JEAN BRACONNIER

Sur les groupes de Lie compacts opérant dans une variété compacte

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 163, p. 367-378
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__367_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

SUR LES GROUPES DE LIE COMPACTS OPÉRANT DANS UNE VARIÉTÉ COMPACTE

par Jean BRACONNIER

(d'après G.D. MOSTOW [8], [9] et E.E. FLOYD [3]).

On se propose ici de montrer que, pour un groupe de Lie compact opérant dans une variété compacte, il n'existe qu'un nombre fini de stabilisateurs qui ne soient pas deux à deux conjugués (conjecture due à D. MONTGOMERY). La démonstration fournit un grand nombre de sous-produits intéressants. Fixons d'abord quelques notations et terminologies utiles dans la suite.

On supposera toujours que G désigne un groupe de Lie compact, et on notera G^* la composante connexe de l'élément neutre e de G.

a. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de sous-groupes fermés de G qui, avec chacun de ses termes, contient ses conjugués. La relation " K est conjugué d'un sous-groupe de H " est une relation de préordre dans $\mathfrak{S}$. La relation d'équivalence R qu'elle définit dans $\mathfrak{S}$ est "K et H sont conjugués" (car si $sHs^{-1} \subset K$ et $tKt^{-1} \subset H$, sHs^{-1} et K ont même nombre de composantes connexes et, comme H et K ont des algèbres de Lie isomorphes, on $sH^*s^{-1} = K^*$, d'où $sHs^{-1} = K$). Si l'ensemble quotient $\mathfrak{S}/R$ est fini, on dit que $\mathfrak{S}$ est semi-homogène.

b. Supposons maintenant que G opère dans un espace complètement régulier X, au moyen d'une application continue $(s, x) \longrightarrow sx$ de $G \times E$ dans E. Pour $x \in X$, on désignera par $G(x)$ le stabilisateur de x, et par Gx l'orbite de x, isomorphe à l'espace homogène $G/G(x)$; on a $G(sx) = sG(x)s^{-1}$ pour $s \in G$. On désigne par X/G l'espace des orbites (X/G est séparé et métrisable (resp. compact) si X l'est).

Soit $\mathfrak{S}$ la famille des stabilisateurs $G(x)$ $(x \in X)$. La relation de préordre : "il existe $t \in G$ tel que $t(G(y)t^{-1} = G(ty) \subset G(x)$ " induit dans X/G la relation de préordre : "il existe $t \in G$ tel que $sty \longrightarrow sx$ soit une application de Gy dans Gx ", qu'on lit : " Gy est en dessous de Gx " ; la relation d'équivalence qu'elle définit dans X/G est : "il existe $t \in G$ tel que $sty \longrightarrow sx$ soit un homéomorphisme de Gy sur Gx " et se lit : "les orbites Gy et Gx sont conjuguées". La classe de l'orbite d'un point $x \in X$ s'appelle le niveau de x. On dit que le niveau de x est en-dessous du niveau de y si l'orbite Gy est en dessous de l'orbite Gx. L'ensemble des niveaux est ordonné par cette relation. Le niveau d'un point $x \in X$ est fibré (en un sens convenable) avec l'espace homogène $G/G(x)$ pour fibre. Si l'ensemble des niveaux est fini, c'est-à-dire s'il n'existe qu'un nombre fini d'orbites non mutuellement conjuguées ou si $\mathfrak{S}$ est semi-homogène, on dira que l'espace X/G est semi-homogène.

c. Soit X un espace où opère un groupe G, Y un espace où opère un groupe H, et T une représentation de G dans H. On dit qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une T-application si l'on a $f(sx) = T(s)\, f(x)$ pour tout $s \in G$ et tout $x \in X$. Soit f une T-application de X dans Y. f définit canoniquement une application continue $f' : X/G \rightarrow Y/H$. Si $x \in X$ et si la restriction de f à Gx est injective, on a $T^{-1}(H(f(x)) = G(x)$ et, par passage aux quotients, T définit un isomorphisme de $G/G(x)$ dans $H/H(f(x))$. Si f est un T-homéomorphisme de X sur Y, f' est un homéomorphisme de X/G sur $Y/T(G)$ et f induit une bijection de l'ensemble des niveaux de X/G sur celui des niveaux de $Y/T(G)$: ces espaces sont en même temps semi-homogènes. Si, en outre, G opère fidèlement dans G, T est fidèle.

d. Si X est complètement régulier, on désignera par $\mathfrak{F}(X)$ l'ensemble des ensembles fermés de X. Si $\mathfrak{U}$ est le filtre des entourages d'une structure uniforme dans X, et si U décrit $\mathfrak{U}$, l'ensemble des couples A, B d'éléments de $\mathfrak{F}(x)$ tels que $A \subset U(B)$ et $B \subset U(A)$ décrit un système fondamental d'entourages dans une structure uniforme (séparée) sur $\mathfrak{F}(X)$. Si X est compact, $\mathfrak{F}(X)$ l'est aussi.

1. Un théorème d'immersion.

THÉORÈME 1. - *Si G opère dans l'espace complètement régulier X, soit $x \in X$. Alors il existe une représentation orthogonale T de G dans un $\mathbf{R}^n$ et une T-application de X dans $\mathbf{R}^n$ dont la restriction à l'orbite Gx est injective.*

LEMME 1. - *Soit H un sous-groupe fermé de G. Il existe une représentation unitaire T de G dans un $\mathbf{C}^n$ et un point $y \neq 0$ de $\mathbf{C}^n$ tels que H soit le stabilisateur de y lorsque G opère dans $\mathbf{C}^n$ par T.*

Soit $F \supset H$ un sous-groupe fermé de G, avec $F \neq H$. Il existe (cf. C. CHEVALLEY, [1], p. 192) une représentation unitaire T_F de G dont la restriction à F contient une représentation irréductible U_F de F telle que $U_F(H)$ laisse fixe un point $y_F \neq 0$ de l'espace de U_F. Soit $S_F \supset H$ le stabilisateur de y_F lorsque G opère dans l'espace de T_F par T_F. On vérifie alors que $H = \bigcap_F S_F$. Par suite, il existe un nombre fini de sous-groupes $F(i)$ tels que $H = \bigcap_i S_{F(i)}$.

Si T est la somme directe des $T_{F(i)}$ et $y = \sum_i y_{F(i)}$, le couple T, y vérifie les conditions du lemme.

REMARQUE. - Si $H \neq G$, on peut choisir les T_F (semi-simples) de telle sorte qu'elles ne contiennent pas l'unité : *alors* $T(G)$ *n'a pas de point fixe* $\neq 0$.

LEMME 2. (GLEASON [4]). - *Soient* Y *un compact de* X *stable par* G, T *une représentation orthogonale de* G *dans* $\mathbb{R}^n$, *et* g *une* T-*application de* Y *dans* $\mathbb{R}^n$. *Alors* g *se prolonge en une* T-*application* f *de* X *dans* $\mathbb{R}^n$.

Prendre $f(x) = T \underset{G}{*} \bar{g}(x) = \int_G T(s)\, \bar{g}(s^{-1} x)\, ds$, où $\bar{g}$ est un prolongement continu de g à X.

En appliquant le lemme 1 à $H = G(x)$, on obtient une représentation orthogonale T de G dans un $\mathbb{R}^n$, et un $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $G(x)$ soit le stabilisateur de y lorsque G opère dans $\mathbb{R}^n$ par T. Pour obtenir le théorème 1, on prolonge alors l'injection $sx \longrightarrow T(s)y$ de Gx dans $\mathbb{R}^n$ comme il est dit au lemme 2.

2. *Dissections*.

Soit X un espace dans lequel opère un groupe G, et soit x un point de X. On appelle *dissection locale de* X *passant par* x tout ensemble $K \subset X$ vérifiant les conditions suivantes :

a. K *est fermé et contient* x ;

b. *si* $s \in G$ *et* $y \in K$, *la relation* $sy \in K$ *est équivalente à* $s \in G(x)$;

c. *il existe une section locale continue* $\sigma : U \longrightarrow G$ *de* $G/G(x)$ *au-dessus d'un voisinage* U *de* $G(x)$ *telle que l'application* $(u, y) \longrightarrow \sigma(u)y$ (injective et continue dans $U \times K$) *soit un homéomorphisme de* $U \times K$ *sur un voisinage de* x.

Soit K une dissection locale passant par x. Pour tout $y \in B$, on a $G(y) \subset G(x)$ et $Gy \cap K = G(x)y$ (condition équivalente à b.) et K est stable par $G(x)$. La restriction de la projection $q_x : X/G(x) \longrightarrow X/G$ est un homéomorphisme de l'espace $K/G(x)$ dans le voisinage GK/G de l'orbite de x. *Si l'espace* $K/G(x)$ *est semi-homogène, il en est de même de l'espace* GK/G. En outre, si $s \in G$, sK est une dissection locale passant par sx. Se donner une dissection locale passant par x, c'est se donner une section locale λ de la projection q_x au dessus d'un voisinage W de l'orbite de x dans X/G : si $p_x : X \longrightarrow X/G(x)$, on a $W = GK/G$ et $K = p_x^{-1}(\lambda(W))$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_x"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X/G(x) \arrow[rr, "q_x"'] & & X/G \end{tikzcd}$$

LEMME 3. - Soit K une dissection locale passant par le point $x \in X$. L'ensemble des $y \in X$ tels que $G(sy) \subset G(x)$ pour un $s \in G$ (i.e. dont le niveau est au-dessous de celui de x) est un voisinage ouvert de x. L'ensemble des $y \in Y$ dont le niveau est au-dessus de celui de x est fermé.

Cela résulte immédiatement de la définition de K.

Une section locale de $p : X \to X/G$ passant par le point $x \in X$ peut se définir par un ensemble fermé $K \subset X$, contenant x, tel que les points de K aient même stabilisateur $G(x)$ et des orbites mutuellement distinctes et que GK soit un voisinage de x.

LEMME 4. - Si le niveau de x est un voisinage de x, toute dissection locale passant par x est une section locale passant par x (et réciproquement).

C'est une conséquence facile des définitions.

On a le résultat bien connu suivant (cf. [5], [8] et aussi D. MONTGOMERY, H. SAMELSON and C.T. YANG [7]) :

PROPOSITION 1. - Soit X une variété différentiable dans laquelle opère différentiablement un groupe G, et soit $x \in X$. Alors il passe par x une dissection locale K pour laquelle il existe une représentation orthogonale T de $G(x)$ dans un $\mathbb{R}^m$ et un T-homéomorphisme différentiable c de K sur une boule de $\mathbb{R}^m$ de centre $c(x) = 0$.

D'après BOCHNER, il existe un système c de coordonnées locales défini dans un voisinage V de x stable par $G(x)$ et une représentation orthogonale T de $G(x)$ telle que c soit un T-homéomorphisme. L'espace tangent à Gx est stable par $T(G(x))$ donc aussi son orthogonal $\mathbb{R}^m$. On obtient alors la dissection K en réduisant convenablement par le théorème des fonctions implicites l'application régulière $(u, y) \to \sigma(u)y$ de $U_0 \times K_0$ dans V, où σ est une section locale de $G \to G/G(x)$ au-dessus d'un voisinage assez petit U_0 et où $c(K_0)$ est une boule de $\mathbb{R}^m$ de centre $0 = c(x)$.

REMARQUE. - Avec les notations de la proposition 1, soit $G' = T(G(x))$. G' opère dans la sphère $\mathbb{S}_{m-1}$ avec les mêmes stabilisateurs que s'il opère dans $\mathbb{R}^m$. Si donc l'espace $\mathbb{S}_{m-1}/G'$ est semi-homogène, il en est de même de $\mathbb{R}^m/G'$, donc de $K/G(x)$, et par suite de GK/G (cf. théorème 4, a.).

THÉORÈME 2. - Soit X un espace complètement régulier dans lequel opère un groupe G. Par tout point de X passe une dissection locale.

Soit en effet $x \in X$. D'après le théorème 1, il existe une représentation orthogonale T de G dans $\mathbb{R}^n$ et une T-application continue f de X dans $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à Gx est un homéomorphisme. Soit $G' = T(G)$ et $y = f(x)$ On a $G(x) = T^{-1}(G'(y))$ et, par passage aux quotients, T définit un isomorphisme $\varphi : G/G(x) \longrightarrow G'/G'(y)$. D'après la proposition 1, il existe une dissection locale L passant par le point y de l'espace $\mathbb{R}^n$ où opère G'. Soit σ' une section locale de $G' \longrightarrow G'(y)$ définie dans un petit voisinage U' de $G(y)$, telle que $\sigma'(U')L$ soit un voisinage de y. Soit alors $K = f^{-1}(L)$ et τ une section locale de T définie dans un voisinage de l'élément neutre de G' contenant $\sigma'(U')$; $\sigma = \tau \cdot \sigma' \cdot \varphi$ est une section locale de $G \longrightarrow G/G(x)$ définie dans le voisinage $U = \varphi^{-1}(U')$ de $G(x)$ et on vérifie immédiatement que $\sigma(U)K = f^{-1}(\sigma'(U')L)$ est un voisinage de x. K est ainsi une dissection locale passant par le point $x \in X$.

Il existe une autre démonstration du théorème 2 due à D. MONTGOMERY et YANG [6] dans le cas où X est soumis à des conditions subversives de métrisabilité et de dénombrabilité ; cette démonstration s'appuie d'ailleurs sur un théorème de Michael dont la démonstration est très affreuse.

COROLLAIRE [4]. - Soit x un point de X tel que le niveau de x soit un voisinage de x. Il passe par x une section locale de $X \longrightarrow X/G$.

C'est une conséquence du lemme 4. Parmi les importantes conséquences du théorème 2, citons la suivante dont on aura besoin plus loin :

PROPOSITION 2.- Soit H un sous-groupe fermé de G. Il existe un voisinage V de H tel que tout sous-groupe fermé $K \subset V$ soit conjugué d'un sous-groupe de H.

En effet G opère dans l'espace compact $\mathfrak{F}(G)$ au moyen des translations à gauche et on a $H = G(H)$ pour le sous-groupe fermé H de G. Comme il existe, dans $\mathfrak{F}(G)$ une dissection locale passant par H, l'ensemble des ensembles fermés A de G tels que $G(sA) \subset H$ pour un $s \in G$ est un voisinage $\mathfrak{V}$ de H. Il existe un voisinage U de e dans G tel que, si K est un sous-groupe fermé contenu dans UH (donc tel que $KH \subset UH$ et $H \subset UKH$), on ait $KH \in \mathfrak{V}$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in G$ tel que $sKs^{-1} \subset G(sKH) \subset H$,

C.Q.F.D.

REMARQUE. - La proposition 2 reste exacte lorsque H est un sous-groupe compact d'un groupe de Lie G quelconque (MONTGOMERY).

3. Groupes abéliens opérant dans une variété compacte.

Si le groupe G opère dans l'espace X, on désignera par $X(G)$ l'ensemble fermé formé des points de X fixes par G.

PROPOSITION 3. – *Soit G un groupe opérant dans un espace compact X. Si (G_n) est une suite de sous-groupes fermés de G qui, dans $\mathfrak{F}(G)$, converge vers G, la suite $(X(G_n))$ converge vers $X(G)$ dans $\mathfrak{F}(X)$.*

En effet, soient U un voisinage de e dans G, et x un point de X fixe par tous les G_n ; on a $G = UG_n \subset UG(x)$ si n est assez grand. D'où $X(G) = \bigcap_n X(G_n)$. Si $(X(G_n))$ ne converge pas vers G, on peut trouver un voisinage V de $X(G)$ et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$, avec $x_{\varphi(n)} \in X(G_{\varphi(n)}) \cap \complement V$; cette suite posséderait une valeur d'adhérence $x \in X(G) \cap \complement V$, ce qui est très absurde.

On a alors le théorème capital suivant :

THÉORÈME 3 [3]. – *Soit G un groupe abélien opérant dans une variété compacte et orientable X. Si (G_n) est une suite de sous-groupes fermés de G qui converge vers G, la suite $(X(G_n))$ est stationnaire.*

a. Considérons d'abord un espace compact X qui soit une variété homologique (au sens de P.A. SMITH, précisé par FLOYD [3] et YANG) : ceci suppose en particulier que X est de dimension finie r et que tout voisinage compact V' d'un point $x \in X$ contient un voisinage compact W de x tel que l'homomorphisme naturel $H_q(W ; \mathbb{Z}_p) \to H_q(V ; \mathbb{Z}_p)$ soit 0 pour tout $q \geqslant 0$ et tout entier premier p (si cette propriété a lieu pour un p, on dit que X est une variété homologique mod p). On dit que X est orientable (resp. orientable mod p) si, pour toute composante connexe Y de X, on a $H_r(Y ; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ pour tout p (resp. pour le p envisagé). Si X est connexe et orientable et si $Y \subset X$ est un ensemble fermé $\neq X$, on a $H_r(Y ; \mathbb{Z}_p) = 0$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $Y_n \subset X$ une variété homologique mod p_n ; on dit que la suite (Y_n) converge régulièrement vers une variété homologique $Y \subset X$ si (Y_n) converge vers Y dans $\mathfrak{F}(X)$ et si tout voisinage compact V d'un point $x \in Y$ contient un voisinage compact W de x tel que, pour tout n assez grand et tout $q \geqslant 0$, les homomorphismes naturels $H_q(W \cap Y_n ; \mathbb{Z}_{p_n}) \to H_q(V \cap Y_n ; \mathbb{Z}_{p_n})$ et $H_q(W \cap Y ; \mathbb{Z}_{p_n}) \to H(V \cap Y ; \mathbb{Z}_{p_n})$ soient nuls. Alors, *si Y et les Y_n sont connexes et orientables mod p_n et si $Y \subset Y_n$ pour tout n assez grand, la suite (Y_n) est stationnaire* : en effet, d'après un théorème de E.E. FLOYD ([2] p. 321), l'homomorphisme naturel

$H_q(Y ; \mathbb{Z}_{p_n}) \to H_q(Y_n ; \mathbb{Z}_{p_n})$ est bijectif pour tout n assez grand et pour tout $q \geq 0$; or, si $Y_n \neq Y$, on a $H_q(Y_n ; \mathbb{Z}_{p_n}) = \mathbb{Z}_{p_n}$ et $H_q(Y ; \mathbb{Z}_{p_n}) = 0$ pour $q = \dim(Y_n)$.

Supposons maintenant que G soit un tore opérant dans la variété homologique orientable X et que (G_n) soit une suite de p_n-groupes qui converge vers G. On montre alors que $X(G)$ est une variété homologique orientable et que pour chaque n, $X(G_n)$ est une variété homologique mod p_n orientable mod p_n, et que la suite $(X(G_n))$ converge régulièrement vers $X(G)$. Soient alors $x \in X(G)$ et $C(x)$ (resp. $C_n(x)$) la composante connexe de x dans $X(G)$ (resp. $X(G_n) \supset X(G)$) ; il existe alors un voisinage W_x de $C(x)$ tel que $C_n(x) = W_x \cap X(G_n)$ pour tout n assez grand (considérer l'homomorphisme nul $H_0(W \cap X(G_n) ; \mathbb{Z}_{p_n}) \to H_0(V \cap X(G_n) ; \mathbb{Z}_{p_n})$ où V et $W \subset V$ sont des voisinages de $y \in C(x)$ et recouvrir $X(G)$ par un nombre fini de tels W). Il en résulte que la suite $(C_n(x))$ converge régulièrement vers $C(x)$; d'après ce qui précède, elle est stationnaire. En recouvrant $X(G)$ par un nombre fini de W_{x_i}, on a $X(G_n) = \bigcup_i C_n(x_i)$ pour tout n assez grand, car $(X(G_n))$ converge vers $X(G)$. La suite $(X(G_n))$ est donc stationnaire, et le théorème est démontré dans le cas envisagé

b. Supposons maintenant que G soit un tore de dimension r et que les G_n soient des groupes finis. On va prouver le théorème 4 (trivial pour $r = 0$) par récurrence sur r. Lorsque n augmente indéfiniment, l'ordre de G_n tend vers $+\infty$: il existe donc un p_n-groupe $H_n \subset G_n$ dont l'ordre tend vers $+\infty$ avec n : on peut donc supposer que (H_n) converge vers un sous-groupe H de G et on a $H^* \neq 0$. La tore G/H^* est de dimension $< r$ et il opère sur la variété homologique compacte et orientable $Y = X(H^*)$; d'autre $(G_n H^*/H^*)$ tend vers G/H^*. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$X(G) = Y(G/H^*) = Y(G_n H^*/H^*) = X(G_n H^*) = X(G_n) \cap X(H^*)$$

pour tout n assez grand. D'autre part, la suite $(H_n \cap H^*)$ de p_n-groupes converge vers le tore H^* et, d'après a., on a $X(H^*) = X(H_n \cap H^*) \supset X(G_n)$ pour tout n assez grand ; d'où $X(G) = X(G_n)$.

c. Supposons maintenant que G soit un tore et que les G_n soient quelconques. Soit (U_n) un système fondamental décroissant de voisinages de e dans G et, pour tout n, soit G'_n un sous-groupe fini tel que $G'_n \subset G_n \subset U_n G'_n$. Si $m \geq n$ est assez grand, on a $G = U_n G_m \subset U_n^2 G'_m$: (G'_n) converge vers G. On a donc, si n est assez grand, $X(G) \subset X(G_n) \subset X(G'_n) = X(G)$ d'après b. .

d. Supposons enfin G *et les* G_n *quelconques*. $(G_n \cap G^*)$ converge vers G^* et, d'après c., on a $X(G^*) = X(G_n \cap G^*) \supset X(G_n)$ pour tout n assez grand. Comme G^* est ouvert, on a $G^*G_n = G$ si n est assez grand et

$$X(G) = X(G^*G_n) = X(G^*) \cap X(G_n) = X(G_n)$$

C.Q.F.D.

4. *Le théorème fondamental.*

THÉORÈME 4 ([3], [9]). - *Si* G *opère dans une variété compacte* X , *l'espace* X/G *est semi-homogène.*

a. On va d'abord montrer le résultat lorsque G *opère différentiablement dans une variété différentiable* X , en raisonnant par récurrence sur la dimension n de X . Si $n = 0$, le résultat est trivial (X est fini). S'il est vrai pour toute variété X de dimension $m < n$ $(n > 0)$, soit X une variété de dimension n , dans laquelle G opère différentiablement. En vertu de l'hypothèse de récurrence et de la remarque faite après la proposition 1, par tout $x \in X$ passe une dissection locale K_x telle que $K_x/G(x)$ soit semi-homogène et il en résulte que GK_x/G l'est aussi. D'où l'assertion en recouvrant X par un nombre fini de voisinages GK_x (il existe une autre démonstration de ceci due à YANG [10] et un peu différente de la présente due à MOSTOW [8]).

COROLLAIRE 1. - *Si* G *opère différentiablement dans une variété différentiable* X , *chaque point de* X *possède un voisinage* V *stable par* G *et tel que* V/G *soit semi-homogène.*

COROLLAIRE 2. - *L'ensemble des normalisateurs de sous-groupes analytiques de* G *est semi-homogène.*

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G . Si i est l'injection canonique de l'espace des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ dans l'espace projectif $P = P(\Lambda\, \mathfrak{g})$, G opère projectivement dans P au moyen de $ad(s)$ $(s \in G)$ et on a $si(F) = i(ad(s)F)$. Si H est un sous-groupe analytique de G , $G(i(\mathfrak{h}))$ (formé des $s \in G$ tels que $ad(s)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$) est le normalisateur de H . D'où le corollaire puisque l'espace P/G est semi-homogène.

COROLLAIRE 3. - *L'ensemble des sous-groupes analytiques semi-simples de* G *est semi-homogène.*

En effet, il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes semi-simples de G ayant le même normalisateur H (car dans $\mathfrak{h}$, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux semi-simples).

b. Prouvons maintenant le théorème lorsque G *est un groupe abélien opérant dans une variété compacte et orientable* X. Supposons qu'il existe une suite (x_n) de points de X telle que les $G(x_n)$ soient distincts. On montre que la suite $G(x_n)$ possède une valeur d'adhérence H, où H est un sous-groupe de G. D'après la proposition 2 et le théorème 3 la suite $X(G(x_n))$ est stationnaire : il existe donc des couples d'entiers distincts m, n tels que $X(G(x_m)) = X(G(x_n))$, donc tels que $G(x_m) = G(x_n)$, ce qui est absurde.

c. Prouvons alors le théorème 4 lorsque G *est un tore opérant sur une variété compacte non orientable* X. On peut supposer X connexe et G opérant fidèlement dans X. Soit (Y, p) un double revêtement orientable de X. On peut recouvrir X par un nombre fini de voisinages $V(x_i)$ de points $x_i \in X$ tels que la restriction de p à chaque composante connexe de $p^{-1}(V(x_i))$ soit un homéomorphisme de celle-ci sur $V(x_i)$ et trouver un voisinage symétrique et *connexe* U de e dans G tel que, pour tout $x \in X$, Ux soit contenu dans un $V(x_i)$. Si $s \in U$ et $y \in Y$, soit sy le point de $p^{-1}(sp(y))$ appartenant à la composante connexe de y dans un $p^{-1}(V(x_i))$ tel que $Up(y) \subset V(x_i)$. Les $y \to sy$ engendrent un groupe G' d'homéomorphismes de Y et il y a un *épimorphisme* $T : G' \to G$ dont le noyau est d'ordre ≤ 2. G' est donc un groupe de Lie, d'après b., l'ensemble des $G'(y)$ est fini. Comme, pour $y \in Y$, $G'(y)$ est un sous-groupe distingué de $T^{-1}(G(p(y))$ d'indice ≤ 2, l'ensemble des $T^{-1}(G(p(y))$ est fini d'après le lemme suivant, et il en est de même de celui des $G(x)$.

C.Q.F.D.

LEMME 5. - *Si* p *est un entier* > 0, *l'ensemble des sous-groupes fermés de* G *d'ordres* $\leq p$ *est semi-homogène.*

Supposons en effet qu'il existe une suite (G_n) de sous-groupes fermés de G, mutuellement non conjugués et d'ordres p. On montre que la suite (G_n) possède, dans $\mathcal{F}(G)$, une valeur d'adhérence qui est un sous-groupe *fini* H de G. D'après la proposition 2, il existe des valeurs de n aussi grandes qu'on veut telles que G_n soit conjugué d'un sous-groupe de H. Par suite, il existe un couple m, n d'entiers distincts tel que G_m et G_n soient conjugués, ce qui est absurde.

d. Supposons enfin X *et* G *quelconques*.

LEMME 6. - Soit H un sous-groupe fermé et connexe de G. Les groupes $G(x)/H$, où $x \in X$ est tel que $G(x)^* = H$, sont d'ordre bornés.

On peut supposer que H est distingué en remplaçant au besoin G par le normalisateur de H. Si $G(x)^* = H$, on a $G^*(x) \supset H$, $G(x)/G^*(x) = (G(x)/H)/(G^*(x)/H)$, et $G(x)/G^*(x)$ est un sous-groupe du groupe fini G/G^* d'ordre g. Soit alors T un tore maximal de G^* ; d'après c., il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes $T(x)$, donc qu'un nombre fini de $T(x)H/H$ où x est tel que $G(x)^* = H$. Mais alors, comme $T(x)H/H \subset G(x)/H$ est fini, les $T(x)H/H$ sont d'ordres bornés par un entier h. Soit $x \in X$ avec $G(x)^* = H$ et soit $s \in G(x)$; on a $s^g \in G^*(x)$; comme les conjugués de T recouvrent G^*, il existe $t \in G^*$ tel que $ts^g t^{-1} \in T \cap G(tx) = T(tx)$ et $G(tx)^* = H$, d'où $(ts^g t^{-1})^h \in H$ et $s^{gh} \in H$. Dans le groupe de Lie G/H, soit U un voisinage de H tel que U^{2gh} ne contienne pas de sous-groupe non trivial. On a alors $\operatorname{ord}(G(x)/H)\ \mu(U) \leq \mu(G/H)$ où μ est une mesure de Haar sur G/H.

COROLLAIRE. - L'ensemble des $G(x)$ (contenus dans le normalisateur de H) tels que $G(x)^* = H$ est semi-homogène.

C'est une conséquence du lemme 5.

LEMME 7. - L'ensemble des $G(x)^*$ est semi-homogène.

D'après le corollaire 2 de a., il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de $G(x)^*$ ayant même normalisateur. En remplaçant au besoin G par un tel normalisateur, il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes distingués de G de la forme $G(x)^*$ et on peut supposer G connexe puisque $G^*(x)^* = G(x)^*$. Mais, si $x \in X$, on a $G(x)^* = Z(G(x))^*\, D(G(x)^*)$ où $D(G(x)^*)$ est semi-simple et distingué et où $Z(G(x))^*$ est un tore distingué, donc central de G (car G est connexe). On a donc $Z(G(x))^* = (Z(G)^* \cap G(x))^*$ et, comme $Z(G)^*$ est un tore, il n'y a qu'un nombre fini de $Z(G)^* \cap G(x)$, donc de $Z(G(x))^*$ (d'après b.). D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini dd $D(G(x)^*)$ d'après le corollaire 3 de a. Il n'y a donc qu'un nombre fini de $G(x)^*$.

Le théorème 4 est alors conséquence immédiate du lemme 7 et du corollaire du lemme 6. En outre, en ajoutant ∞ à $\mathbb{R}^n$, on voit que :

COROLLAIRE 4. - Si G opère dans $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathbb{R}^n/G$ est semi-homogène.

REMARQUE. - Le théorème 4 est inexact si G ou X ne sont pas compacts. On peut ainsi construire une variété analytique non compacte X dans laquelle opère

T de telle sorte que les $G(x)$ soient tous les sous-groupes finis de T [10]. Le corollaire (donc le théorème 4) est inexact lorsque G n'est pas compact : on peut fabriquer un sous-groupe algébrique abélien G de $GL(R, 3)$, donc opérant linéairement dans R^3, de telle sorte que les $G(e_2 + e_3)$ soient tous distincts [8].

5. Compléments.

MOSTOW démontre en outre les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. - *Si X est un espace métrisable, de type dénombrable et de dimension finie dans lequel opère un groupe G, alors pour chaque niveau $N \subset X$, il existe un nombre fini de dissections locales K_i passant par des points de N et telles que les GK_i recouvrent N.*

La démonstration en est particulièrement astucieuse. Par recollement convenable des niveaux et utilisation du lemme 1, il prouve ensuite :

THÉORÈME 6. - *Si X vérifie les hypothèses du théorème 5 et si X/G est semi-homogène, il existe une représentation orthogonale T de G dans un R^n et un T-homéomorphisme de X dans R^n ; si G opère sans points fixes, $T(G)$ ne laisse fixe que 0.*

Inversement, il est clair que, si G est un groupe opérant fidèlement dans un espace X et s'il existe une représentation orthogonale de G dans un R^n et un T-homéomorphisme de X dans R^n, alors T est fidèle, donc G est de Lie, X est métrisable, de type dénombrable et de dimension finie et X/G est semi-homogène d'après le théorème 4, a. En particulier, si X *est une variété compacte où opère un groupe* G, *on voit que* G *y opère de la même manière qu'opère dans R^n un groupe orthogonal*. D'ailleurs, dans ce cas, il est facile de fabriquer (par régularisation) des T-plongements réguliers de X dans un R^n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups, I. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series n° 8).

[2] FLOYD (E.E.). - Closed coverings in Čech homology theory, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 319-337.

[3] FLOYD (E.E.). - Orbits of torus groups operating on manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 505-512.

[4] GLEASON (A.M.). - Spaces with a compact Lie group of transformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 35-43.

[5] KOSZUL (Jean-Louis). - Sur certains groupes de transformations de Lie, Colloque international de Géométrie différentielle [Strasbourg. 1953]. - Paris, C.N.R.S., 1953 (Coll. intern. du C.N.R.S. n° 52) ; p. 137-141.

[6] MONTGOMERY (D.) and YANG (C.T.). - The existence of a slice, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 108-116.

[7] MONTGOMERY (D.), SAMELSON (H.) and YANG (C.T.). - Exceptional orbits of highest dimensions, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 136-141.

[8] MOSTOW (G.D.). - Equivariant embeddings in euclidian space, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 432-446.

[9] MOSTOW (G.D.). - On a conjecture of Montgomery, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 513-516.

[10] YANG (C.T.). - On a problem of Montgomery, Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 255-257.