HERVÉ JACQUET

# La transformation de Radon sur un espace symétrique

*Séminaire N. Bourbaki*, 1966, exp. nº 285, p. 115-127
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__115_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 285

Février 1965

# LA TRANSFORMATION DE RADON SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE

par Hervé JACQUET

(d'après S. HELGASON [3] - [6])

## 1. Introduction et notations.

RADON a démontré en 1917 qu'une fonction différentiable à support compact $f$ sur un espace euclidien est déterminée par son intégrale sur les hyperplans (cf. [7]). En fait, RADON étudiait seulement le cas de la dimension $2$ ou $3$, et c'est JOHN qui a prouvé le résultat suivant (cf. [6]) : Si $\omega$ est un vecteur unitaire, on désigne par $J(\omega , p)$ son intégrale sur l'hyperplan $\{x \in R^n \mid \langle x , \omega\rangle = p\}$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire. Soient $d\omega$ l'élément de surface sur la sphère unité $\Omega = S^{n-1}$ et $\Delta$ le laplacien. Alors :

$$(1) \qquad f(x) = (2\pi i)^{1-n} \Delta_x^{(n-1)/2} \int_\Omega J(\omega , \langle\omega , x\rangle)\, d\omega \qquad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$(2) \qquad f(x) = (2\pi i)^{-n} \Delta_x^{(n-2)/2} \int_\Omega d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dJ(\omega , p)}{p - \langle\omega , x\rangle} \qquad \text{pour } n \text{ pair}$$

(dans la dernière intégrale, on prend la valeur propre au sens de CAUCHY).

Cette transformation de Radon a de nombreuses généralisations en géométrie riemanienne. En particulier, nous étudierons dans cet exposé la situation suivante. Soit $S$ un espace riemanien globalement symétrique de type non compact, et soit $G$ la composante neutre du groupe des isométries de $S$ ; $G$ est donc un groupe semi-simple réel dont le centre est trivial et qui n'admet pas de sous-groupe invariant compact non trivial. En particulier, on peut identifier $G$ à son groupe adjoint et les sous-groupes unipotents maximaux de ce groupe linéaire sont, comme on sait, tous conjugués. Leurs orbites dans $S$ sont les <u>horocycles</u>. Comme on va le voir, $G$ opère transitivement sur l'espace des horocycles, espace que nous noterons $\hat{S}$. De plus, chaque horocycle est une sous-variété fermée de l'espace $S$. La transformée de Radon d'une fonction différentiable $f$ à support compact sur $S$ est définie par intégration sur chaque horocycle par rapport à l'élément de volume induit par la structure riemanienne.

Soit $G = KAN$ une décomposition d'Ivasawa de $G$. Donc $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$, $A$ un sous-groupe abélien et $N$ un sous-groupe unipotent maximal. Alors $S$ s'identifie canoniquement à l'espace homogène $G/K$ . De même $\hat{S}$ s'identifie, comme nous le prouverons, à l'espace homogène $G/MN$ , où $M$ désigne le centralisateur de $A$ dans $K$ .

Enfin nous donnerons, du moins dans le cas où $G$ admet une structure complexe, une formule d'inversion permettant de calculer $f$ en fonction de sa transformée de Radon. Bien entendu, une telle formule existe dans le cas général, mais elle est plus compliquée, et on obtient des résultats plus simples en se limitant à des fonctions invariantes par $K$ .

Introduisons maintenant quelques notations supplémentaires. Soient $\mathfrak{g}$ , $\mathfrak{k}$ , $\mathfrak{a}$ , $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie respectives de $G$ , $K$ , $A$ , $N$ . Soit $\mathfrak{p}$ l'orthogonale de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing $B$ de $\mathfrak{g}$ . L'algèbre $\mathfrak{a}$ est donc une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$ . Nous désignerons par $\Sigma$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{a}$ , et, pour chaque $\lambda \in \Sigma$ , par $\mathfrak{g}_\lambda$ l'espace des $X \in \mathfrak{g}$ tels que : $[H , X] = \lambda(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$ . Soit $d_\lambda$ la dimension de $\mathfrak{g}_\lambda$ . On choisit un ordre sur les racines de telle façon que si $\Sigma_+$ est l'ensemble des racines positives

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} \mathfrak{g}_\lambda .$$

On pose

$$\rho = \sum_{\lambda\in\Sigma_+} d_\lambda \lambda .$$

Si $\alpha$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ , on note $e^\alpha$ le caractère de $A$ tel que :

$$e^\alpha(\exp H) = \exp \alpha(H) \qquad (H \in \mathfrak{a}) .$$

On note $\underset{\sim}{D}(G)$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur $G$ , $\underset{\sim}{D}_o(G)$ la sous-algèbre des opérateurs différentiels qui sont de plus invariants à droite par $K$ , $\underset{\sim}{D}(G/K)$ , ou simplement $\underset{\sim}{D}(S)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $S$ qui sont invariants par le groupe $G$ . Rappellons que $\underset{\sim}{D}(G)$ s'identifie à l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $\underset{\sim}{D}_o(G)$ au centralisateur de $K$ dans cette même algèbre.

## 2. L'espace des horocycles.

Nous noterons $0$ la classe de $e$ dans $S = G/K$ et, pour tout $g$ dans $G$ , par $x \mapsto g.x$ la translation correspondante dans $S = G/K$ . Avec ces notations, un horocycle est un sous-ensemble de $S$ de la forme

$$(gNg^{-1} h).0 \qquad (g , h \text{ dans } G) .$$

THÉORÈME 1. - Le groupe $G$ opère transitivement sur l'espace des horocycles $\hat{S}$, et le stabilisateur de l'horocycle canonique $N.0$ est le sous-groupe $MN$.

En effet, soient $g$ et $h$ deux éléments de $G$. Posons $h^{-1} g = kan$. Nous avons alors

$$gNg^{-1} h = h(h^{-1} g)Ng^{-1} h = h(kanNn^{-1} a^{-1} k^{-1}) = h(kNk^{-1}) .$$

D'où dans l'espace homogène $S$ :

$$(gNg^{-1} h).0 = hk.(N.0) .$$

Cela prouve la première assertion.

Prouvons la seconde. Il est clair que $N$ laisse stable l'horocycle canonique. D'autre part, si $m$ est dans $M$, $m$ est un élément de $K$ qui normalise $N$. D'où

$$mN.0 = (mNm^{-1}).0 = N.0 .$$

En sens inverse, soit $g = kan$ un élément de $G$ qui laisse stable $N.0$. En particulier, le point $0$ est dans $gN.0$. Cela prouve l'existence d'un $k'$ dans $K$, et d'un $n'$ dans $N$, tels que $kann' = k'$. Vu l'unicité de la décomposition d'Ivasawa, on a $a = e$. Il suffit maintenant de prouver que $k$ est dans $M$. La relation $kN.0 = N.0$ donne $\mathrm{ad}k\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{k}$. Si l'on munit $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ de la forme quadratique positive non dégénérée transportée de la forme de Killing par l'isomorphisme $\mathfrak{p} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ les images de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ sont orthogonales dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. D'où

$$\mathrm{ad}k\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{k} .$$

Cela s'écrit encore $\mathrm{ad}k^{-1} \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$. Mais comme $\mathrm{ad}k^{-1} \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, il vient enfin

$$\mathrm{ad}k^{-1} \mathfrak{a} = \mathfrak{a} .$$

Ainsi $k$ est dans le normalisateur de $A$ dans $K$ ; s'il n'est pas dans le centralisateur, il représente un élément du groupe de Weyl qui n'est pas trivial, et en particulier change une racine positive en une racine négative. Désignons par $N'$ le sous-groupe unipotent engendré par les $\mathfrak{g}_\lambda$ où $\lambda$ décrit les racines négatives on voit que

$$kNk^{-1} \cap N' \neq \{e\}$$

ou encore

$$NN' \cap K \neq \{e\} ,$$

puisque $kNk^{-1} \subset NK$ par hypothèse. Or ceci entrainerait une contradiction avec le lemme suivant :

LEMME 1. - On a $NN' \cap K = \{e\}$.

Prouvons donc ce lemme. On peut supposer $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ et la décomposition d'Ivasawa de $G$ "bien placée" par rapport à celle de $GL(n, \mathbb{R})$. Il suffit donc de prouver l'assertion suivante : Soient $n$ une matrice trigonale stricte inférieure, et $n'$ une matrice trigonale stricte supérieure, telles que leur produit $k = nn'$ soit une matrice orthogonale ; alors $n = n' = k = e$. On a d'abord $k_{11} = 1$ ; d'où $k_{1j} = 0$ pour $j \neq 1$, la matrice étant orthogonale. Ceci implique $n_{1j} = 0$ pour $j > 1$. Alors $k_{22} = 1$. A nouveau ceci implique $k_{2j} = 0$ pour $j \neq 2$ et $n_{2j} = 0$ pour $j > 2$. De proche en proche, on obtient le résultat cherché.

L'horocycle canonique est évidemment une sous-variété fermée de $S$. En vertu du théorème précédent, il en est de même des autres horocycles.

D'autre part, le même théorème montre que l'on peut identifier $\hat{S}$ à l'espace homogène $G/MN$. Comme $MN$ est un sous-groupe fermé dans $G$, l'espace des horocycles est ainsi muni d'une structure de variété pour laquelle $G$ opère différentiablement.

On va donner une autre description de $\hat{S}$. Pour cela, on observe que la classe de $ka$ dans $G/MN$ ne dépend que de $a$ et de la classe de $k$ dans $K/M$. En effet, si

$$ka = k'a'mn \quad (k, k' \in K \; ; \quad a, a' \in A \; ; \quad m \in M \; ; \quad n \in N),$$

on a aussi

$$ka = (k'm)a'n$$

et vu l'unicité de la décomposition d'Ivasawa, ceci entraîne

$$k = k'm \quad \text{et} \quad a = a' .$$

En d'autres termes, l'application

$$(kM, a) \mapsto ka(N.0)$$

est une application bijective de $K/M \times A$ dans $\hat{S}$. Elle est bien entendu différentiable, et son application linéaire tangente est en tout point bijective. C'est donc un isomorphisme de variétés, et $\hat{S}$ apparaît comme un fibré de base $G/K$ et de fibre $A$.

Donnons maintenant une description de l'espace des orbites de $MN$ dans $\hat{S} = G/MN$, c'est-à-dire de l'espace des doubles classes $MN\backslash G/MN$. Soit $M'$ le normalisateur de $A$ dans $K$ et $W = M'/M$ le groupe de Weyl de $G$ par rapport à $A$. On sait déjà (BRUHAT - HARISH-CHANDRA) que l'espace des doubles classes $MNA\backslash G/MNA$ s'identifie au groupe de Weyl $W$. De façon plus précise, tout élément de $G$ s'écrit :

$$g = m_1\, n_1\, a_1\, m_w\, a_2\, n_2\, m_2 \qquad (m_1\,,\, m_2 \in M\,;\quad n_1\,,\, n_2 \in N\,;\quad a_1\,;\, a_2 \in A)$$

où $m_w$ est un élément de $M'$ dont la classe modulo $M$ est bien déterminée par la classe de $g$ dans $MAN\backslash G/MAN$. On peut d'ailleurs écrire aussi bien :

$$g = m_1\, n_1\, m_w\, an_2\, m_2\ .$$

Nous allons voir que $a$ est lui-même bien déterminé par la classe de $g$. Cela montrera le théorème 2.

THÉORÈME 2. - <u>L'espace des doubles classes</u> $MN\backslash G/MN$ <u>s'identifie à</u> $A \times W$.

Remarquons que tout élément de $G$ s'écrit

$$g = n_1\, m_w\, an_2\, m_2\ .$$

Tout revient donc à prouver que la relation

$$m_w\, a = n_1\, m_w\, a'n_2\, m$$

entraîne $a = a'$. Or cette relation s'écrit encore

$$a = n'a'n_2\, m$$

où $n'$ est l'élément $m_w^{-1}\, n_1\, m_w$ du groupe unipotent $N_w = m_w^{-1}\, Nm_w$. Le théorème est donc une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 2. - <u>On a</u>

$$(NN_w) \cap (MA) = \{e\}\ .$$

Désignons par $\theta$ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ :

$$\theta(X + Y) = X - Y \qquad (X \in \mathfrak{k}\ ;\quad Y \in \mathfrak{p})\ ,$$

et notons encore $\theta$ l'automorphisme de $G$ correspondant. Il suffit de démontrer le lemme lorsque $N_w$ est le groupe unipotent $N' = \theta(N)$, car dans le cas général $N_w \subset NN'$.

Soient donc $n_1$, $n_2$ des éléments de $N$ tels que :

(3) $$n_1\, \theta(n_2) = ma \quad \text{où} \quad m \in M \quad \text{et} \quad a \in A\ .$$

Appliquons $\theta$ en tenant compte de $ma = am$. Il vient :

$$\theta(n_1)n_2\, n_1\, \theta(n_2) = m^2\ .$$

Mais $m$ normalise $N'$ de sorte que le lemme 1 nous donne $m^2 = e$ et $n_2\, n_1 = e$. Soit $b \in A$ tel que $b^2 = a$. Puisque $m$ et $b$ commutent, la relation (3) nous donne :

$$b^{-1} n_1 \theta(n_1^{-1}) b^{-1} = m$$

ou encore

$$s\theta(s^{-1}) = m$$

en posant $s = b^{-1} n_1$ .

Ecrivons $s = \exp X.k$ , où $X \in p$ et $k \in K$ . On a donc $m = \exp 2X$ . D'où $m = e$ . Ainsi $n_1\, \theta(n_2)$ est dans $A$ . À nouveau on peut supposer $G \subset GL(n\ ,\ \underset{\sim}{R})$ , et la décomposition d'Ivasawa de $G$ bien placée par rapport à celle de $GL(n\ ,\ \underset{\sim}{R})$ . On obtient alors aussitôt $n_1 = n_2 = e$ . D'où le lemme.

## 3. Opérateurs différentiels invariants sur l'espace des horocycles.

Nous noterons $\underset{\sim}{D}(G/MN)$ , ou simplement $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ , l'espace des opérateurs différentiels sur $\hat{S} = G/MN$ qui sont invariants par $G$ . Considérons $\hat{S}$ comme un fibré de base $K/M$ et de fibre $A$ . Les opérations de $G$ dans ce fibré sont compatibles avec la fibration. Soit en effet $kaN.0$ $(a \in A)$ une fibre. Faisons opérer un élément $g$ de $G$ . Il vient :

$$g(kaN.0) = (k_1 . a_1\ a)N.0 \quad \text{où} \quad gk = k_1\ a_1\ n_1\ .$$

Ainsi $g$ transforme l'élément $(k\ ,\ a)$ de la fibre $\{k\} \times A$ en l'élément $(k_1\ ,\ a_1\ a)$ de la fibre $\{k_1\} \times A$ .

Ceci donne un moyen de construire des éléments de $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ . Soit $D \in \underset{\sim}{S}(\alpha)$ un opérateur différentiel sur $A$ , et notons $D_A$ l'opérateur différentiel sur $K/M \times A$ défini par

$$(D_A\ f)(kM\ ,\ a) = (Df_{kM})(a) \qquad \text{où} \quad f_{kM}(a) = f(kM\ ,\ a)\ .$$

Transportons ensuite cet opérateur différentiel sur $\hat{S}$ par l'isomorphisme précédent. Il est clair que l'opérateur $D'$ ainsi construit est dans $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ .

THÉORÈME 3. - L'application $D \longrightarrow D'$ est un isomorphisme de l'algèbre $S(\alpha)$ sur l'algèbre $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ . En particulier, l'algèbre $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ est commutative.

Si l'espace homogène $\hat{S}$ était réductif, on pourrait déterminer les éléments de $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ en fonction des invariants du groupe $MN$ dans l'algèbre symétrique de l'espace tangent en $0$ à $\hat{S}$ . (Il en est bien ainsi pour l'espace homogène $S = G/K$ ) (cf. [3]). Bien que $G/MN$ ne soit pas réductif en général, nous allons voir que l'on peut calculer $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ en fonction de ces invariants.

Introduisons l'orthogonale $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing. On a donc une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe :

$$g = (\mathfrak{l} + \mathfrak{a}) + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) .$$

Désignons par $\sigma$ la projection correspondante de $g$ sur $\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$. Le groupe MN opère sur l'espace tangent $T(\hat{S}, 0) = g/\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. L'application canonique de $\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$ sur $g/\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ est bijective et transforme l'action d'un élément $h$ du groupe MN en l'application

$$\sigma \circ \mathrm{Adh} : \mathfrak{l} + \mathfrak{a} \to \mathfrak{l} + \mathfrak{a} .$$

Ainsi MN opère sur $\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$ et la détermination des invariants de MN dans l'algèbre symétrique de $T(\hat{S}, 0)$ se ramène à celle des invariants de MN dans $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l} + \mathfrak{a})$. De façon précise, on a le résultat suivant :

LEMME 3. - L'algèbre des invariants de MN dans $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l} + \mathfrak{a})$ est égale à $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$.

Avant de donner la démonstration de ce lemme, montrons comment il entraîne le théorème. Soit $u$ l'application de $\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$ dans $\hat{S}$ qui est composée de l'application exponentielle et de l'application canonique de $G$ sur $\hat{S} = G/MN$. C'est un isomorphisme au voisinage de $0$. En particulier si $Q$ est un opérateur différentiel sur $\hat{S}$, il existe un élément $\overline{Q}$ de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l} + \mathfrak{a})$, et un seul, tel que

$$\overline{Q}(f \circ u)(0) = (Qf)(0)$$

pour toute fonction $f$ différentiable au voisinage de l'origine dans $\hat{S}$. Si en particulier, $Q$ est invariant par $G$, il est a fortiori invariant par MN, et cela entraîne que la partie homogène de plus haut degré $P_Q$ de $\overline{Q}$ est un élément de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l} + \mathfrak{a})$ invariant par MN donc un élément de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$ d'après le lemme.

D'autre part, l'opérateur $D'$ que nous avons associé à tout élément $D$ de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$ vérifie évidemment

$$D(f \circ u)(0) = (D'f)(0) .$$

Par récurrence sur le degré, on en déduit aussitôt que tout élément de $\underset{\sim}{D}(\hat{S})$ est de la forme $D'$ pour un $D \in \underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$ qui est évidemment unique. D'où le théorème.

Prouvons maintenant le lemme. Comme $M$ centralise $A$, il est clair que tout élément de $M$ induit l'identité sur $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$. D'autre part, si $n \in N$, on a, pour tout $H \in \mathfrak{a}$ :

$$\mathrm{Adn}(H) = H \pmod{\mathfrak{n}} .$$

D'où

$$\sigma \circ \mathrm{Adn}(H) = H .$$

Ainsi $\mathfrak{n}$ induit l'identité sur $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$.

Pour démontrer la réciproque, il est plus commode de chercher les invariants de MN dans $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c)$. Le prolongement de $\sigma$ à $g_c$ est une application de $g_c$

dans $\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c$ que nous noterons encore $\sigma$. Pour $X \in \mathfrak{m}_c + \mathfrak{n}_c$, nous noterons $d(X)$ la dérivation de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c)$ qui prolonge l'application linéaire $\sigma \circ \mathrm{ad}X$ de $\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c$ dans lui-même. C'est l'action infinitésimale correspondant à l'action du groupe $MN$. En particulier, un élément $Y$ de $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c)$, qui est invariant par $MN$, est annulé par $d(X)$. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui soit invariante par l'involution de Cartan et dont la trace sur l'espace $\mathfrak{p}$ soit égale à $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{h}_c$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_c$. Désignons par $\Delta$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_c$ par rapport à $\mathfrak{h}_c$, par $\Delta_+$ l'ensemble des racines positives, par $P_+$ l'ensemble des racines positives dont la restriction à $\mathfrak{a}$ est non nulle. On choisit bien entendu l'ordre sur les racines de façon que $\Sigma_+$ soit l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}$ des éléments de $P_+$.

Pour $\alpha \in \Delta$, soit $\alpha^\theta \in \Delta$ telle que $\alpha^\theta(H) = \alpha(\theta H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_c$. On sait que $\alpha \longmapsto -\alpha^\theta$ est une bijection de $P_+$ sur lui-même et que

$$\mathfrak{l}_c = \sum_{\alpha \in P_+} \underset{\sim}{C}(X_\alpha + \theta X_\alpha) \, , \qquad \mathfrak{n}_c = \sum_{\alpha \in P_+} (\underset{\sim}{C}X_\alpha + \underset{\sim}{C}X_{-\alpha}) \, .$$

Pour $\alpha$ dans $P_+$, posons $E_\alpha = X_\alpha + \theta(X_\alpha)$. Si $\beta$ est aussi dans $P_+$, on a

$$d(X_\beta)(E_\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \beta > -\alpha^\theta$$
$$d(X_\beta)(E_\alpha) = H \, , \text{ où } H \in \mathfrak{a}_c \, , \; H \neq 0 \, , \text{ si } \beta = -\alpha^\theta \, .$$

Un calcul facile montre alors que les relations

$$d(X_\beta)p = 0 \qquad (p \in \underset{\sim}{S}(\mathfrak{l}_c + \mathfrak{a}_c) \, , \quad \beta \in P_+)$$

entraînent $p \in \underset{\sim}{S}(\mathfrak{a}_c)$. D'où le lemme.

## 4. La transformation de Radon.

Soient $H$ un horocycle dans $S$ et $ds_H$ l'élément de volume induit sur $H$ par la structure riemanienne de $S$. Pour $f \in \mathcal{D}(S)$, on pose

(4) $$\hat{f}(H) = \int_H f(x) \, ds_H \qquad H \in \hat{S} \, .$$

La fonction $\hat{f}$ est la transformée de Radon de $f$. Il sera plus commode d'exprimer (4) en termes de fonctions sur $G$. Soient

$$\pi : \; G \to G/K \, , \qquad \hat{\pi} : \; G \to G/MN$$

les applications canoniques et soient

(5) $$F = f \circ \pi \, , \qquad \hat{F} = \hat{f} \circ \hat{\pi} \quad (f \in \mathcal{D}(S)) \, .$$

L'application $n \longmapsto n.0$ de $N$ sur l'horocycle canonique $H_0 = N.0$ transforme la mesure de Haar $dn$ en la mesure $ds_H$ (du moins si l'on choisit convenablement la mesure de Haar sur $N$ ). On a donc

$$\hat{F}(g) = \int_N F(gn)\, dn .$$

Il est clair que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(S)$ dans $\mathcal{D}(\hat{S})$ .

Pour tout $D \in \underset{\sim}{D}(G)$ , il existe un élément unique $D_\alpha \in \underset{\sim}{S}(\alpha)$ tel que

$$D - D_\alpha \in \mathfrak{n}\underset{\sim}{D}(G) + \underset{\sim}{D}(G)\mathfrak{k} .$$

Si l'on désigne par $v$ l'automorphisme de $\underset{\sim}{S}(\alpha)$ , tel que $v(H) = H + \rho(H)$ pour $H \in \alpha$ , on sait que

$$D \mapsto v(D_\alpha)$$

est une application de $\underset{\sim}{D}_o(G)$ sur l'algèbre $\underset{\sim}{I}(\alpha)$ des invariants de $W$ dans $\underset{\sim}{S}(\alpha)$ . Son noyau est $D_o(G) \cap D(G)\mathfrak{k}$ .

D'autre part, on sait que l'algèbre $D_o(G)/D_o(G) \cap D(G)\mathfrak{k}$ est canoniquement isomorphe à $\underset{\sim}{D}(S)$ . Finalement, on a un isomorphisme

$$\Gamma : \underset{\sim}{D}(S) \to \underset{\sim}{I}(\alpha)$$

et aussi d'après le § 3 un isomorphisme

$$\hat{\Gamma} : \underset{\sim}{D}(\hat{S}) \to \underset{\sim}{S}(\alpha) .$$

Pour chaque $D$ dans $\underset{\sim}{D}(S)$ , on note $\hat{D}$ l'élément de $\underset{\sim}{S}(\alpha)$ tel que

$$\hat{\Gamma}(\hat{D}) = v(\Gamma(D)) .$$

THÉORÈME 4. - <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{D}(S)$ <u>et tout</u> $D \in \underset{\sim}{D}(S)$ , <u>on a</u>

$$(Df)^\wedge = \hat{D}\hat{f} .$$

C'est un calcul immédiat à partir des deux remarques suivantes :

Si $\Phi$ est une fonction différentiable sur $G$ telle que $\Phi(ngk) = \Phi(g)$ pour tout $n \in N$ , $g \in G$ , $k \in K$ , alors

$$(D\Phi)^- = D_\alpha(\bar{\Phi}) \qquad D \in \underset{\sim}{D}(G) ,$$

la barre dénotant la restriction à $A$ (cf. [2], p. 247, et [5], p. 681).

Si $\varphi$ est une fonction différentiable sur $A$ ,

$$v(D)\varphi = e^{-\rho} D(e^\rho \varphi) \qquad D \in \underset{\sim}{S}(\alpha) .$$

5. La formule d'inversion dans le cas complexe.

On peut introduire une transformation duale de la transformation de Radon. Pour chaque $\psi \in \mathcal{D}(\hat{S})$ , soit $\check{\psi}$ la fonction sur $S$ donnée par

$$\check{\psi}(g.0) = \int_K \psi(gk.H_o)\, dk \ .$$

D'une manière imagée, on peut dire que la valeur de $\check{\psi}$ au point $p$ de $S$ s'obtient en intégrant $\psi$ sur l'ensemble compact des horocycles passant par $p$ .

Pour $f \in \mathcal{D}(S)$ , soit $I_f = (\hat{f})^{\vee}$ . Le problème est de donner une formule permettant de calculer $f$ en fonction de $I_f$ . Traduisons là encore les formules en termes de fonction sur $G$ . Posons

$$F = f \circ \pi \ , \qquad I_F = I_f \circ \pi \ .$$

Il vient

$$I_F(g) = \int_K \int_N F(gkn)\, dn\, dk \ .$$

Pour toute racine $\alpha \in \Sigma$ , soit $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que

$$B(H_\alpha , H) = \alpha(H) \qquad (H \in \mathfrak{a}) \ .$$

Soit $\xi = \prod H_\alpha$ où le produit est étendu à toutes les racines positives qui ne sont pas multiples entiers d'une autre racine positive. Alors le tranformé de $\xi$ par tout élément du groupe de Weyl est $\xi$ ou $-\xi$ . Par conséquent, $\xi^2$ est en tout cas un élément de l'algèbre $\underset{\sim}{I}(\mathfrak{a})$ des invariants de $W$ dans $\underset{\sim}{S}(\mathfrak{a})$ . Il lui correspond donc un élément $\Xi$ de $\underset{\sim}{D}(G/K)$ .

THÉORÈME 5. - Si $G$ admet une structure complexe, il existe une constante $c$ , non nulle, telle que

(6) $$\Xi I_f = cf \ , \qquad f \in \mathcal{D}(S) \ .$$

Nous allons d'abord transformer quelque peu la formule. Pour $x \in G$ , notons $M_x$ l'application de $\mathcal{D}(G/K)$ dans lui-même donnée par

$$M_x(f)(g.0) = \int_K f(gkx.0)\, dk \qquad (f \in \mathcal{D}(G/K)) \ .$$

Le lemme suivant est bien connu (cf. [3]).

LEMME 4. - Tout $D \in \underset{\sim}{D}(G/K)$ commute à tout opérateur $M_x$ :

$$M_x(D(f)) = D(M_x(f)) \qquad (x \in G \ , \ D \in \underset{\sim}{D}(G/K) \ , \ f \in \mathcal{D}(G/K)) \ .$$

Appliquons ceci au calcul de $I_f$ . On a

$$I_f(g.0) = \int_N \int_K f(gkn.0)\, dk\, dn \ .$$

Cela s'écrit encore

$$I_f = \int_N M_n(f)\, dn \qquad \text{(intégrale vectorielle dans l'espace } \mathcal{D}(G/K)\text{ ).}$$

Alors

$$\Xi I_f = \int_N \Xi(M_n(f))\, dn = \int_N M_n(\Xi f)\, dn \, .$$

La formule à démontrer s'écrit donc :

$$(7) \qquad \int_K \int_N (\Xi f)(gkn.0)\, dk\, dn = cf(g) \, .$$

Bien entendu il suffit de démontrer cette relation à l'origine, i. e. pour $g = e$. On obtiendra la relation dans le cas général en appliquant la formule aux translatées de $f$. Tout revient donc à prouver la relation

$$(8) \qquad \int_K \int_N (\Xi f)(kn.0)\, dk\, dn = cf(e) \qquad (f \in \mathcal{D}(G/K)) \, .$$

Traduisons une fois de plus les relations en termes de fonctions sur $G$. Posons $F = f \circ \pi$ et choisissons un $\Xi' \in D(G)$ qui relève $\Xi$. On a donc

$$\Xi' F = (\Xi f) \circ \pi \quad \text{et} \quad v(\Xi'_a) = \xi^2 \qquad \text{(cf. § 3).}$$

La formule (8) devient

$$(9) \qquad \int_K \int_N (\Xi' F)(kn)\, dk\, dn = cF(e)$$

où $F \in \mathcal{D}(G)$ et est invariante par $K$ à droite. Posons

$$(10) \qquad F_1(g) = \int_K \int_N F(kng)\, dk\, dn \, .$$

Permuttant encore une fois différentiation et intégration, on voit que (10) s'écrit enfin

$$\Xi' F_1(e) = cF(e) \, .$$

Mais $F_1(ngk) = F_1(g)$ pour $n \in N$, $g \in G$, $k \in K$. D'où (cf. § 3).

$$(\Xi' F_1)^{-} = e^{\rho}\, \xi^2 (e^{-\rho}\, \overline{F}_1)$$

où la barre dénote encore la restriction des fonctions à $A$. Finalement, on est ramené au lemme suivant :

LEMME 5. - <u>Pour toute fonction</u> $F \in \mathcal{D}(G)$ <u>et invariante à droite par</u> $K$, <u>on désigne par</u> $\Phi_F$ <u>la fonction sur</u> $A$, <u>définie par</u>

$$\Phi_F(a) = e^{-\rho}(a) \int_K \int_N F(kna)\, dk\, dn \, .$$

<u>Alors il existe une constante</u> $c \neq 0$ <u>telle que</u>

$$F(e) = c(\xi^2\, \Phi_F)(e) \, .$$

Ce lemme est un cas particulier d'un résultat plus général que nous allons énoncer. Ce résultat est bien connu, et constitue une étape essentielle dans la démonstration de la formule de Plancherel sur un groupe semi-simple complexe (cf. [1], p. 514).

Introduisons quelques notations supplémentaires. L'algèbre $\mathfrak{g}$ admet par hypothèse une structure complexe et nous noterons $X \mapsto iX$ la multiplication correspondante par $i$ . Alors l'algèbre $\mathfrak{k}$ est une forme compacte de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ , et $\mathfrak{p} = i\mathfrak{k}$ . L'algèbre complexe abélienne $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ . Notons $\Sigma'$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ . Tout $\alpha \in \Sigma'$ a une restriction $\bar{\alpha}$ non nulle à $\mathfrak{a}$ , et $\Sigma$ est l'ensemble des restrictions $\bar{\alpha}$ des $\alpha \in \Sigma'$ . La forme de Killing $B'$ de l'algèbre complexe est reliée à la forme de Killing de l'algèbre réelle sous-jacente par $B = 2\mathrm{Re}\, B'$ . En particulier, si $H'$ est l'élément de $\mathfrak{h}$ tel que

$$B'(H'_\alpha , H) = \alpha(H) \qquad (H \in \mathfrak{h}) ,$$

on a $H'_\alpha = 2H_{\bar{\alpha}}$ . De là résulte que l'on peut ordonner les racines $\Sigma'$ de façon que tout $\alpha \in \Sigma'_+$ se restreigne en une racine positive $\bar{\alpha} \in \Sigma_+$ . De plus, pour $\alpha \in \Sigma'$ , soit

$$\mathfrak{g}'_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X , \quad H \in \mathfrak{h}\} .$$

Alors $\mathfrak{g}'_\alpha$ est un sous-espace complexe de $\mathfrak{g}$ de dimension $1$ et le sous-espace réel sous-jacent est justement $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ . Ainsi toute racine $\beta \in \Sigma$ est de multiplicité $2$ . En particulier, si

$$\rho' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma'_+} \alpha ,$$

on a

$$\rho(H_1) = \rho'(H) + \overline{\rho'(H)} \qquad (H = H_1 + iH_2 , \ H_1 , H_2 \in \mathfrak{a}) .$$

Introduisons enfin dans l'espace euclidien réel $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ les opérateurs différentiels à coefficients réels

$$D_\alpha = \frac{1}{2}(H'_\alpha - iH'_\alpha) , \qquad \overline{D}_\alpha = \frac{1}{2}(H'_\alpha + iH'_\alpha) \qquad (\alpha \in \Sigma'_+) .$$

On a alors le résultat suivant :

LEMME 6. - *Pour tout* $F \in \mathcal{D}(G)$ , *soit* $\Psi_F$ *la fonction différentiable sur l'espace euclidien* $\mathfrak{h}$ *définie par*

$$\Psi_F(H) = \exp(- (\rho'(H) + \overline{\rho'(H)})) \int_K \int_N F(kn \exp Hk^{-1}) \, dk \, dn .$$

*Alors il existe une constante* $c_1 \neq 0$ *telle que*

$$F(e) = c_1 \Big( \prod_{\alpha \in \Sigma'_+} D_\alpha \overline{D}_\alpha \Psi_F \Big)(0) .$$

Si on applique cette formule à une fonction invariante à droite par $K$ , on voit que $\Psi_F(H + iH') = \Psi_F(H)$ pour $H$ , $H' \in \alpha$ . D'autre part, la restriction de $\Psi_F$ à $\alpha$ est égale à $\Phi_F$ . On en déduit enfin que sur $\alpha$

$$(\xi^2 \Phi_F) \circ \exp = 2^p \prod_{\alpha \in \Sigma'_+} D_\alpha \overline{D}_\alpha \Psi_F \ .$$

D'où le lemme 5, avec $c = 2^{-p} c_1$ , où $p$ est le nombre d'éléments de $\Sigma'_+$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] HARISH-CHANDRA. - The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 485-528.

[2] HARISH-CHANDRA. - Spherical functions on a semisimple Lie group, I, II, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 241-310 et p. 553-613.

[3] HELGASON (Sigurdur). - Differential geometry and symmetric spaces. - New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics ..., 12).

[4] HELGASON (Sigurdur). - A duality in integral geometry ; some generalizations of the Radon transform, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 435-446.

[5] HELGASON (Sigurdur). - Duality and Radon transform for symmetric spaces, Amer. J. of Math., t. 85, 1963, p. 667-692.

[6] JOHN (Fritz). - Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. - New York, Interscience Publishers, 1955 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 2).

[7] RADON (Johann). - Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Berichte Verhandl. königl. Sächs. Gesellsch. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl., t. 69, 1917, p. 262-277.