André Weil

Modules des surfaces de Riemann

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 168, p. 413-419

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__413_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

MODULES DES SURFACES DE RIEMANN

par André WEIL

Par la combinaison des idées (récentes) de KODAIRA et SPENCER sur la variation des structures complexes avec les idées (anciennes) de TEICHMÜLLER sur le problème des modules, la théorie a fait dernièrement quelques progrès qu'on se propose d'exposer ici.

Soit T_o une surface orientée compacte de genre g, donnée une fois pour toutes. Par une surface de Riemann de genre g, on entend, comme d'habitude, une variété complexe compacte de dimension complexe 1, de genre g, munie de son orientation naturelle. Par une surface de Teichmüller de genre g, on entendra une surface de Riemann S de genre g, munie de plus d'une classe (au sens de l'homotopie) d'applications de T_o dans S, classe dont on suppose qu'elle contient au moins un homéomorphisme conservant l'orientation ; c'est là une structure (plus "riche" que celle de structure de surface de Riemann). Si π^o désigne le groupe fondamental de T_o (pour une origine a_o choisie une fois pour toutes) et $\pi(S, a)$ celui de S (pour une origine $a \in S$), la donnée d'une structure de Teichmüller sur S détermine une classe d'isomorphismes de π^o sur $\pi(S, a)$, ne différant les uns des autres que par des automorphismes intérieurs ; par un abus de langage évident, on peut omettre la donnée de a, et dire que la structure de Teichmüller sur S est définie (en plus de la structure de surface de Riemann de S) par la donnée d'une telle classe d'isomorphismes de π^o sur $\pi(S)$. Si on choisit une fois pour toutes $2g$ générateurs A_i^o de π^o (satisfaisant, pour fixer les idées, à la relation bien connue), il revient au même de se donner leurs images dans $\pi(S)$, images qui doivent en tout cas satisfaire à la même relation et aussi à une condition imposée par la conservation de l'orientation (il résulte d'un théorème de Dehn que ce sont là les seules conditions auxquelles elles doivent satisfaire).

TEICHMÜLLER a montré, d'abord heuristiquement, puis (paraît-il) rigoureusement, qu'on peut définir un espace topologique, homéomorphe à une boule ouverte de dimension $6g-6$, dont les points se trouvent "naturellement" en correspondance biunivoque avec les classes de surfaces de Teichmüller (classes par rapport à la relation d'équivalence définie par l'isomorphisme) ; AHLFORS a donné une autre démonstration du même résultat. Dans ce qui suit, on se propose de faire l'étude locale de cet "espace de Teichmüller", et principalement d'y définir une structure de variété complexe (de dimension complexe $3g-3$) et même de variété kählérienne. Après coup, une remarque de L. BERS (très simple, mais s'appuyant, semble-t-il, sur des résultats délicats sur les équations aux dérivées partielles à coefficients discontinus en un point) permettrait d'ailleurs de retrouver très rapidement le résultat principal de Teichmüller.

Il est utile de définir une notion intermédiaire entre celle de surface de Riemann et celle de surface de Teichmüller : on l'obtient en se donnant les images des A_i^o, non dans $\pi(S)$, mais dans $H_1(S)$; la donnée de ces images sur la surface de Riemann S détermine ce qu'on appellera une "surface de Torelli". Au moyen des générateurs de $H_1(S)$, images dans ce groupe des A_i^o, on peut définir sur S les "différentielles normalisées de 1re espèce", à savoir celles dont la matrice des périodes, par rapport aux générateurs en question, a la forme $(1_g \quad Z)$, où 1_g est la matrice unité (à g lignes et g colonnes) ; Z est alors, comme on sait, une matrice symétrique dont la partie imaginaire est positive non-dégénérée ; autrement dit, c'est un point de l'"espace de Siegel" (celui-ci étant défini comme l'espace des matrices ayant ces propriétés). Il résulte d'ailleurs du "théorème de Torelli" que la donnée de Z détermine S complètement à un isomorphisme près ; le théorème de Torelli donne même le résultat plus précis suivant. Soit $\underline{S}$ une surface de Torelli, avec la surface de Riemann sous-jacente S ; soit $h(\underline{S})$ la surface de Torelli ayant même surface de Riemann sous-jacente S, et déduite de $\underline{S}$ par l'automorphisme $x \to -x$ de $H_1(S)$; alors, pour que deux surfaces de Torelli $\underline{S}$, $\underline{S}'$ aient même image $Z(\underline{S}) = Z(\underline{S}')$ dans l'espace de Siegel, il faut et il suffit que $\underline{S}'$ soit isomorphe à $\underline{S}$ ou à $h(\underline{S})$; de plus, pour que $h(\underline{S})$ soit isomorphe à $\underline{S}$, il faut et il suffit que S soit hyperelliptique.

Si S est une surface de Riemann, on notera $\underline{\underline{S}}$ une surface de Teichmüller ayant S pour surface de Riemann sous-jacente, et, comme plus haut, par $\underline{S}$ la surface de Torelli sous-jacente à $\underline{\underline{S}}$. Il est le plus souvent commode de représenter S comme quotient Π/Γ du demi-plan $\Pi = \{z \mid I(z) > 0\}$ par un groupe Γ, isomorphe à $\pi(S)$; le choix d'un système de générateurs pour $\pi(S)$ équivaut au choix d'un système de générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$ de Γ ; celui-ci peut être normalisé de telle sorte que, compte tenu de la relation entre les σ_i, il ne dépende plus que de $6g-6$ paramètres réels. Un des résultats de la théorie est qu'on obtient ainsi un isomorphisme différentiable de l'espace de Teichmüller (muni de la bonne structure) sur un ouvert de $\mathbb{R}^{6g-6}$.

Soit $S_o = \Pi/\Gamma$ une surface de Riemann, représentée comme quotient de Π comme on a dit ; soit $\underline{\underline{S}}_o$ une surface de Teichmüller, ayant S_o pour surface de Riemann sous-jacente. Soit μ une fonction (indéfiniment différentiable au sens réel), définie dans Π , à valeurs complexes telles que $|\mu| < 1$, et telle que l'expression $\mu d\bar{z}/dz$ soit formellement invariante par Γ , ce qu'on exprime en disant que μ est de type $(-1 , 1)$ pour Γ . Alors la différentielle $\zeta = dz + \mu d\bar{z}$ est multipliée par un facteur scalaire par toute opération de Γ ; la structure complexe définie par ζ sur Π (c'est-à-dire celle pour laquelle ζ est une forme différentielle de "type" ou "bi-degré" $(1 , 0)$) se transporte donc à S_o par passage au quotient ; soit $S(\mu)$ la surface de Riemann ayant même variété différentiable sous-jacente que S_o , mais avec la structure complexe ainsi définie ; soit $\underline{\underline{S}}(\mu)$ la surface de Teichmüller ayant $S(\mu)$ pour surface de Riemann sous-jacente, et dont le groupe fondamental a mêmes générateurs distingués que $\underline{\underline{S}}_o$. Convenons de noter $Cl(\underline{\underline{S}})$ la classe d'une surface de Teichmüller $\underline{\underline{S}}$ (par rapport à la relation d'équivalence définie par l'isomorphisme), cette classe étant considérée comme un point de l'espace de Teichmüller. Alors l'application $\mu \to Cl(\underline{\underline{S}}(\mu))$ applique les fonctions μ , ayant les propriétés énoncées tout à l'heure, dans l'espace de Teichmüller. Il résulte de la théorie qu'on esquissera ici qu'on peut d'une manière et d'une seule, définir sur l'espace de Teichmüller une structure analytique complexe, de dimension complexe $3g-3$, de manière à satisfaire à la condition suivante :

(T) <u>Si</u> $\mu = \mu_u(z) = \mu(z , u)$ <u>dépend de manière continue</u>, resp. <u>différentiable</u>, resp. <u>holomorphe</u>, <u>d'un paramètre</u> u <u>à valeurs dans un espace topologique</u>, resp. <u>dans une variété réelle</u>, resp. <u>dans une variété complexe</u>, <u>l'application</u> $u \to Cl(\underline{\underline{S}}_u)$, où $\underline{\underline{S}}_u = S(\mu_u)$, <u>est continue</u>, resp. <u>différentiable</u>, resp. <u>holomorphe</u>.

On notera F_μ l'homéomorphisme de Π sur lui-même qui représente conformément Π , muni de la structure complexe définie par la forme ζ , sur Π muni de sa structure complexe usuelle (définie par la forme dz) ; F_μ , qui en principe est défini à une fonction homographique près, peut être normalisée de diverses manières (par exemple on s'appuie sur des théorèmes connus pour conclure que F_μ peut être étendue par continuité à l'axe réel, et on exige que F_μ conserve les points $0 , 1 , \infty$). Pour $\mu = \mu_u$, dépendant d'un paramètre u , on écrira F_u au lieu de F_{μ_u} . On admettra que, si μ_u dépend de manière continue, resp. différentiable (réelle) de u , il en est de même de F_u (des ellipticiens dignes de foi me l'ont garanti).

REMARQUE. - Il ne faudrait pas croire que, si μ_u dépend de manière holomorphe de u, il en soit de même de F_u (vu que c'est faux).

F_μ étant comme on a dit, il est clair que $S(\mu)$ s'écrit Π/Γ_μ, où Γ_μ est le transformé $F_\mu^{-1}\,\Gamma\,F_\mu$ de Γ par F_μ (dans le groupe des homéomorphismes de Π sur lui-même) ; plus précisément (si Γ, Γ_μ, F_μ ont été normalisés d'une manière cohérente), les générateurs distingués attachés à $\underline{\underline{S}}_\mu$ se déduisent de ceux qui sont attachés à $\underline{\underline{S}}_o$ par l'application $\sigma \rightarrow F_\mu^{-1}\,\sigma\,F_\mu$. On en déduit que les générateurs distingués attachés à $\underline{\underline{S}}_u$, pour μ_u dépendant de manière différentiable (réelle) de u, sont fonctions différentiables de u. Pour que $Cl(\underline{\underline{S}}_\mu) = Cl(\underline{\underline{S}}_o)$, il faut et il suffit que F_μ commute avec tout $\sigma \in \Gamma$ (c'est immédiat à partir des définitions).

Pour étudier de plus près la structure différentiable (réelle) déterminée par (T), supposons que le paramètre u prenne ses valeurs dans un voisinage de 0 sur la droite réelle $\underset{\sim}{R}$, et désignons par un point l'opérateur $(\partial/\partial u)_{u=0}$. Alors $\dot{\mu}$ ne sera pas autre chose qu'une "variation infinitésimale de structure" au sens de Kodaira-Spencer. Pour que $Cl(\underline{\underline{S}}_u) = Cl(\underline{\underline{S}}_o)$, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que μ_u puisse s'obtenir à partir d'un homéomorphisme F_u de Π sur Π, commutant avec tout $\sigma \in \Gamma$ et dépendant différentiablement de u ; pour que $u \rightarrow Cl(\underline{\underline{S}}_u)$ soit tangent en $u = 0$ à l'application constante $u \rightarrow Cl(\underline{\underline{S}}_o)$, il faut et il suffit que μ_u soit tangent en $u = 0$ à une application μ_u ainsi obtenue au moyen d'un tel homéomorphisme F_u. Un calcul simple montre que cela équivaut à la condition suivante :

$$\dot{\mu} = (\partial\mu/\partial u)_{u=0}$$

doit être de la forme $\partial\zeta/\partial\bar{z}$, où ζ est une fonction à valeurs complexes de type $(-1\ ,\ 0)$ dans Π. S'il en est ainsi, on dira que la variation infinitésimale $\dot{\mu}$ est triviale. On en conclut (heuristiquement pour l'instant, mais tout cela se légitime par la suite) qu'on peut identifier l'espace des vecteurs (réels) tangents à l'espace de Teichmüller au point $Cl(\underline{\underline{S}}_o)$ avec l'"espace de Kodaira-Spencer" défini comme le quotient de l'espace (vectoriel sur $\underset{\sim}{R}$) des fonctions de type $(-1\ ,\ 1)$ dans Π par le sous-espace des fonctions $\partial\zeta/\partial\bar{z}$ avec ζ de type $(-1\ ,\ 0)$.

Mais, tout ν de type $(-1\ ,\ 1)$ dans Π peut s'écrire sous la forme $\nu = \partial\varphi/\partial\bar{z}$, φ étant bien déterminée par là à une fonction holomorphe près et satisfaisant à la condition que, pour tout $\sigma \in \Gamma$, la fonction

$$\psi_\sigma = \varphi - \frac{dz}{d(\sigma z)}\cdot\varphi^\sigma \tag{1}$$

est holomorphe dans Π (on convient d'écrire φ^{σ} au lieu de $\varphi \circ \sigma$). Les fonctions holomorphes ψ_{σ} satisfont alors aux relations

(2) $$\psi_{\sigma\tau} = (\psi_{\sigma})^{\tau} \cdot \frac{dz}{d(\tau z)} + \psi_{\tau} .$$

Par suite, comme il était aisé de le prévoir, l'espace de Kodaira-Spencer apparaît, ad majorem cohomologiae gloriam, comme espace de cohomologie, à savoir quotient de l'espace des cocycles holomorphes ψ_{σ} par l'espace des cobords (cocycles donnés par (1) avec φ holomorphe). Sous cette forme, il apparaît comme muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur $\underset{\sim}{C}$; cela définit sur Teichmüller une structure quasi-complexe, dont on s'apercevra bientôt qu'elle est complexe.

Le cocycle (ψ_{σ}) étant donné, on peut faire agir Γ sur $\Pi \times \underset{\sim}{C}$ par la formule
$$\sigma(z , t) = (\sigma z , \frac{d(\sigma z)}{dz} (t - \psi_{\sigma}(z))) .$$
Le quotient $(\Pi \times \underset{\sim}{C})/\Gamma$ est alors un fibré analytique complexe de base S_0 , la fibre étant le plan complexe $\underset{\sim}{C}$ avec le groupe $t \rightarrow at + b$. En vertu de GAGA ou pour toute autre raison, ce fibré est algébrique, donc admet une "quasi-section" méromorphe, ce qui veut dire qu'on peut en tout cas mettre ψ_{σ} sous la forme (1) avec φ méromorphe. D'autre part, la théorie élémentaire des fibrés montre qu'il y a toujours une section différentiable réelle, donc qu'on peut mettre ψ_{σ} sous la forme (1) avec φ différentiable au sens réel. Ce qui permet aux petits enfants (resp. aux vieillards déjà retombés de leurs cocotiers) de jouer avec tout cela de manière plaisante et délectable. En particulier, on s'assure aussitôt que le dual de l'espace de Kodaira-Spencer est l'espace des différentielles quadratiques (de 1re espèce) sur S_0 ; on entend par là les expressions formelles $\omega = q.dz^2$, formellement invariantes par Γ , avec q holomorphe dans Π (q est donc une forme automorphe de degré -4). La forme bilinéaire, qui met les espaces en question en dualité l'un avec l'autre est $\iint q \nu dz\, d\bar{z}$, l'intégrale étant prise sur S_0 ; en effet, pour ν de type $(-1 , 1)$, $q \nu dz\, d\bar{z}$ est invariante par Γ ; pour $\nu = \partial \xi/\partial \bar{z}$ on a $q \nu\, dz\, d\bar{z} = - d(q \xi dz)$, de sorte que, pour ξ de type $(-1 , 0)$ (ce qui entraîne que $q \xi dz$ est invariant par Γ) l'intégrale $\iint q \nu dz\, d\bar{z}$ s'annule. Pour montrer que, réciproquement, si $\iint q \nu dz\, d\bar{z} = 0$ pour toute différentielle quadratique $q\, dz^2$, ν est trivial i.e. de la forme $\partial \xi/\partial \bar{z}$ avec ξ de type $(-1 , 0)$, il est commode de passer à la théorie des fibrés algébriques, après quoi ça se déduit de Riemann-Roch d'une manière bien connue.

On observera tout de suite que l'espace des différentielles quadratiques sur S_0

est muni d'une métrique hermitienne bien connue (cas particulier de celle de Peterson dans la théorie des formes automorphes), donnée, pour

$$\omega = q.dz^2 \ , \quad \omega' = q'.dz^2 \ , \text{ par :}$$

$$(\omega \, , \, \omega') = i \iint_{S_0} q \, \bar{q}' \, y^2 \, dz \, d\bar{z}$$

avec $y = I(z)$. Sous réserve qu'on vérifie quelques pauvres petites conditions de différentiabilité, cela veut dire que cette forme définit sur Teichmüller une structure hermitienne "naturelle", dont on vérifie même (par un calcul idiot) qu'elle est kählérienne.

Ce qui précède s'exprime aussi en disant que toute différentielle quadratique ω sur S_0 définit un covecteur (à valeurs complexes) au point $Cl(\underline{\underline{S}}_0)$ sur l'espace de Teichmüller, covecteur qui, par définition, est de type (ou "bidegré") $(1 \, , \, 0)$, pour la structure quasi-complexe définie plus haut. Un calcul trivial permet alors de vérifier que, pour cette structure, l'application $u \to Cl(\underline{\underline{S}}_u)$ est holomorphe chaque fois que μ_u dépend de manière holomorphe d'un paramètre u à valeurs dans $\underset{\sim}{C}^n$. Si alors on prend, pour fixer les idées :

$$\mu_u(z) = \sum_{i=1}^{3g-3} u_i \, y^2 \, \bar{q}_i(z) \ ,$$

où les q_i sont tels que les $q_i \, dz^2$ forment une base pour l'espace vectoriel des différentielles quadratiques sur S_0 , on conclut que l'application $u \to Cl(\underline{\underline{S}}_u)$ est un isomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{C}^{3g-3}$ sur un voisinage de $Cl(\underline{\underline{S}}_0)$ dans l'espace de Teichmüller, au sens des structures quasi-complexes. Cela montre bien que ce dernier espace est analytique complexe de dimension $3g-3$. [N.B. Ce raisonnement est dû à L. BERS (communication personnelle)]

Dans le même ordre d'idées, on peut maintenant traiter par le calcul, sans difficulté, des questions variées concernant les différentielles, en un point donné de l'espace de Teichmüller, de fonctions définies sur cet espace, et par exemple :

a. Des coefficients des substitutions du groupe Γ_μ ; on trouve ainsi que, si ce groupe est normalisé, les $6g-6$ coefficients des $2g-2$ premiers générateurs "distingués" peuvent être pris comme coordonnées locales (au sens de la structure analytique réelle) sur l'espace de Teichmüller, celui-ci se trouvant ainsi représenté comme ouvert dans $\underset{\sim}{R}^{6g-6}$;

b. des périodes des intégrales normalisées de 1re espèce sur $\underline{\underline{S}}_\mu$; on vérifie ainsi le théorème de Rauch, qui dit ce qui suit :

Dans l'espace de Siegel des matrices symétriques à partie imaginaire positive non dégénérée, les points correspondant à des "surfaces de Torelli" forment un sous-ensemble analytique de dimension complexe $3g-3$, dont les points singuliers sont ceux qui correspondent aux courbes hyperelliptiques ; ces derniers forment une variété analytique complexe (sans point singulier) de dimension complexe $2g-1$. Au voisinage de tout point de cet ensemble correspondant à une surface de Riemann S_0 non hyperelliptique, on peut prendre, pour coordonnées locales sur cet ensemble, tout système de $3g-3$ périodes p_{ij} tel que les différentielles quadratiques $\zeta_i \zeta_j$ (où $\zeta_1 , \dots , \zeta_g$ sont les différentielles normalisées de 1re espèce) soient linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$.