(\lambda - \hat{D})V_\lambda f = f$ pour tout $f \in C(E)$.

Le théorème de Hille-Yosida appliqué à l'opérateur fermé $(\hat{\underline{D}}, \hat{D})$ et à la famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ permet de conclure.

CQFD.

1.2- Le résultat suivant exprime alors que les domaines de résolution qui sont en cause ici (Voir en 0.5), sont exactement ceux sur lesquels P coïncide avec le générateur infinitésimal d'un semi groupe de Feller :

<u>THÉORÈME</u>. Soit $\underline{U}$ un domaine de résolution riche par rapport à P (1). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(M) P satisfait au principe du Maximum sur $\underline{U}$ (2).

(F) Il existe un semi-groupe de Feller $(N_t)_{t \geq 0}$ sur l'espace $C(M)$ dont le générateur infinitésimal coïncide avec la fermeture (dans $C(M)$) de l'opérateur $(\underline{U}, P)$.

(1) Voir en 0.2

(2) Voir en 0.4

(F) $\Longrightarrow$ (M) résulte immédiatement de la propriété (1.1) d'un semi-groupe de Feller. (M) $\Longrightarrow$ (F) est conséquence du théorème de Hille-Yosida-Ray (voir en 1.1), compte tenu de ce que l'opérateur $(\underline{U},P)$ est préfermé dans $C(\underline{M})$ comme $(C^2(M),P)$.

Cette dernière propriété se déduit comme suit [(1)] du principe du maximum élémentaire (Lemme A1-1, Appendice 1) : Soit (u_n) une suite de fonctions de $C^2(M)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} Pu_n = g$; il suffit de montrer que $g(x) = 0$ pour chaque $x \in M \setminus \partial M$. Raisonnant par l'absurde, soient $x \in M\setminus\partial M$ tel que $g(x) > 0$, (U,χ) une carte locale de M au voisinage de x $(x \in U \subset M \setminus \partial M)$, et $\psi \in C^2(M)$ telle que $\psi(y) = |\chi(y)-\chi(x)|^2$ pour y assez voisin de x. Désignant par P_o l'opérateur différentiel $u \to Pu-P1.u$, on note que $P_o 1 = 0$, $||P_o\psi||_\infty > 0$, et $\lim_{n\to\infty} P_o U_n = g$. Il résulte alors de l'hypothèse sur g, l'existence de $\varepsilon > 0$, $r > 0$ et d'un entier n_o tels que, si on pose $u'_n = u_n - \frac{\varepsilon}{||P_o\psi||_\infty}\psi$, $P_o u'_n(y) > 0$ et $\psi(y) = |\chi(y)-\chi(x)|^2$, pour $|\chi(y)-\chi(x)| \leqq r$ et $n \geqq n_o$. Il résulte donc du lemme A1 appliqué à P_o que, pour $n \geqq n_o$, $u_n(x) + \frac{\varepsilon r^2}{||P_o\psi||_\infty} < \sup_{|\chi(y)-\chi(x)|=r} u_n(y)$; relation qui contredit la convergence uniforme de la suite (u_n) vers 0.

CQFD.

§2. Opérateurs et condition frontière de Wentzel.

2.1- Opérateurs frontière de Wentzel de type local. Soient :

- α , σ , δ des frontières $\geqq 0$ boréliennes bornées sur ∂M,
- n un champs de vecteurs sur ∂M, borélien borné, et"strictement dirigé vers l'extérieur de M" : autrement dit, pour toute carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, les fonctions $x \to \langle n_x, d_x\chi^j\rangle$ $(1 \leqq j \leqq n)$ sont boréliennes bornées sur $U \cap \partial M$, et

(2.1) $\langle n_x, d_x^1 \chi \rangle < 0$ pour tout $x \in U \cap \partial M$.

(1) Voir aussi Wentzel [9] Lemme 1.

- B un opérateur différentiel du second ordre sur la variété ∂M, à coefficients réels boréliens bornés [1] ayant les propriétés suivantes :

(2.2) $\quad B1 = 0$

(2.3) $\quad \beta_x(\omega,\omega) \geq 0$ pour tout $x \in \partial M$, et $\omega \in T_x^*(\partial M)$, où β est la partie principale d'ordre 2 de B (On notera que la forme bilinéaire β_x peut être dégénérée et même nulle).

<u>Un opérateur frontière de Wentzel de type local relatif à</u> P est alors, par définition, de la forme,

(2.4) $\quad \Lambda u = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_\circ \gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta_\circ \gamma^o P u \quad (u \in C^2(M))$ [2]

2.2 - On appellera <u>noyau singulier à la frontière</u>, toute application $(x,W) \to N(x,W)$ de $\partial M \times \mathscr{C}_M$ [3] dans $[0,+\infty]$ telle que,

(2.5) pour tout $W \in \mathscr{C}_M$, $N(\circ,W)$ est une fonction borélienne sur ∂M.

(2.6) pour tout $x \in \partial M$, $N(x,\circ)$ est une mesure ≥ 0 [4] sur la tribu $\mathscr{C}_M$ telle que $N(x,\{x\}) = 0$ et dont la restriction à la tribu $\mathscr{C}_{M\setminus\{x\}}$ est une mesure de Radon [5]

On dira que N <u>est un noyau singulier (à la frontière) de Wentzel</u> si, pour chaque carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$,

(2.7) $$\sup_{x \in U \cap \partial M} \int_U [\chi^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi^j(y) - \chi^j(x))^2]\, N(x,dy) < +\infty \text{ [6]} .$$

[La formule de Taylor appliquée aux fonctions χ^i $(1 \leq i \leq n)$ permet de vérifier l'invariance de (2.7) par changement de carte locale].

On dira que N est <u>quasi local</u>, si $N(x,M \setminus \partial M) = 0$ pour tout $x \in \partial M$.

2.3 - <u>Un opérateur frontière de Wentzel de type intégral</u> est alors un opérateur

---

(1) Autrement dit, B applique $C^2(\partial M)$ dans $B(\partial M)$.

(2) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \langle n_x, d_x u \rangle (x \in \partial M)$; et $\gamma^o u$ est la restriction de u à ∂M.

(3) $\mathscr{C}_X$ désigne la tribu borélienne de l'espace topologique X.

(4) pas nécessairement finie sur les compacts au voisinage de x.

(5) $N(x,K) < +\infty$ pour tout compact K de M tel que $x \notin K$.

(6) Avec la convention sur (U,χ) faite en (0.1) : $\chi^1(y) > 0$ si $y \in U \setminus \partial M$, et $\chi^1(y) = 0$ si $y \in U \cap \partial M$.

frontière [1] S pour lequel, d'une part

$$S\,1 \geqq 0 \quad ; \tag{2.8}$$

d'autre part, il existe un noyau singulier de Wentzel N tel que,
(W_1) pour tout $x \in \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$ à support dans $M \setminus \{x\}$,

$$Su(x) = -\int_M u(y) N(x,dy). \tag{2.9}$$

(W_2) pour toute carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, il existe des fonctions numériques boréliennes bornées, $\sigma_\chi, \sigma_\chi^2, \ldots, \sigma_\chi^n$ sur $U \cap \partial M$ telles que, pour tout $x \in U \cap \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$ à support dans U, on ait,

$$Su(x) = \sigma_\chi(x)u(x) + \sum_{j=2}^{n} \sigma_\chi^j(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)$$

$$- \int_U \Big[u(y)-u(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)\,(\chi^j(y)-\chi^j(x))\Big] N(x,dy)\ . \tag{2.10}$$ [2]

Le noyau singulier N, qui est entièrement déterminé par la donnée de S d'après (2.6) et (2.9), est appelé le noyau singulier de l'opérateur S. Pour que S soit quasi-local, il faut et il suffit que son noyau singulier le soit, et S est alors de la forme $u \to S^*(\gamma^o u)$ où S^* est une application linéaire de $C^2(\partial M)$ dans $B(\partial M)$.

2.4 - Un opérateur frontière de Wentzel relatif à P est, par définition, un opérateur frontière L de la forme $L = \Lambda + S$, où Λ est un opérateur de Wentzel de type local relatif à P, et S un opérateur de Wentzel de type intégral. Ceci étant :

---

(1) Voir en 0.3

(2) La formule de Taylor appliquée à u jusqu'à l'ordre 2 assure que cette intégrale a un sens, compte tenu de la propriété (2.7) de N.

THÉORÈME. Soit $\underline{U}$ un domaine de définition riche par rapport à P (1). Alors, si P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}$ (2), il existe un opérateur frontière de Wentzel L relatif à P et consistant (3), pour lequel

(2.11) $\quad u \in \underline{U} \Longrightarrow Lu = 0 \qquad$ (autrement dit, $\underline{U} \subset \underline{U}_L$).

2.5. Démonstration du Théorème 2.4. Grâce au Théorème 1.2, on est ramené à établir le résultat suivant qui précise la "mesurabilité" de la condition obtenue par Wentzel (voir [9] Théorème 1) :

THÉORÈME. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $C(M)$. Il existe un opérateur frontière de Wentzel L relatif P et consistant tel que, pour tout $x \in \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$,

(2.12) $\quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (N_t u(x) - u(x)) = Pu(x) \Longrightarrow Lu(x) = 0.$

En particulier, si $(\underline{D}_A, A)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe (N_t), on a ,

(2.13) $\quad u \in \underline{D}_A \cap C^2(M)$ et $Au = Pu \Longrightarrow Lu = 0.$

Voici les grandes lignes d'une démonstration, pour plus de détails on renvoie à [2] :

a) On désigne par (E_k) une partition finie de ∂M formée d'ensembles boréliens et, pour chaque k, par χ_k une application de classe C^∞ de M dans $\overline{R^{n+}}$, telle que

(2.14) il existe un ouvert U_k de M, contenant E_k et tel que (U_k, χ_k) soit une carte locale de M.

(2.15) $\quad \chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2 > 0$ pour tout $x \in E_k$ et $y \in M \setminus \{x\}$.

On va déterminer L sous la forme suivante : pour chaque $u \in C^2(M)$, chaque k, et chaque $x \in E_k$,

---

(1) Voir en 0.2

(2) Voir en 0.4

(3) Voir en 0.3

$$Lu(x) = -\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \chi_k^1}(x) - \sum_{i,j=2}^{n} \beta^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \chi_k^i \partial \chi_k^j}(x) + \delta(x) Pu(x)$$

$$+ \sigma(x)u(x) + \sum_{j=2}^{n} \sigma^j(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)$$

$$- \int_M \Big[u(y) - u(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x)\,(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))\Big]\, N(x,dy),$$

où N est un noyau singulier de Wentzel, et où $\alpha, \sigma, \delta, \sigma^j$ $(2 \leqq j \leqq n)$, β^{ij} $(2 \leqq i,\ j \leqq n)$ sont des fonctions numériques sur ∂M, boréliennes bornées de telle sorte que, pour tout $x \in \partial M$,

$$(2.16)\quad \begin{cases} \alpha(x) \geqq 0,\ \sigma(x) \geqq 0,\ \delta(x) \geqq 0, \quad \beta^{ij}(x) = \beta^{ji}(x) \quad (2 \leqq i,\ j \leqq n) \text{ et} \\ \sum_{i,j=2}^{n} \beta^{i,j}(x)\xi^i\xi^j \geqq 0 \quad \text{pour tout} \quad (\xi^i) \in R^{n-1} \end{cases}$$

$$(2.17)\quad \begin{cases} \text{si} \quad \sigma(x) = \delta(x) = \sigma^j(x) = 0\ (2 \leqq j \leqq n) \quad \text{et} \quad N(x,.) = 0, \text{ alors} \\ \qquad \alpha(x) + 2\sum_{i=2}^{n} \beta^{ii}(x) = 1 \end{cases}$$

β) Pour chaque $u \in C^2(M)$, $x \in E_k$, et $t > 0$, on écrit,

$$(2.18)\quad \begin{cases} \frac{1}{t}(N_t u(x) - u(x)) = -\sigma_t(x)u(x) - \sum_{j=2}^{n} \sigma_t^j(x) \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x) \\ \qquad + \ell_t(x) \int_{M \setminus \{x\}} \tilde{u}(x,y)\, R_t(x,dy)\,, \quad \text{où on a posé,} \end{cases}$$

$$\sigma_t(x) = \frac{1}{t}(1 - N_t(x,M)), \quad \sigma_t^j(x) = -\frac{1}{t}\int_M (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))\, N_t(x,dy)$$

$$\ell_t(x) = \frac{1}{t}\int_M \Big[\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2\Big]\, N_t(x,dy) \quad \text{et,}$$

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{u(y) - u(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x)\,(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))}{\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2} \quad (y \neq x) \quad ;$$

et où $R_t(x,.)$ est la mesure $\geqq 0$, de masse 1 sur M et ne chargeant pas le point x, définie par

$$R_t(x,W) = \frac{1}{t\ell_t(x)} \int_W [x_k^1(y) + \sum_{j=2}^n (x_k^j(y) - x_k^j(x))^2]\, N_t\,(x,dy). \quad (1)$$

On pose, en outre, pour $x \in E_k$, $y \in M\setminus\{x\}$,

$$w(x,y) = \frac{x_k^1(y)}{x_k^1(y) + \sum_{j=2}^n (x_k^j(y) - x_k^j(x))^2}, \text{ et } \xi^{ij}(x,y) = \frac{(x_k^i(y)-x_k^i(x))(x_k^j(y)-x_k^j(x))}{x_k^1(y) + \sum_{j=2}^n (x_k^j(y)-x_k^j(x))^2}$$

$(2 \leqq i,j \leqq n)$; et on note que, $0 \leqq w(x,y) \leqq 1$, $-1 \leqq \xi^{ij}\,(x,y) \leqq 1$,

(2.19) $w(x,y) + \sum_{i=2}^n \xi^{ii}\,(x,y) = 1$, et que la matrice $\xi(x,y) = (\xi^{ij}(x,y))$ est $\geqq 0$.

γ) Désignant alors par $\mathfrak{M}$ l'espace compact des matrices carrées $(n-1)\times(n-1)$ symétriques $\geqq 0$ et à coefficients dans $[-1,1]$, on considère, pour chaque $x \in E_k$, l'injection $\phi_x : y \to (y,w(x,y),\, \xi(x,y))$ de $M\setminus\{x\}$ dans le sous espace compact H de $M \times [0,1] \times \mathfrak{M}$ formé des $h = (y,w,\xi)$ tels que (2.20) $W + \sum_{i=2}^n \xi^{ii} = 1$. La fonction $\tilde{u}(x,\phi_x^{-1}(.))$ sur $\phi_x\,(M\setminus\{x\})$ transportée par ϕ_x de la fonction $\tilde{u}(x,.)$, se prolonge en une fonction continue $\hat{u}(x,.)$ sur l'adhérence H_x de $\phi_x\,(M\setminus\{x\})$ dans H : en effet, en vertu de la formule de Taylor, lorsque $\phi_x(y)$ tend vers le point $h = (x,w,\xi)$ de $H_x\setminus\phi_x(M\setminus\{x\})$, $\tilde{u}(x,y)$ tend vers la limite

(2.21) $$\hat{u}(x,h) = w\,\frac{\partial u}{\partial x_k^1}\,(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^n \xi^{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^i \partial x_k^j}\,(x) \quad (2) .$$

Ceci étant, on pose $\theta_t(x) = \sigma_t(x) + \sum_{j=2}^n |\sigma_t^j(x)| + \ell_t(x)$ $(x \in E_k,\ t > 0)$, $E_k' = \{x | x \in E_k$ et $\liminf_{m\to\infty} \theta_{1/m}\,(x) > 0\}$, et on désigne par $\hat{R}_t(x,.)$ la mesure de Radon $\geqq 0$ sur H image de $R_t(x,.)$ par ϕ_x. Les coefficients de L annoncés en α) peuvent alors être obtenus comme suit :

---

(1) Si $\ell_t(x) = 0$, on pose $R_t(x,.) = \varepsilon_{y_0}$; $(y_0 \in M\setminus\partial M)$.

(2) C'est ici qu'apparaissent le terme transversal $\frac{\partial}{\partial n}$ et l'opérateur B sur ∂M.

Si $x \in E_k \setminus E'_k$, on pose simplement $Lu(x) = Pu(x)$.

Si $x \in E'_k$, extrayant au moyen du Lemme de mesurabilité (2) une suite $(t_p(x))$ telle que $\lim\limits_{p\to\infty} \theta_{t_p(x)}(x) = \theta(x) > 0$, et divisant les deux membres de (2.18) par $\theta_{t_p(x)}(x)$, on obtient une relation de la forme

$$(2.22)\left\{\begin{aligned} &\tilde{\delta}_p(x)\,\frac{1}{t_p(x)}\,(N_{t_p(x)}u(x) - u(x)) = -\,\tilde{\sigma}_p(x)u(x) - \sum_{j=2}^{n} \tilde{\sigma}_p^j(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k^j}\,(x) \\ &\qquad\qquad + \tilde{\ell}_p(x)\int_H \hat{u}(x,h)\,\tilde{R}_p(x,dh), \end{aligned}\right.$$

où les fonctions $\tilde{\delta}_p$, $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\sigma}_p^j$, $\tilde{\ell}_p$ et $x \to \tilde{R}_p(x,.)$ sont <u>boréliennes</u> sur E'_k (cette dernière lorsqu'on munit l'espace compact métrisable $\mathcal{M}^1(H)$ de la tribu borélienne associée à la topologie vague). Il reste alors à appliquer une nouvelle fois le Lemme de mesurabilité (2) aux suites $(\tilde{\delta}_p)$, $(\tilde{\sigma}_p)$, $(\tilde{\sigma}_p^j)$, $(\tilde{\ell}_p)$ et $(\tilde{R}_p)$ à valeurs respectivement dans les espaces compacts métrisables $[0,+\infty]$, $[0,1]$, $[-1,1]$, $[0,1]$ et $\mathcal{M}^1(H)$; puis à répartir la mesure $\tilde{R}(x,.)$ obtenue sur H entre sa partie sur $\phi_x(M\setminus\{x\})$ qui donne $N(x,.)$ par image inverse et normalisation, et sa partie sur $H_x\setminus\phi_x(M\setminus\{x\})$ qui donne les coefficients α et β^{ij} en intégrant la relation (2.21) ; le caractère consistant de l'opérateur obtenu résultant de (2.17), elle-même conséquence de (2.19) et de la définition de H (relation (2.20)). Enfin, pour chaque $u \in C^2(M)$ et $x \in \delta M$ tels que $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(N_t u(x) - u(x)) = Pu(x)$, on obtient la condition frontière $Lu(x)$ par passage à la limite dans (2.22) lorsque $p\to\infty$.

CQFD

<u>Remarque</u> La démonstration précédente subsiste si on substitue à P un opérateur linéaire quelconque de $C^2(M)$ dans $C(M)$; en particulier un de ces opérateurs intégro-différentiels qui constituent les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller sur M dont le domaine de définition contient "suffisamment" de fonctions de classe C^2 (Voir [2] à ce sujet).

---

(2) Voir l'appendice 2.

§3 - Propriété des domaines de résolution définis par certains opérateurs de Wentzel de classe $C^{0,\mu}$.

3.1- Opérateurs de classe $C^{r,\mu}$. Soient r un entier ≥ 0 et $0 < \mu < 1$.
On désigne par $C^{r,\mu}(M)$ (resp $C^{r,\mu}(\partial M)$) l'espace des fonctions de classe C^r sur M (resp ∂M) dont les dérivées d'ordre r (dans chaque carte locale) vérifient une condition de Hölder d'exposant μ, muni de la topologie d'espace de Frechet "Banachisable" associée à l'une quelconque des normes Hölderiennes $\|\ \|_{r,\lambda}$ (1).

On dira que P est de classe $C^{r,\mu}$ s'il applique $C^{r+2,\mu}(M)$ dans $C^{r,\mu}(M)$. Si Γ est un opérateur frontière, on dira que Γ est de classe $C^{r,\mu}$ s'il applique $C^{r+2,\mu}(M)$ dans $C^{r,\mu}(\partial M)$.

3.2- On dira qu'un opérateur de Wentzel Λ de type local est standard, s'il est de la forme,

$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma\gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta\gamma^o Pu \qquad (u \in C^2(M))$, où le champ de vecteurs n sur ∂M (strictement dirigé vers l'extérieur de M, voir en 2.1) est de classe C^1 au moins.

Pour qu'un tel opérateur soit de classe $C^{0,\mu}(0 < \mu < 1)$ (2), il faut et il suffit que σ, B et δ le soient ; en outre, une fois n donné, σ, B et δ sont déterminés de façon unique par le domaine $\underline{U}_\Lambda$ (3).

On dira, par ailleurs, que Λ est non dégénéré, si B est un opérateur fortement elliptique sur ∂M (autrement dit si, avec les notations de 2.1, $\beta_x(w,w) > 0$ pour tout $x \in \partial M$ et $w \in T_x^*(\partial M)$).

---

(1) Voir Miranda [6] p.2 et Ladyzenskaya [4] p. 21.

(2) Voir en 3.1.

(3) Démonstration utilisant un collier de M de façon analogue à celle du lemme 3.6 ci-dessous.

3.3- Un résultat complet pour des opérateurs de Wentzel standards non dégénérés et quasi locaux de classe $C^{0,\mu}$:

THÉORÈME - On suppose donnés un opérateur frontière de Wentzel Λ de type local standard relatif à P, et un opérateur de Wentzel S de type intégral. On suppose que,

(1) Λ est non dégénéré et S quasi local.

(2) Il existe un nombre μ , $0 < \mu < 1$ tel que P et Λ soient de classe $C^{0,\mu}$, et S applique continuement $C^2(M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$.

Alors, si $L = \Lambda + S$, et $\underline{U}_L = \{ u | u \in C^2(M)$ et $Lu = 0\}$,

(a) $\underline{U}_L$ est dense dans $C(M)$.

(b) $\underline{U}_L$ est riche par rapport à P.

(c) P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}_L$.

Sous les conditions de régularité qu'il comporte, ce résultat apparaît comme une réciproque du théorème 2.4. Il entraîne, en vertu du théorème 1.2, l'existence d'un semi-groupe de Feller dont le générateur infinitésimal coïncide avec la fermeture de $(\underline{U}_L, P)$. En voici une démonstration :

3.4- $\underline{U}_L$ est riche par rapport à P :

THÉORÈME - On suppose que (1),

(I) Λ est non dégénéré et les fonctions L1 et P1 ne sont pas toutes deux identiquement nulles.

(II) Λ , S et P sont de classe $C^{0,\mu} (0 < \mu < 1)$, et S est complètement continue de $C^{2,\mu}(M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$.

Alors l'application $u \to (Pu, Lu)$ est un isomorphisme (d'espaces de Frechet) de $C^{2,\mu}(M)$ sur $C^{0,\mu}(M) \times C^{0,\mu}(\partial M)$. (2)

Démonstration - α) L'injectivité de $u \to (Pu, Lu)$ va résulter de

(3.2) $u \in C^2(M)$, $Lu = 0$ et $Pu \geqq 0 \implies u \leqq 0$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $u \in C^2(M)$ est telle que

---

(1) Avec les notations du théorème 3.4.

(2) Pour un résultat du même type (mais avec $S = 0$), dans C^∞ ou L^2, voir Hörmander [3] p.264, Lions [5] p.23, et Visik [8].

$Pu \geqq 0$, $Lu = 0$ et $\operatorname{Sup} u > 0$. Si $x \in M$ est tel que $u(x) = \operatorname{Sup} u$, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de x tel que $u(y) \geqq 0$, donc aussi $P_o u(y) \geqq a(y)\, u(y) \geqq 0$ **pour tout** $y \in \Omega$.(1) Le lemme A1-2(2) appliqué à P_o et Ω entraîne alors que u est constant sur Ω : En effet, si $x \in M \setminus \partial M$, c'est exactement l'alinéa 1) du lemme. Si $x \in \partial M$, cela résulte de l'alinéa 2, car, $u(x) = \operatorname{Sup} u \geqq 0$ entraîne que,

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geqq 0$, $\sigma(x)u(x) - B(\gamma^o u)(x) \geqq 0$, et aussi $Su(x) \geqq 0$ (On le vérifie en tenant compte de la propriété (2.8) de S) ; donc $Pu(x) \geqq 0$ et $Lu(x) = 0$ entraînent que

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sigma(x)u(x) = B(\gamma^o u)(x) = \delta(x)\, Pu(x) = 0$, ce qui contredit l'alinéa 2) du lemme, sauf si u est constante dans Ω.

Ainsi, l'ensemble des $x \in M$ tels que $u(x) = \operatorname{Sup} u$ est ouvert dans M, et, puisqu'il est fermé et M connexe, $u = \text{cte} = \theta$. Mais alors, on devrait avoir $\theta = \operatorname{Sup} u > 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur L1 et P1 et achève d'établir (3.2).

β) Il reste à résoudre, pour $f \in C^{o,\mu}(M)$ et $\phi \in C^{o,\mu}(\partial M)$, le système,

(3.3) $u \in C^{2,\mu}(M)$, $Pu = f$ et $Lu = \phi$.

Pour cela, on désigne par H et G respectivement <u>l'opérateur harmonique et l'opérateur de Green du problème de Dirichlet</u> sur M relatif à P : H applique $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{2,\mu}(M)$, G applique $C^{o,\mu}(M)$ dans $C^{2,\mu}(M)$, et, pour $w \in C^{2,\mu}(M)$ et $g \in C^{o,\mu}(M)$, $PHw = 0$, $\gamma^o Hw = w$, $PGg = -g$ et $\gamma^o Gg = 0$.(3)

Posant, $u = Gf + v$, (3.3) est équivalent à

$$v \in C^{2,\mu}(M),\ Pv = 0 \text{ et } Lv = \phi - LGf.$$

Ainsi, introduisant H, on est ramené à résoudre, pour $\psi \in C^{2,\mu}(\partial M)$;

$$w \in C^{2,\mu}(\partial M),\ - Bw + \frac{\partial}{\partial n} Hw + \sigma w + SHw = \psi.$$

---

(1) $P_o u = Pu - P1.u$

(2) Voir l'appendice 1.

(3) En vertu de la classe $C^{o,\mu}$ de P ; voir Miranda [6] p.128.

On conclut alors en utilisant l'unicité établie en α) et le fait que B, étant elliptique, est un opérateur d'indice 0 de $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$ et que l'hypothèse faite sur S et les propriétés de continuité de H entraînent que $w \to \frac{\partial}{\partial n} Hw + \sigma w + SHw$ est un opérateur complètement continu de $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$.

C.Q.F.D.

3.5- Lemme.[1] P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}_L$.[2]

En effet, soient $u \in C^2(M)$ et $x \in M$ tels que $u(x) = \mathrm{Sup}\, u \geqq 0$, et

(3.4) $Lu(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \sigma(x)u(x) - B(\gamma^0 u)(x) + \delta(x)\, Pu(x) + Su(x) = 0.$

D'abord, si $x \in M \setminus \partial M$, on a $Pu(x) = 0$ d'après le lemme A1.1.

Supposant ensuite que $x \in \partial M$, on remarque que,

(3.5) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geqq 0$, $\sigma(x)\, u(x) - B(\gamma^0 u)(x) \geqq 0$, et $Su(x) \geqq 0$, puisque $u(x) = \mathrm{Sup}\, u \geqq 0$.

Deux cas se présentent alors :

si $\delta(x) > 0$, on obtient $Pu(x) \leqq 0$ en portant (3.5) dans (3.4).

si $\delta(x) = 0$, (3.5) et (3.4) impliquent que

(3.6) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sigma(x)u(x) - B(\gamma^0 u)(x) = Su(x) = 0$; donc, en particulier, que $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$

Ainsi, si (U,χ) est une carte locale de M au voisinage de x, on a $\frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. La formule de Taylor appliquée à u, et le fait que $u(x) = \mathrm{Sup}\, u$, entraînent alors que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x)\, \xi^i \xi^j \leqq 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi = (\xi^i) \in R^n \quad \text{tel que} \quad \xi^1 \geqq 0;$$

donc aussi pour tout $\xi \in R^n$. D'où $Pu(x) \leqq 0$.

C.Q.F.D.

3.6- Lemme. Avec les notations, et sous les hypothèses du théorème 3.4, $\underline{U}_L$ est dense dans $C(M)$.

---

(1) Avec les notations du théorème 3.4.

(2) Λ est seulement supposé standard ; la conclusion subsiste même sous la seule hypothèse que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$.

On va utiliser un <u>collier de M</u> : on nomme ainsi un difféomorphisme $y \to (\eta(y), \phi(y))$ d'un voisinage ouvert W de ∂M dans M sur la variété produit $[0,1[\times\partial M$ tel que,

(3.7) $\eta(x) = 0$ et $\phi(x) = x$ pour tout $x \in \partial M$ et $\eta(y) > 0$ pour tout $y \in W \setminus \partial M$.

Si $u \in C^2(M)$, et $x \in \partial M$, on note $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(x)$ les dérivées de u par rapport à η au point x. On peut alors mettre d'une part l'opérateur frontière $u \to \gamma^o Pu$ sous la forme,

(3.8) $\gamma^o Pu = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + B_1(\gamma^o u) + \theta \frac{\partial u}{\partial \eta} - a\gamma^o u \qquad (u \in C^2(M))$, où,

<u>sur la variété ∂M</u>, ρ et θ sont des fonctions numériques, avec $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$, τ est un champ de vecteurs tangent à ∂M, et B_1 un opérateur du second ordre elliptique ayant les propriétés (2.2) et (2.3) (voir en 2.1) ; tous ces termes étant de classe $C^{o,\mu}$ en même temps que P. Et, d'autre part, l'opérateur L sous la forme,

(3.9) $Lu = -\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sigma\gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta\gamma^o Pu + S(\gamma^o u)$ $(u \in C^2(M))$, où $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$; α étant de classe C^1, et σ, B, δ de classe $C^{o,\mu}$ en même temps que Λ .

Ceci étant, soit $f \in C^2(M)$ et $\varepsilon > 0$; on cherche $u \in C^2(M)$ telle que $Lu = 0$ et $||u - f||_\infty \leq \varepsilon$. <u>Puisque S est quasi local</u>, il suffit pour cela de déterminer $v \in C^2(M)$ tel que,

(3.10) $\qquad Lv = 0$ et $||\gamma^o v - \gamma^o f||_\infty \leq \varepsilon/2$. Ou encore, utilisant le fait que, si $\psi_o \in C^2(\partial M)$, $\psi_1 \in C^1(\partial M)$ et $\psi_2 \in C^o(\partial M)$ il existe $v \in C^2(M)$ tel que $\gamma^o v = \psi_o$, $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi_1$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \psi_2$, ainsi que (3.8) et (3.9), de déterminer $\psi_o \in C^2(\partial M)$, $\psi_1 \in C^1(\partial M)$ et $\psi_2 \in C^o(\partial M)$ de telle sorte que, $||\psi_o - \gamma^o f||_\infty \leq \varepsilon/2$,

$\psi_1 = \frac{1}{\alpha}(-B\psi_o + \sigma\psi_o + S\psi_o)$ et $\psi_2 = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + B_1\psi_o + \theta\psi_1 - a\,\psi_o\right)$.

Or, pour cela, il suffit, en vertu de l'hypothèse de classe $C^{o,\mu}$ de tous les coefficients, de construire $\psi_o \in C^2(\partial M)$ tel que

$$||\psi_o - \gamma^o f||_\infty \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad -B\psi_o + \sigma\psi_o + S\psi_o \in C^1(\partial M).$$

Choisissant alors un nombre λ_2 tel que $0 < \lambda_2 < \mu = \lambda_1$, l'opérateur $\psi \to (\sigma + 1)\psi + S\psi$ est complètement continu de $C^{2,\lambda_i}(\partial M)$ dans $C^{o,\lambda_i}(\partial M)$ d'après l'hypothèse sur S, donc, B étant elliptique (1), l'opérateur $\psi \to - B\psi + (\sigma+1)\psi + S\psi$ est un isomorphisme (d'espaces de Frechet) de $C^{2,\lambda_i}(\partial M)$ dans $C^{o,\lambda_i}(\partial M)(i=1,2)$. Utilisant enfin le fait que $C^{o,\lambda_1}(\partial M)$ et $C^{\infty}(\partial M)$ ont même adhérence dans $C^{o,\lambda_2}(\partial M)$, on en déduit l'existence de la fonction ψ_o cherchée.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE -

[1] L. BERS, F. JOHN, M. SCHECHTER. Partial differential equations. Lectures in appl Math, interscience Publ. N.Y. 1964.

[2] J.M. BONY, Ph. COURREGE, P. PRIOURET. Problèmes aux limites elliptiques et diffusion sur une variété à bord compacte (à paraître).

[3] L. HÖRMANDER. Linear partial differential operators. Springer 1964 (2° ed).

[4] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. OURATZEVA. Equations linéaires et quasi-linéaires de type elliptique. Moscou 1964 (en russe).

[5] J.L. LIONS. Equations différentielles opérationnelles. Springer 1961.

[6] C. MIRANDA. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. Springer 1955.

[7] T. Ueno. The diffusions satisfying Wentzel's boundary condition and the Markov process on the boundary I. Proc Jap Acad 36 (1960) p. 533.

[8] I.M. VISIK. Sur les problèmes aux limites généraux pour les équations différentielles elliptiques. Troudi. Mosk. Mat. obv 1, (1952) p. 187.

[9] A.D. WENTZEL. On lateral conditions for multidimentional diffusion processes. Theory of prob and its appl 4 (1959) p. 172.

(1) Et de classe $C^{o,\mu}$, donc aussi de classe C^{o,λ_2}.

APPENDICE 1 - Deux formes classiques du principe du maximum.

Avec les notations et hypotèses de 0.2, on suppose que $P1 = 0$.

A1.1 Lemme. Si $u \in C^2(M)$, on a $Pu(x) \leq 0$ en tout point $x \in M \setminus \partial M$ en lequel u atteint un maximum relatif.

A1.2 Lemme. Soient Ω un ouvert connexe de M et $u \in C^2(\Omega)$ telle que $Pu(y) \geq 0$ pour tout $y \in \Omega$. Alors

1) Si $x \in M \setminus \partial M$ est tel que $u(x) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, u est constante dans Ω.

2) Si $x \in \partial M$ est tel que $u(x) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, et si (U, χ) est une carte locale de M au voisinage de x ($x \in U \subset \Omega$), ou bien $\frac{\partial u}{\partial \chi^1}(x) < 0$, ou bien u est constante dans Ω.(1)

APPENDICE 2 - Un lemme de mesurabilité.

Lemme. Soient $(X, \underline{X})$ un espace mesurable, K un espace compact métrisable, $\mathscr{E}_K$ sa tribu borélienne et $(\phi_n)_{n \in N}$ une suite d'applications mesurables de $(X, \underline{X})$ dans $(K, \mathscr{E}_K)$.

Alors il existe une application $\sigma : (p, x) \to \sigma_p(x)$ de $N \times X$ dans N telle que,

1) Pour chaque $p \in N$, et $n \in N$, $\{x | x \in X \text{ et } \sigma_p(x) = n\} \in \underline{X}$.

2) Pour chaque $x \in X$, la suite $(\sigma_p(x))_{p \in N}$ est strictement croissante, et

$$\lim_{p \to \infty} \phi_{\sigma_p(x)}(x) \text{ existe dans } K.$$

On construit σ en vérifiant que le procédé diagonal d'extraction de sous suites peut être "rendu mesurable" (ce qui est bien évident vu son caractère purement dénombrable).

---

(1) Pour une démonstration élémentaire, voir [1] p.151.