PIERRE CARTIER

# Dualité des variétés abéliennes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1958, exp. nº 164, p. 379-391

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__379_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

# DUALITÉ DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Pierre CARTIER

## 1. Introduction.

On sait qu'au cours de ces dernières années, WEIL, puis CHOW, MATZUSAKA et d'autres ont réussi à étendre à la géométrie algébrique abstraite la plupart des résultats classiques sur les fonctions abéliennes, dûs à RIEMANN, PICARD, POINCARÉ, LEFSCHETZ etc. Mais, en caractéristique $p \neq 0$ , on a rencontré des phénomènes sans analogue classique, dûs à l'inséparabilité. BARSOTTI, IGUSA et SERRE ont réussi à forcer les difficultés dans un certain nombre de questions, mais jusqu'à présent, on a rencontré trop de pathologie pour constituer un corps de doctrine cohérent. Il semble bien qu'en caractéristique $p$ , la théorie "additive" soit inadéquate, et il est urgent de s'attaquer à la théorie "multiplicative" liée étroitement à la théorie des espaces fibrés. On se propose d'exposer ici quelques résultats nouveaux, concernant une question particulière, celle de la dualité des variétés abéliennes. Chemin faisant, on réexposera, parfois avec des démonstrations différentes, des résultats de Serre et de Barsotti ; c'est dire qu'il ne faudrait pas attribuer au conférencier l'ensemble des résultats exposés ici !

## 2. Le cas classique.

C'est celui où le corps des constantes est le corps des nombres complexes $\underset{\sim}{C}$ ; on va d'abord exposer, selon WEIL [ 3 ] , quelques résultats classiques.

Soient $V$ un espace vectoriel complexe de dimension finie $n > 0$ , $V_0$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à $V$ et $\Gamma$ un "lattice" dans $V$ , c'est-à-dire un sous-groupe additif de $V_0$ à $2n$ générateurs engendrant l'espace vectoriel réel $V_0$ . Muni de la structure quotient de groupe de Lie complexe, le groupe $A = V/\Gamma$ est appelé un <u>tore complexe</u> ; on dira que $A$ est une <u>variété abélienne</u> s'il existe une <u>forme de Riemann</u> sur $V$ , c'est-à-dire un forme hermitienne positive non dégénérée $\Phi$ telle que la partie imaginaire de $\Phi(x , y)$ soit entière pour $x , y \in \Gamma$ . Au moyen des fonctions théta, on définit alors un isomorphisme de variété analytique complexe de $A$ sur une sous-variété algébrique sans singularités d'un espace projectif complexe.

Si $A = V/\Gamma$ est un tore complexe, le <u>dual</u> $\hat{A}$ de $A$ est le tore $\hat{V}/\hat{\Gamma}$ où $\hat{V}$

est l'antidual de $V$ , i.e. l'espace vectoriel complexe formé des applications "antilinéaires" $f$ de $V$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(\lambda . x + \mu . y) = \bar{\lambda}.f(x) + \bar{\mu}.f(y)$ pour $\lambda$ , $\mu \in \mathbb{C}$ et $x$ , $y \in V$ ; et où $\hat{\Gamma}$ se compose des $f \in \hat{V}$ telles que la partie imaginaire de $f(x)$ soit *entière* pour $x \in \Gamma$ . A toute forme de Riemann est associée une forme de Riemann sur $\hat{A}$ , de sorte que le dual d'une variété abélienne est une variété abélienne. De plus il est clair que $A$ <u>est canoniquement isomorphe à son bidual</u> $\hat{\hat{A}}$ .

Soient $A = V/\Gamma$ et $A' = V'/\Gamma'$ deux tores complexes ; on appelle <u>isogénie</u> de $A$ sur $A'$ un homomorphisme de $A$ sur $A'$ qui provient par passage au quotient d'une application linéaire complexe bijective $f$ de $V$ sur $V'$ telle que $f(\Gamma) \subset \Gamma'$ ; le composé de deux isogénies est une isogénie. De plus, s'il existe une isogénie de $A$ sur $A'$ et si l'un des deux tores complexes $A$ ou $A'$ est une variété abélienne, il en est de même de l'autre. Enfin, si $\Phi$ est une forme de Riemann sur $V$ , l'application qui à $x \in V$ fait correspondre la forme antilinéaire $y \longrightarrow \Phi(x , y)$ sur $V$ définit une isogénie de $A$ sur le tore dual $\hat{A}$ .

Soit $A = V/\Gamma$ une variété abélienne ; on peut identifier $V_o$ à l'algèbre de Lie réelle de $A$ et par conséquent une forme différentielle invariante par translation de type $(p , q)$ sur $A$ peut être identifiée à une fonction

$$(x_1 , \ldots , x_p ; y_1 , \ldots , y_q) \longrightarrow f(x_1 , \ldots , x_p ; y_1 , \ldots , y_q)$$

sur $V^{p+q}$ , linéaire par rapport aux variables $x_i$ et antilinéaire par rapport aux variables $y_j$ . En particulier, une forme de Riemann $\Phi$ sur $V$ peut être considérée comme une métrique kählérienne sur $A$ invariante par translation ; les formes différentielles harmoniques sur $A$ sont alors les formes différentielles invariantes par translation. D'après les théorèmes de Hodge et Dolbeault, l'espace de cohomologie $H^{p,q}(A) = H^q(A , \underline{\Omega}^p(A))$ où $\underline{\Omega}^p(A)$ est le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de type $(p , 0)$ , est de la forme

$$\Lambda^q H^{0,1}(A) \otimes \Lambda^p H^{1,0}(A) ;$$

l'espace $H^{1,0}(A)$ n'est autre que l'espace des formes différentielles holomorphes de type $(1 , 0)$ tandis que $H^{0,1}(A)$ est le premier groupe de cohomologie du faisceau $\mathcal{H}(A)$ des germes de fonctions holomorphes. Ce dernier espace est isomorphe à l'espace des formes harmoniques de type $(0 , 1)$ , c'est-à-dire à l'antidual de $V$ . On voit alors que $H^1(A , \mathcal{H}(A))$ est <u>isomorphe à l'algèbre de Lie de la variété abélienne duale</u> $\hat{A}$ .

Soient maintenant $X$ une variété kählérienne compacte et $H^{1,0}(X)$ l'espace vectoriel complexe des formes holomorphes sur $X$ ; on notera $V$ le dual de $H^{1,0}(X)$ et l'on choisira un point-base $x_0$ dans $X$. Dans $V$, on désigne par $\Gamma$ l'ensemble des formes linéaires $\omega \longrightarrow \int_\gamma \omega$ où $\gamma$ est un chemin fermé ; de plus, si $x \in X$ et si $\gamma_x$ est un chemin allant de $x_0$ à $x$, la forme linéaire $\omega \longrightarrow \int_{\gamma_x} \omega$ est définie modulo un élément de $\Gamma$ et l'on définit ainsi une application holomorphe $\varphi$ de $X$ dans $A(X) = V/\Gamma$. On dit que $A(X)$ est la <u>variété d'Albanese</u> de $X$ ; c'est une variété abélienne et l'application $\varphi$ est universelle pour les applications de $X$ dans un tore complexe. La variété abélienne $P(X)$ duale de $A(X)$ est appelée la <u>variété de Picard de</u> $X$ ; <u>l'algèbre de Lie de</u> $P(X)$ est l'antidual de $V$, donc <u>s'identifie</u> à l'espace complexe conjugué de $H^{1,0}(X)$, c'est-à-dire <u>à l'espace</u> $H^{0,1}(X) = H^1(X, \mathcal{H}(X))$ d'après les théorèmes de Hodge-Dolbeault. De plus, si $\mathcal{H}^*(X)$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes inversibles (avec la multiplication comme opération), on a une suite exacte de faisceaux

$$(0) \longrightarrow \underset{\sim}{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{j} \mathcal{H}^*(X) \longrightarrow (1)$$

où $\underset{\sim}{Z}$ est le faisceau constant des entiers, $i$ l'inclusion et $j$ l'application $f \longrightarrow \exp 2\pi i f$. Par la suite exacte de cohomologie, on a une suite exacte

$$(0) \longrightarrow H^1(\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}(X)) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}^*(X)) \longrightarrow H^2(\underset{\sim}{Z})$$

Si la variété $X$ est algébrique, le groupe $H^1(\mathcal{H}^*(X))$ des classes de fibrés holomorphes de groupe $C^*$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs pour l'équivalence linéaire ; de la suite exacte précédente, on déduit une identification de $P(X)$ avec le groupe des classes de diviseurs homologiquement équivalents à $0$, c'est-à-dire algébriquement équivalents à $0$. C'est cette définition de $P(X)$ que l'on prend dans le cas abstrait, mais ceci ne définit $P(X)$ que comme groupe, et il faut le munir d'une structure de variété algébrique.

## 3. <u>Diviseurs</u>.

Nous raisonnons maintenant en géométrie algébrique abstraite.

On note $\Omega$ le domaine universel de la géométrie envisagée. On se donne une variété $X$ définie sur un corps $k_0$, que, pour simplifier, nous supposerons <u>complète et non singulière</u>. Par sous-corps de $\Omega$, nous entendrons un corps $k$ tel que $k_0 \subset k \subset \Omega$. Si $A$ est un anneau commutatif, on notera $A^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $A$ ; même notation pour un faisceau d'anneaux.

Soit $k$ un sous-corps de $\Omega$ ; on note $R_k$ le corps des fonctions numériques sur $X$ définies sur $k$ ; pour $x \in X$, on note $\mathcal{O}_k(x)$ l'anneau local des fonctions $f \in R_k$ définies en $x$ et pour $f \in R_k$, on note $D(f)$ l'ensemble des points où $f$ est définie. Les ensembles $D(f)$ engendrent une topologie sur $X$, la $k$-topologie dont les ouverts seront dits $k$-ouverts, etc. On note $\mathcal{R}_k$ le faisceau $X \times R_k$ de base $X$, où $X$ est muni de la $k$-topologie et $R_k$ de la topologie discrète ; la réunion des $\{x\} \times \mathcal{O}_k(x)$ pour $x \in X$ est un sous-faisceau $\mathcal{O}_k$ de $\mathcal{R}_k$, le <u>faisceau des anneaux locaux</u>.

Un <u>diviseur</u> $D$ sur $X$ est une combinaison linéaire formelle $\sum_W n_W.W$ finie, où $W$ parcourt l'ensemble des sous-variétés de codimension 1. Une sous-variété $W$ telle que $n_W \neq 0$ (resp $n_W < 0$) est appelée une <u>composante</u> (resp. une composante polaire) de $D$ ; on dit que $D$ est <u>positif</u> ($D \geq 0$) s'il n'a pas de composante polaire. Si $k$ est un sous-corps de $\Omega$, on définit la notion de <u>diviseur rationnel sur</u> $k$ ; nous n'aurons pas besoin de rappeler la définition précise de cette notion et nous n'utiliserons que les propriétés rappelées plus loin. Enfin, à toute fonction numérique $f$ est associé un diviseur $(f)$ qui a les propriétés suivantes :

a. Si $f$ et $g$ sont des fonctions, on a $(f.g) = (f) + (g)$ et $(f + g) \geq \inf (f), (g)$.

b. Pour qu'une fonction $f$ soit régulière dans un ouvert $U$, il faut et suffit que $U$ ne rencontre aucune composante polaire de $(f)$.

c. Si $f$ appartient à $R_k$, le diviseur $(f)$ est rationnel sur $k$. Si $k'$ est un sous-corps de $\Omega$ contenant $k$, le corps $R_{k'}$ est composé des deux corps $R_k$ et $k'$ linéairement disjoints sur $k$ ; par suite, si $\sigma$ est un $k$-isomorphisme de $k'$ sur un sous-corps $k''$ de $\Omega$ contenant $k$, on peut le prolonger en un isomorphisme $f \longrightarrow f^\sigma$ de $R_{k'}$ sur $R_{k''}$ qui soit l'identité sur $R_k$. Si $U$ est un ensemble $k'$-ouvert, on peut définir $U^\sigma$ qui est $k''$-ouvert de sorte que $D(f^\sigma) = D(f)^\sigma$. Enfin, si $D$ est un diviseur rationnel sur $k'$, on peut définir le diviseur $D^\sigma$ qui est rationnel sur $k''$. On a des formules de transitivité $(U^\sigma)^\tau = U^{\tau\sigma}$, $(D^\sigma)^\tau = D^{\tau\sigma}$, $(f^\sigma)^\tau = f^{\tau\sigma}$ et aussi $(f)^\sigma = (f^\sigma)$.

Soit $D$ un diviseur rationnel sur un sous-corps $k$ de $\Omega$. Pour tout $x \in X$ il existe $f \in R_k$ tel que aucune composante de $D + (f)$ ne passe par $x$, et ces $f$ forment une classe $\gamma_x(D)$ de $R_k^*$ modulo $\mathcal{O}_k^*(x)$ ; de plus, l'application $D \longrightarrow \gamma(D)$ est un isomorphisme du groupe $\mathcal{D}_k$ des diviseurs rationnels sur $k$

sur le groupe des sections du faisceau quotient $\mathcal{R}_k^*/\mathcal{O}_k^*$ . On note $\mathcal{P}_k$ le groupe des diviseurs de la forme (f) avec $f \in R_k^*$ ; utilisant la suite de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$(1) \longrightarrow \mathcal{O}_k^* \longrightarrow \mathcal{R}_k^* \longrightarrow \mathcal{R}_k^*/\mathcal{O}_k^* \longrightarrow (1)$ , on obtient la suite exacte

$$(1) \longrightarrow k^* \longrightarrow R_k^* \longrightarrow \mathcal{D}_k \longrightarrow H^1(X , \mathcal{O}_k^*) \longrightarrow (1)$$

qui permet d'identifier le groupe $H^1(X , \mathcal{O}_k^*)$ au groupe $\mathcal{C}_k = \mathcal{D}_k/\mathcal{P}_k$ des classes de diviseurs (pour l'équivalence rationnelle).

Soit D un diviseur rationnel sur k ; pour $x \in X$ , on note $L_k(D)_x$ l'ensemble des fonctions $f \in R_k$ telles que le diviseur $D + (f)$ n'ait aucune composante polaire passant par x ; c'est un idéal fractionnaire principal de l'anneau $\mathcal{O}_k(x)$ , dont les générateurs sont les éléments de $\gamma_x(D)$ . La réunion $\mathcal{L}_k(D)$ des $\{x\} \times \mathcal{L}_k(D)_x$ pour $x \in X$ est un sous-faisceau algébrique cohérent du faisceau $\mathcal{R}_k$ ; ce faisceau caractérise entièrement le diviseur D .

## 4. Le critère de rationalité.

La notion de corps de rationalité d'un diviseur est caractérisée par le critère bien connu suivant :

CRITÈRE. - Soient k et k' deux sous-corps de $\Omega$ tels que $k \subset k'$ et D' un diviseur rationnel sur k' . Pour que D' soit rationnel sur k , il faut et suffit que pour tout ensemble k-ouvert affine U de X , l'espace k'-vectoriel $\Gamma(U , \mathcal{L}_{k'}(D')) = \bigcap_{x \in U} L_{k'}(D')_x$ des sections de $\mathcal{L}_{k'}(D')$ sur U ait une base formée d'éléments de $R_k$ .

On va expliciter ce critère lorsque $[k' : k]$ est fini.

A) On suppose que k' est une extension galoisienne finie de k de groupe de Galois G : le groupe de Galois G opère alors sur le corps $R_{k'}$ , sur les groupes $\mathcal{P}_{k'}$ , $\mathcal{D}_{k'}$ et $\mathcal{C}_{k'}$ et sur les faisceaux $\mathcal{R}_{k'}$ et $\mathcal{O}_{k'}$ .

LEMME 1. - Pour qu'un sous-espace k'-vectoriel V' de $\mathcal{R}_{k'}$ ait une base formée d'éléments de $R_k$ , il faut et suffit que $V'^{\sigma} = V'$ pour tout $\sigma \in G$ .

Ce lemme est essentiellement classique et trivial. On va en déduire le lemme suivant :

LEMME 2. - Pour qu'un diviseur D' rationnel sur k' soit rationnel sur k , il faut et suffit que l'on ait $D'^{\sigma} = D'$ pour tout $\sigma \in G$ .

Soit $\sigma \in G$ ; l'égalité $D'^{\sigma} = D'$ équivaut à l'égalité $\mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma}) = \mathcal{L}_{k'}(D')$, soit, comme un faisceau algébrique cohérent sur une variété affine est engendré par ses sections, à l'égalité $\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma})) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'))$ pour tout ensemble k-ouvert affine $U$. Or, d'après la formule $(f^{\sigma}) = (f)^{\sigma}$, il est clair que $\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma})) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'))^{\sigma}$ ; la conclusion résulte alors du lemme 1 et du critère

C.Q.F.D.

La démonstration précédente n'a été donnée que pour illustrer les méthodes employées : il y a d'autres démonstrations plus classiques ! Le lemme suivant concerne les classes de diviseurs, et est plus important.

LEMME 3. - <u>Soit</u> $C' \in \mathcal{C}_{k'}$ <u>une classe de diviseurs. Pour qu'il existe dans</u> $C'$ <u>un diviseur rationnel sur</u> $k$, <u>il est nécessaire que l'on ait</u> $C'^{\sigma} = C'$ <u>pour tout</u> $\sigma \in G$, <u>et cette condition est suffisante s'il existe dans</u> $\mathfrak{X}$ <u>un point</u> $x$ <u>rationnel sur</u> $k$.

La nécessité découle trivialement du lemme 2.

Inversement supposons que $C'^{\sigma} = C'$ pour tout $\sigma \in G$ ; comme $D' \longrightarrow \gamma(D')$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{k'}$ sur $H^0(X, \mathcal{R}^*_{k'}/\mathcal{O}^*_{k'})$, on peut trouver dans $C'$ un diviseur $D'$ tel que $\gamma_x(D') = \mathcal{O}^*_k(x)$. Soit $\sigma \in G$ ; comme $C'^{\sigma} = C'$, on a $D' \in C'$ et $D'^{\sigma} \in C'$, d'où une fonction $f_{\sigma} \in R_{k'}$ telle que

$$D'^{\sigma} = D' + (f_{\sigma}) ;$$

et comme $\gamma_x(D'^{\sigma}) = \gamma_x(D') = \mathcal{O}^*_{k'}(x)$ ; la fonction $f_{\sigma}$ appartient à $\mathcal{O}^*_{k'}(x)$ en multipliant $f_{\sigma}$ par une constante, on peut sans rien changer supposer que $f_{\sigma}(x) = 1$. Posons alors $c_{\sigma,\tau} = f^{\tau}_{\sigma}.f_{\tau}/f_{\sigma\tau}$ ; comme $(f_{\sigma}) = D'^{\sigma} - D'$ on voit immédiatement que $(c_{\sigma,\tau}) = 0$ et donc $c_{\sigma,\tau}$ est une constante, puisque $X$ est complète. Mais comme $x$ est <u>rationnel sur</u> $k$, on a $f(x)^{\sigma} = f^{\sigma}(x)$ pour $f \in R_{k'}$, d'où l'on déduit $c_{\sigma,\tau}(x) = 1$ et finalement $c_{\sigma,\tau} = 1$. On a donc $f_{\sigma\tau} = f^{\tau}_{\sigma}.f_{\tau}$ et d'après un théorème connu, il existe $g \in R_{k'}$ telle que $f = g^{\sigma - 1}$ ; si on pose alors $D = D' - (g)$, on a $D^{\sigma} = D$ pour tout $\sigma \in G$ et $D \in C'$, d'où la conclusion par le lemme 2.

C.Q.F.D.

B) <u>On suppose</u> $k$ <u>de caractéristique</u> $p \neq 0$, $k'^p \subsetneq k$ <u>et</u> $[k' : k]$ <u>fini</u> : on notera $\mathfrak{g}$ la p-algèbre de Lie formée des k-dérivations de $k'$ ; comme $R_{k'}$ est composé des corps $R_k$ et $k'$ linéairement disjoints sur $k$, toute dérivation $\partial \in \mathfrak{g}$ se prolonge de manière unique en une $R_k$-dérivation de $R_{k'}$ qui sera encore notée $\partial$. Il est alors classique que $R_k$ est l'ensemble des éléments de $R_{k'}$ annulés par toutes les $\partial \in \mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ opère sur $R_{k'}$ elle opère sur le faisceau $\mathcal{R}_{k'}$ et l'on montre en se ramenant au cas affine que le sous-faisceau $\mathcal{O}_{k'}$ de $\mathcal{R}_{k'}$ est stable par $\mathfrak{g}$. Le lemme 1 a l'analogue suivant, qui se démontre par des raisonnements d'algèbre linéaire.

LEMME 1 bis. - Pour qu'un sous-espace $k'$-vectoriel $V'$ de $R_{k'}$ ait une base formée d'éléments de $R_k$, il faut et suffit que $\partial(V') \subset V'$ pour toute dérivation $\partial \in \mathfrak{g}$.

Pour toute dérivation $\partial \in \mathfrak{g}$, l'application $f \longrightarrow \partial(f)/f$ est un homomorphisme $\partial^*$ du groupe $R^*_{k'}$ dans le groupe $R_{k'}$, qui détermine des homomorphismes de faisceaux $\partial^* : \mathcal{R}^*_{k'} \longrightarrow \mathcal{R}_{k'}$ et $\partial^* : \mathcal{O}^*_{k'} \longrightarrow \mathcal{O}_{k'}$. Par passage à la suite exacte de cohomologie, on en déduit le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :

$$(S) \qquad \begin{array}{ccccccccccc} (1) & \longrightarrow & k'^* & \xrightarrow{\lambda^*} & R^*_{k'} & \xrightarrow{\mu^*} & H^0(X , \mathcal{R}^*_{k'}/\mathcal{O}^*_{k'}) & \xrightarrow{\nu^*} & H^1(X , \mathcal{O}^*_{k'}) & \longrightarrow & (1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial^*} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^*} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^*_1} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^*_2} & & \\ (0) & \longrightarrow & k' & \xrightarrow{\lambda} & R_{k'} & \xrightarrow{\mu} & H^0(X , \mathcal{R}_{k'}/\mathcal{O}_{k'}) & \xrightarrow{\nu} & H^1(X , \mathcal{O}_{k'}) & \longrightarrow & (0) \end{array}$$

LEMME 2 bis. - Pour qu'un diviseur $D'$ rationnel sur $k'$ soit rationnel sur $k$, il faut et suffit que l'on ait $\partial^*_1(\gamma(D')) = 0$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$.

D'après le critère et le lemme 1 bis, pour que $D'$ soit rationnel sur $k$., il faut et suffit que pour tout $k$-ouvert affine $U$ et toute $\partial \in \mathfrak{g}$, l'espace $k'$-vectoriel $\Gamma(U , \mathcal{L}_{k'}(D'))$ soit stable par $\partial$ ; comme un faisceau algébrique cohérent sur une variété affine est engendré par ses sections, ceci signifie que le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$ est stable par toute $\partial \in \mathfrak{g}$. Or pour tout $x \in X$, $L_{k'}(D')_x$ est un idéal principal engendré par n'importe quel élément de $\gamma_x(D')$. La conclusion résulte alors d'un calcul facile.

C.Q.F.D.

Enfin, on a l'analogue suivant du lemme 3.

LEMME 3 bis. - Soit $C' \in \mathcal{C}_{k'}$ ; pour qu'il existe $D \in C'$ rationnel sur $k$, il faut que l'élément $\gamma$ de $H^1(X , \mathcal{O}^*_{k'})$ correspondant à $C'$ soit annulé par $\partial^*_2$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$, et cette condition est suffisante si $X$ possède un point $x$ rationnel sur $k$.

La nécessité découle immédiatement du lemme 2 bis.

Supposons $\partial^*_2(\gamma) = 0$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$. On choisit dans $C'$ un diviseur $D'$ tel que $\gamma_x(D') = \mathcal{O}^*_{k'}(x)$. Utilisant le diagramme commutatif $(S)$, on voit que pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$, il existe une fonction $f(\partial) \in R_{k'}$ telle que

$\partial_1^*(\gamma(D')) = \mu(f(\partial))$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$ ; la formule $\gamma_x(D') = \theta^*_{k'}(x)$ montre par un calcul facile que $f(\partial)$ appartient à $\mathcal{O}_{k'}(x)$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$, et modifiant $f(\partial)$ par une constante additive, on peut supposer que $f(\partial)(x) = 0$ . Pour $\partial$ , $\partial' \in \mathfrak{g}$ , on pose

$$h(\partial , \partial') = \partial.f(\partial') - \partial'.f(\partial) - f([\partial , \partial']) ;$$

utilisant la définition de $f(\partial)$ , on montre que $h(\partial , \partial')$ est régulière sur tout $X$ , donc est une constante puisque $X$ est complète. Mais, comme $x$ est rationnel sur $k$ , on a $\partial(f(x)) = (\partial(f))(x)$ pour $f \in R_{k'}$ , et ceci montre que $h(\partial , \partial')$ est nulle en $x$ , donc identiquement nulle. On a donc l'identité :

$$f([\partial , \partial']) = \partial.f(\partial') - \partial'.f(\partial) \tag{1}$$

et on montre de même la linéarité de $f(\partial)$ en $\partial$ et l'identité :

$$f(\partial^p) = f(\partial)^p - \partial^{p-1}.f(\partial) \tag{2}$$

De ces deux identités et du théorème fondamental démontré par le conférencier dans [1], découle l'existence d'une fonction $g \in R^*_{k'}$ telle que $f(\partial) = \partial(g)/g$ pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$ . Le lemme 2 bis montre alors facilement que $D' + (g)$ , qui est dans $C'$ , est rationnel sur $k$ .

C.Q.F.D.

## 5. La variété de Picard.

Nous exposons maintenant selon WEIL la théorie des variétés de Albanese et Picard dans le cas abstrait. On trouvera dans le livre à paraître de S. LANG des démonstrations détaillées [2] .

On appelle variété abélienne une variété de groupe complète, donc commutative d'après CHEVALLEY. Si $A$ et $B$ sont deux variétés abéliennes, une isogénie $\alpha$ de $A$ dans $B$ est un homomorphisme rationnel surjectif dont le noyau est fini ; $A$ et $B$ ont alors même dimension.

Soit $X$ une variété complète et non singulière. On dit qu'une variété abélienne $A$ et un morphisme $\alpha$ de $X$ dans $A$ constituent une variété d'Albanese de $X$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1° Le groupe additif sous-jacent à $A$ est engendré par l'image de $\alpha$ .

2° Il n'existe aucune isogénie $\lambda$ d'une variété abélienne $B$ sur $A$ telle que $\alpha$ puisse se factoriser en $\lambda \circ \alpha'$ où $\alpha'$ est un morphisme de $X$ dans $B$ .

3° La dimension de $A$ est maximale parmi les dimensions des variétés abéliennes satisfaisant à 1° et 2° .

Pour démontrer l'existence d'une variété d'Albanese $(A, \alpha)$, on montre que si $(A, \alpha)$ satisfait à 1° et 2°, pour toute forme différentielle invariante par translation $\omega \neq 0$ sur $A$, la forme de première espèce $\omega \circ \alpha$ est non nulle et par suite que la dimension de $A$ est bornée par le rang (fini !) de l'espace des formes différentielles de première espèce sur $X$ (démonstration de SERRE) ; le reste est alors facile. L'unicité de la variété d'Albanese résulte de sa propriété universelle : pour tout morphisme $f$ de $X$ dans une variété abélienne $B$, il existe un morphisme $\bar{f}$ et un seul de $A$ dans $B$ tel que $f = \bar{f} \circ \alpha$. On choisira une variété d'Albanese $(A(X), \alpha_X)$ pour toute variété $X$ complète et non singulière ; alors $A(X)$ est un foncteur covariant de $X$.

Rappelons maintenant quelques propriétés des classes de diviseurs. Si $f$ est un morphisme d'une variété non singulière $X$ dans une variété non singulière $Y$, pour toute classe de diviseurs $C$ sur $Y$, on peut définir la classe $f^{-1}(C)$ sur $X$ et l'on a $(gf)^{-1}(C') = g^{-1}(g^{-1}(C'))$ pour un morphisme $g$ de $Y$ dans $Z$ non singulière et une classe $C'$ de diviseurs sur $Z$. On appelle groupe de Picard de $X$ le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ des classes de diviseurs sur $X$ contenant un diviseur algébriquement équivalent à $0$ ; alors pour tout morphisme $f$ de $X$ dans $Y$ (variétés non singulières), et toute classe $C \in \mathrm{Pic}(Y)$, on a $f^{-1}(C) \in \mathrm{Pic}(X)$, de sorte que ${}^t f : G^{-1}(G)$ est un homomorphisme de $\mathrm{Pic}(Y)$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ et que $\mathrm{Pic}(X)$ est un foncteur contravariant de $X$. Enfin si $U$ et $V$ sont deux variétés non singulières et $C$ une classe de diviseurs sur $U \times V$, pour tout $v \in V$, on note $C(v)$ la classe sur $U$ image réciproque de $C$ par l'application $u \longrightarrow (u, v)$ de $U$ dans $U \times V$ ; on dit qu'une famille $(C_v)$ de classes de diviseurs sur $U$ paramétrée par $V$ est algébrique s'il existe une classe $C$ sur $U \times V$ telle que $C(v) = C_v$ pour tout $v \in V$ ; la classe $C$ est définie à l'addition près de la classe d'un diviseur de la forme $U \times D$ où $D$ est un diviseur sur $V$.

Ceci dit, on dit qu'une structure de variété abélienne définie sur $k$ sur le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ est une structure de variété de Picard $P(X)$ de $X$ si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° Il existe une classe $P$ sur $X \times P(X)$ contenant un diviseur rationnel sur $k$ et telle que pour tout $a \in P(X)$, on ait $P(a) = a$.

2° Si $C$ est une classe sur $X \times V$ ($V$ variété non singulière) contenant un diviseur rationnel sur $k$, alors pour $v_0 \in V$ rationnel sur $k$, l'application $v \longrightarrow C(v) - C(v_0)$ de $V$ dans $P(X)$ est un morphisme défini sur $k$.

L'unicité est à peu près immédiate. Pour démontrer l'existence, on se ramène au cas des variétés abéliennes en montrant que l'application ${}^t\alpha_X$ induit un isomorphisme de $P(A(X))$ sur $P(X)$ (ceci résulte de ce que tout diviseur algébriquement équivalent à 0 est la différence de deux diviseurs appartenant à une famille algébrique paramétrée par une variété abélienne [4] ) ; si $A$ est une variété abélienne, il existe sur $A$ un diviseur $D \geqslant 0$ rationnel sur $k$ non dégénéré, i.e. tel que l'ensemble des $u \in A$ tels que $D_u \sim D$ est fini [5]. On considère alors un point $u \in A$ générique sur $k$ ; parmi les corps de rationalité des diviseurs $E \sim D_u$ contenant $k$, il en existe un plus petit $K$ tel que $k \subset K \subset k(u)$. De plus, il existe une variété abélienne $B$ et un point générique $v$ de $B$ sur $k$ tels que $K = k(v)$, et un diviseur $E$ rationnel sur $k$ sur $A \times B$ tel que $E(v) = D_u$. Alors si $C$ est la classe de $E$, l'application $a \longrightarrow C(a) - C(0)$ est une bijection de $B$ sur $\mathrm{Pic}(A)$, et le théorème d'existence résulte facilement de là.

## 6. Le théorème fondamental.

La situation sera la suivante :

$X$ variété complète et non singulière définie sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$,

$G$ variété de groupe commutatif,

$C$ classe de diviseurs sur $X \times G$ contenant un diviseur rationnel sur $k$.
On suppose que si $u$ est un point générique de $G$ sur $k$, le corps $k(u)$ est le plus petit corps de rationalité contenant $k$ d'un diviseur de la classe $C(u)$, image réciproque de $C$ par l'application $x \longrightarrow (x, u)$ de $X$ dans $X \times G$.
On supposera pour simplifier que $C(e) = 0$ où $e$ est l'élément neutre de $G$.

On va appliquer les résultats de paragraphe 4. B) en remplaçant $k$ par $k(u)^p$ et $k'$ par $k(u)$. À la classe $C(u)$ (ou plus précisément à l'intersection de $C(u)$ et de $\Omega_{k(u)}$) est associée une application $\tau_u$ de la p-algèbre de Lie $\mathfrak{g}(u)$ des dérivations de l'extension $k(u)/k(u)^p$ dans le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_{k(u)})$. Or si $\mathfrak{g}$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(u)$ formée des dérivations de $k(u)$ commutant aux translations $\delta_a : u \longrightarrow u + a$ dans $k(u)$ pour $a \in G$ rationnel sur $k$, on a un isomorphisme

$$\mathfrak{g}(u) \simeq \mathfrak{g} \otimes_k k(u) ;$$

de manière analogue, on a un isomorphisme $H^1(X, \mathcal{O}_{k(u)}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_k) \otimes_k k(u)$, de plus l'application $k(u)$-linéaire $\tau_u$ commute aux translations $\delta_a$, (car il résulte du "théorème du cube" de Weil que l'on a $C(u + a) = C(u) + C(a)$ ; si $a \in G$ est rationnel sur $k$, la classe $C(a)$ contient un diviseur rationnel sur $k$ et ceci implique que $\tau_{u+a} = \tau_u$). De plus, d'après l'hypothèse faite sur les corps de rationalité des diviseurs de $C(u)$, et d'après le lemme 3 bis (applicable, car $k$ est algébriquement clos, et $X$ a un point rationnel sur $k$), on voit que $\tau_u$ est une application <u>injective</u> : en effet, sinon son noyau $\mathfrak{n}$ serait une p-sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(u)$, le corps $K$ annulé par les éléments de $\mathfrak{n}$ serait distinct de $k(u)$ et $k(u)^p \subset K \subset k(u)$ et le lemme 3 bis montre qu'il existerait dans $C(u)$ un diviseur rationnel sur $K$. Par suite, <u>la restriction $\tau$ de $\tau_u$ à $\mathfrak{g}$ est une injection de $\mathfrak{g}$ dans</u> $H^1(X, \mathcal{O}_k)$ ; on montre facilement, en appliquant le théorème du cube que $\tau$ est indépendante de $u$.

Les hypothèses faites au début de ce paragraphe sont remplies lorsque $G = P(X)$ et $C = P$. On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. - <u>Soient $X$ une variété complète et non singulière définie sur un corps algébriquement clos $k$ et $P(X)$ sa variété de Picard. Il existe alors une application linéaire canonique $\tau$ de l'algèbre de Lie de $P(X)$ sur $k$ dans le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_k)$. De plus, $\tau$ est injective et elle est bijective si $X$ est une variété abélienne.</u>

On a démontré que $\tau$ est injectif dans le cas général. Pour montrer que $\tau$ est bijectif lorsque $X$ est une variété abélienne, il suffit d'utiliser un résultat élémentaire de SERRE : $\dim X \geq \dim H^1(X, \mathcal{O}_k)$ qui se démontre en étudiant la structure d'algèbre de Hopf de l'anneau de cohomologie

$$H^*(X, \mathcal{O}_k(X)),$$

et l'égalité $\dim X = \dim P(X)$ dans ce cas.

REMARQUES.

1° Il est faux en général que $\tau$ soit bijectif en caractéristique $p \neq 0$. En caractéristique $0$, $\tau$ est toujours bijectif d'après les résultats rappelés au paragraphe 2 sur le cas complexe.

2° Soit $q$ la dimension de $P(X)$ ; le théorème fondamental donne l'inégalité $q \leq h^{0,1}$ ($h^{0,1}$ est l'<u>irrégularité</u>). La méthode de construction de la variété d'Albanese fournit l'inégalité $q \leq h^{1,0}$.

## 7. <u>Dualité des variétés abéliennes.</u>

Soit $A$ une variété abélienne définie sur un corps algébriquement clos $k$. On appelle <u>duale</u> $\hat{A}$ de $A$ la variété de Picard $P(A)$ de $A$. La méthode de construction de la variété de Picard montre que pour tout diviseur non dégénéré $D$, l'application $u \to Cl(D_u - D)$ est une isogénie $\varphi_n$ de $A$ sur $\hat{A}$ et par suite $A$ et $\hat{A}$ ont même dimension (fait déjà utilisé dans la démonstration du théorème fondamental).

THÉORÈME. – Soient $A$ et $B$ deux variétés abéliennes et $\alpha : A \to B$ une isogénie de degré $d$ ; alors ${}^t\alpha$ est une isogénie de degré $\geqslant d$.

La démonstration comprend trois parties :

1° ${}^t\alpha$ est une isogénie : cela résulte de la théorie de Weil ; nous n'entrerons pas dans les détails.

2° Réduction à un cas élémentaire : On décompose toute isogénie de manière unique en un produit d'une isogénie séparable par une isogénie purement inséparable. Le noyau d'une isogénie séparable étant un groupe abélien fini est produit direct de groupes cycliques d'ordre premier. Une isogénie purement inséparable est composée d'isogénies $\alpha$ de hauteur 1, c'est-à-dire telles que pour toute fonction rationnelle $f$ sur $A$, $f^p$ soit de la forme $g \circ \alpha$ où $g$ est une fonction rationnelle sur $B$ ; le cas de la hauteur 1 se traite au moyen de la théorie de Jacobson donnant une correspondance de Galois au moyen d'algèbres de Lie de dérivations. Des raisonnements élémentaires permettent alors de se ramener au 4 cas suivants (SERRE) :

a. $\alpha$ est séparable, son noyau est cyclique d'ordre premier $\ell \neq p$ ($p$ est la caractéristique).

b. $\alpha$ est séparable, son noyau est cyclique d'ordre $p$.

c. $\alpha$ est purement inséparable de degré $p$, il existe dans l'algèbre de Lie de $A$ un élément $t$ avec $t^p = t$ annulé par $d\alpha$.

d. comme dans c., mais $t^p = 0$.

3° Etude des cas élémentaires : pour démontrer a., on montre (WEIL) qu'il existe sur $B$ une classe de diviseurs $C$ telle que $\alpha^{-1}(C) = 0$, $C \neq 0$ et $\ell . C = 0$. L'étude des autres cas se fait en utilisant l'isomorphisme de l'algèbre de Lie de $\hat{A}$ sur $H^1(A, \mathcal{O}(A))$ pour montrer que l'application linéaire tangente à ${}^t\alpha$ n'est pas injective, ce qui montre que ${}^t\alpha$ n'est pas un isomorphisme et contient en facteur une isogénie purement inséparable de degré $p$. La démonstration est cohomologique et très semblable à celle du cas a. par WEIL.

COROLLAIRE 1. – Toute variété abélienne est isomorphe à sa "biduale" $\hat{\hat{A}}$

Pour démontrer cette assertion, on considère la classe $P$ sur $A \times \hat{A}$ définissant la structure de variété de Picard $(P(a) = a$ pour $a \in \hat{A})$ , puis la classe ${}^tP$ sur $\hat{A} \times A$ déduite de $P$ par la symétrie $(a , b) \rightarrow (b , a)$ de $A \times \hat{A}$ sur $\hat{A} \times A$ ; alors l'application $a \rightarrow {}^tP(a)$ de $A$ dans $\mathrm{Pic}(\hat{A})$ définit un homomorphisme rationnel $K_A$ de $A$ dans $\hat{\hat{A}}$ . On montre trivialement que $\hat{A} = \hat{\hat{\hat{A}}}$ et que ${}^tK_A$ est l'application identique de $\hat{A}$ ; comme

$$\deg {}^tK_A \geqslant \deg K_A ,$$

on a $\deg K_A = 1$ et $K_A$ est l'isomorphisme cherché de $A$ sur $\hat{\hat{A}}$ .

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> $\alpha : A \rightarrow B$ <u>est une isogénie,</u> $\alpha$ <u>et</u> ${}^t\alpha$ <u>ont même degré</u> :

En effet, identifiant $A$ et $\hat{\hat{A}}$ , on a $\alpha = {}^{tt}\alpha$ et d'après le théorème, on a $\deg {}^t\alpha \geqslant \deg \alpha$ et $\deg {}^{tt}\alpha \geqslant \deg {}^t\alpha$ .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CARTIER (Pierre). - Une nouvelle opération sur les formes différentielles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 426-428.

[2] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York et Londres, Interscience Publishers (à paraître).

[3] WEIL (André). - On Picard varieties, Amer. J. of Math., t. 74, 1952, p. 865-894.

[4] WEIL (André). - Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique, Math. Annalen, t. 128, 1954, p. 95-127.

[5] WEIL (André). - On the projective embedding of abelian varieties, Algebraic geometry and topology (A symposium in honor of S. Lefschetz). - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 177-181.