GUSTAVE CHOQUET

Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 139, p. 33-47
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__33_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1956)

EXISTENCE ET UNICITÉ DES REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES AU MOYEN DES POINTS EXTRÉMAUX DANS LES CÔNES CONVEXES.

par Gustave CHOQUET

1. Introduction.

L'analyse fournit de nombreux exemples de cônes convexes de fonctions dont tout élément est représentable au moyen de certains éléments privilégiés (éléments extrémaux) par une intégrale relative à une mesure ≥ 0.

Par exemple en se limitant à des exemples simples, en général connus

a. Fonctions continues complètement monotones sur $[0, +\infty[$.

b. Capacités alternées d'ordre ∞ sur un espace compact.

c. Mesures positives simplement additives sur l'algèbre des parties d'un ensemble.

d. Fonctions harmoniques ≥ 0 dans un espace de Green.

e. Fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact.

Dans ces exemples, les éléments privilégiés sont respectivement : (a) les fonctions $e^{-tx} (t \geq 0)$; (b) les capacités élémentaires (ne prenant que les valeurs 0 et 1) ; (c) les mesures (à valeurs 0 et 1) associées à un ultrafiltre; (d) certaines limites de fonctions de Green normalisées ; (e) les fonctions élémentaires associées à une représentation unitaire irréductible (les caractères dans le cas abélien).

Tantôt la représentation intégrale est unique, tantôt elle ne l'est pas (cas des fonctions de type positif sur certains groupes non abéliens).

Notre but est d'englober ces divers théorèmes affirmant l'existence de représentations intégrales, et parfois leur unicité, dans un théorème général.

2. Notations et rappel de définitions classiques.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel localement convexe (autrement dit un E.V.T. sur R, dont l'origine a une base de voisinages convexes ; par exemple tout espace normé) ; nous supposerons $\mathcal{V}$ séparé.

Dans $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{C}$ un cône convexe saillant pointé contenant son sommet 0 ; il définit dans $\mathcal{V}$ un ordre, noté $\prec$, tel que les relations $x \in \mathcal{C}$ et $x \succ 0$

soient équivalentes. Autrement dit, on pose $x \prec y$ si $(y - x) \in \mathcal{C}$. Un élément x de $\mathcal{C}$ est dit extrémal si les relations $y \prec x$ et $y \prec \mathcal{C}$ entraînent $y = \lambda x$ $(\lambda \geq 0)$; ceci équivaut à dire que x est un point extrémal, au sens ordinaire, de toute section de $\mathcal{C}$ par un sous-espace affine de E ne contenant pas 0. Une génératrice de $\mathcal{C}$ contenant un point extrémal est dite extrémale ; tous ses points sont des éléments extrémaux de $\mathcal{C}$.

Nous supposerons par la suite que le sommet 0 de $\mathcal{C}$ possède dans $\mathcal{C}$ un voisinage compact : ceci équivaut à dire qu'il existe un sous-espace affine L de $\mathcal{Y}$ qui rencontre toute génératrice de $\mathcal{C}$ (hors de 0) et tel que $\mathcal{B} = L \cap \mathcal{C}$ soit compact ; l'ensemble $\mathcal{B}$ est appelé base de $\mathcal{C}$.

Nos théorèmes de représentation seront énoncés relativement à une base, mais on verra aisément qu'on pourrait remplacer une telle base par n'importe quelle partie compacte de $\mathcal{C}$ rencontrant chaque génératrice en un point et un seul (distinct de 0).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de la base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{E}$ est identique à l'ensemble des intersections de L avec les génératrices extrémales de $\mathcal{C}$).

Pour tout espace localement compact X, on notera par $\mathfrak{M}_X$ l'espace vectoriel des mesures de Radon sur X, muni de la topologie vague ; par $\mathfrak{M}_X^+$ le cône convexe des mesures positives ; par $\mathfrak{M}_X^1$ la partie convexe de $\mathfrak{M}_X^+$ constituée par les mesures de masse totale $\|\mu\| = 1$; et par X^0 la partie de $\mathfrak{M}_X$, identifiable à X, constituée par les mesures ponctuelles unité ε_x $(x \in X)$.

On rappelle que lorsque X est compact et métrisable, $\mathfrak{M}_X^+$ est aussi métrisable.

Plus généralement, pour toute partie A de X, on note par $\mathfrak{M}_A$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{M}_X$ telles que toute partie de $\complement A$ soit μ-mesurable et de μ-mesure nulle ; et par $\mathfrak{M}_A^1$ la partie convexe de $\mathfrak{M}_A$ constituée par les mesures positives de masse totale 1.

Lorsque μ et A sont tels que A soit μ-mesurable, on note par μ_A la trace de μ sur A.

1° Résultante d'une mesure. Enoncé des problèmes. – Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$, l'intégrale vectorielle $x_\mu = \int x \, d\mu(x)$ a un sens et s'appelle la résultante de μ (lorsque $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^1$, x_μ est le barycentre de μ). L'application $\varphi : x \to x_\mu$ est une application linéaire, continue et croissante de $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^+$ dans $\mathcal{C}$.

Les éléments de $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ dont la résultante est dans $\mathcal{B}$ sont les éléments de $\mathfrak{M}^1_{\mathcal{B}}$. On a évidemment $\varphi(\mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}) = \mathcal{C}$ puisque $\varphi(\varepsilon_x) = x$ pour tout $x \in \mathcal{B}$. Nos problèmes sont les suivants :

a. Existence. - Est-ce que $\varphi(\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}) = \mathcal{C}$, ou encore $\varphi(\mathfrak{M}^1_{\mathcal{E}}) = \mathcal{B}$? Lorsque $\mathcal{E}$ est compact, $\mathfrak{M}^1_{\mathcal{E}}$ l'est aussi, donc aussi $\varphi(\mathfrak{M}^1_{\mathcal{E}})$, et comme cet ensemble est partout dense dans $\mathcal{B}$ d'après le théorème de Krein et Milman, il est bien identique à $\mathcal{B}$. Les difficultés ne commencent que lorsque $\mathcal{E}$ n'est pas compact (exemples 4.5).

b. Unicité. - Dans quels cas la restriction de φ à $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$ est-elle biunivoque ? Autrement dit, si μ_1 et $\mu_2 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$, dans quels cas $x_{\mu_1} = x_{\mu_2}$ entraine-t-il $\mu_1 = \mu_2$?

2° Mesures équivalentes. - On dit que $\mu_1 \sim \mu_2$ (où μ_1 et $\mu_2 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$) si $x_{\mu_1} = x_{\mu_2}$. Deux mesures équivalentes ont même masse totale ; les classes d'équivalence sont les parties convexes compactes $\varphi^{-1}(x)$ de $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$.

Si $x_{\mu_1} \prec x_{\mu_2}$, on a :

$$\mu_2 = \mu_1 + \nu \qquad (\text{où } \nu \geqslant 0),$$

d'où

$$\|\mu_1\| \leqslant \|\mu_2\| .$$

3. Outils et méthodes.

Un outil essentiel sera celui des diffusions, dont le maniement commode s'impose dans les théories basées sur la notion de mesure (potentiel, probabilités, théorie ergodique).

Un procédé essentiel qui permettra de faire intervenir la propriété caractéristique des points extrémaux sera la stabilisation d'une mesure.

3° Esquisses.

a. Existence. - Partant d'une mesure $\mu_0 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ on la remplacera d'abord (par diffusion) par une mesure équivalente μ_V portée par un voisinage convenable V de $\mathcal{E}$; puis on fera décroître ce voisinage et la limite des mesures μ_V sera la mesure cherchée. La difficulté consiste dans le fait que $\mathcal{E}$ n'est pas en général compact ; pour s'assurer que la limite des μ_V est bien portée par $\mathcal{E}$, on remplacera donc, à chaque stade de l'opération, la mesure μ_V par une somme de mesures dont chacune soit stable par rapport à V, et même par rapport à de petits ouverts de V.

b. Unicité. - L'idée à mettre en oeuvre est ici que, si deux mesures μ_1 et μ_2 sont stables respectivement par rapport à deux parties disjointes A_1 et A_2 de $\mathcal{B}$, toute mesure ν sur $\mathcal{B}$ telle que $x_\nu \prec (x_{\mu_1}$ et $x_{\mu_2})$ est nécessairement nulle.

4. Diffusions.

Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons à un type particulier de diffusions.

DÉFINITION 1. - Soient E et F deux espaces compacts. On appelle diffusion de E dans F toute application linéaire croissante $\Psi : \mu \to \Psi(\mu)$ de $\mathfrak{M}_E$ dans $\mathfrak{M}_F$ qui soit continue pour les topologies fortes (liées à la norme) de $\mathfrak{M}_E$ et $\mathfrak{M}_F$. Pour tout fermé X de E, on note Ψ_X la restriction de Ψ à $\mathfrak{M}_X$.

On dit qu'une diffusion Ψ est conservative si pour toute μ, les masses totales de μ et $\Psi(\mu)$ sont égales.

Les diffusions les plus importantes sont continues pour les topologies faibles sur $\mathfrak{M}_E$ et $\mathfrak{M}_F$. Ces diffusions seront dites continues.

EXEMPLES de diffusion.

1° Si $E = F$ = groupe compact, et si α est une mesure $\geqslant 0$ sur E, l'application $\mu \to \alpha * \mu$ définie par la convolution ordinaire est une diffusion continue ; elle est conservative lorsque $\|\alpha\| = 1$.

2° Soit Ψ une application continue de E dans F ; elle se prolonge de façon unique en une diffusion continue et conservative Ψ de E dans F, donnée par la formule :

$$\int f d\Psi(\mu) = \int (f \circ \Psi)\, d\mu ,$$

où f est une fonction numérique continue dans F ; autrement dit, $\Psi(\mu)$ est l'image de μ par Ψ.

3° Soit g une fonction numérique borélienne, bornée et $\geqslant 0$, sur E compact. L'application $\mu \to g\mu$ de $\mathfrak{M}_E$ dans lui-même est une diffusion, qui n'est continue que si g est continue.

4° Soient E et F deux boules fermées de R^3 ; à toute $\mu \in \mathfrak{M}_E$, la théorie du potentiel newtonien fait correspondre une $\Psi(\mu) \in \mathfrak{M}_F$, appelée la balayée de μ sur F. L'application Ψ est une diffusion continue, qui abaisse les masses.

a. Opérations sur les diffusions.

1° Combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$

2° Composition : Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux diffusions $\mathfrak{M}_E \to \mathfrak{M}_F$ et $\mathfrak{M}_F \to \mathfrak{M}_G$ l'application composée $\Psi_2 \cdot \Psi_1$ est une diffusion ; lorsque Ψ_1 et Ψ_2 sont continues, leur composée l'est aussi.

b. Diffusion prolongeant une application de E dans $\mathfrak{M}_F$. - Pour toute application continue ψ de E dans $\mathfrak{M}_F$, la fonction vectorielle ψ est intégrable pour toute mesure μ sur E. Posons $\Psi(\mu) = \int \psi \, d\mu$. L'application Ψ est une diffusion continue de E dans F qui prolonge l'application donnée ψ (ψ peut en effet être considérée comme application de E^o dans $\mathfrak{M}_F$). En particulier on voit qu'une diffusion continue est entièrement déterminée par sa restriction à l'ensemble E^o des mesures ε_x $(x \in E)$.

Nous allons étendre cette notion de prolongement à des applications ψ non continues.

DEFINITION 2. - Disons qu'une application ψ de E compact dans F topologique est universellement mesurable si, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur E, et tout $\varepsilon \geqslant 0$ il existe un compact K de E tel que la restriction de ψ à K soit continue, et tel que $\mu(\complement K) < \varepsilon$. Une partie A de E est dite universellement mesurable si sa fonction caractéristique l'est.

LEMME 1. - Soit ψ une application universellement mesurable de E dans $\mathfrak{M}_F$ telle que $\psi(E)$ soit relativement compact (autrement dit l'ensemble des $\|\psi(x)\|$ est borné). Alors, ψ considérée comme application de E^o dans $\mathfrak{M}_F$ se prolonge d'une façon et d'une seule en une diffusion Ψ de E dans F telle que, pour tout compact K de E sur lequel ψ est continue, Ψ_K soit le prolongement continu de ψ_K.

Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_E$, $\Psi(\mu)$ n'est autre que l'intégrale vectorielle $\int \psi \, d\mu$.

On vérifiera aisément que si A est une partie universellement mesurable de F telle que pour tout $x \in E$ la mesure $\psi(x)$ soit portée par A, la mesure $\Psi(\mu)$ est aussi portée par A quelle que soit μ (traiter d'abord le cas où ψ est continue et où A est ouvert).

Revenons maintenant au cas où $E = F =$ base $\mathcal{B}$ du cône $\mathcal{C}$.

LEMME 2. - Soit ψ une application universellement mesurable de $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}$, la mesure $\psi(x)$ ait pour résultante x (ce qui implique

$\|\psi(x)\| = 1)$.

<u>Si</u> Ψ <u>est la diffusion de</u> $\mathcal{B}$ <u>dans</u> $\mathcal{B}$ <u>qui prolonge</u> ψ , <u>on a</u> $\mu \sim \Psi(\mu)$ <u>pour toute</u> $\mu \in \mathfrak{M}$.

En effet, on a par hypothèse :

$$x = \int u \, d\, \psi(x)(u) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{B} ,$$

d'où en intégrant les deux membres par rapport à μ :

$$\int x \, d\mu(x) = \int u \, dm(u) \quad \text{où} \quad m = \int \psi(x) \, d\mu(x) = \Psi(\mu) ,$$

ce qui s'écrit bien $\mu \sim \Psi(\mu)$.

Ce lemme fournit, <u>dans le cas où</u> $\mathcal{B}$ <u>est métrisable</u>, un moyen puissant de construction de mesures équivalentes à une mesure donnée :

LEMME 3. - <u>Soit</u> A <u>une partie quelconque de</u> $\mathcal{B}$, <u>et</u> B <u>une partie borélienne de</u> $\mathcal{B}$, <u>telles que, pour tout</u> $x \in A$, <u>il existe une mesure</u> μ <u>de résultante</u> x <u>telle que</u> $\mu(B) \neq 0$.

<u>Alors lorsque</u> $\mathcal{B}$ <u>est métrisable, il existe pour toute mesure</u> $\nu \neq 0$ <u>sur</u> A <u>une mesure</u> $\nu' \sim \nu$ <u>telle que</u> $\nu'(B) \neq 0$.

En effet, soit f_B la fonction caractéristique de B ; elle est borélienne, donc l'ensemble M des $\mu \in \mathfrak{M}^1_{\mathcal{B}}$ telles que $\int f_B \, d\mu > 0$ est borélien ; or par hypothèse $\varphi(M) \supset A$; d'après un théorème bien connu (concernant l'existence de sections) il existe donc, <u>puisque</u> $\mathfrak{M}$ <u>est métrisable</u>, une application analytique g de $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que $\varphi \circ g =$ identité, et telle que $g(x) \in M$ pour tout $x \in \varphi(M)$.

Si G est la diffusion qui prolonge g , la mesure $\nu' = G(\nu)$ est, pour toute ν sur A , la mesure cherchée.

DÉFINITION 3. - <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux parties disjointes universellement mesurable de</u> $\mathcal{B}$. <u>On dit que</u> A <u>est évitable à l'aide de</u> B , <u>et on note</u> $(A|B)$, <u>si pour toute mesure</u> $\mu \neq 0$ <u>portée par</u> A , <u>il existe une</u> $\mu' \sim \mu$ <u>telle que</u> $\mu'(A) = 0$ <u>et</u> $\mu'(B) \neq 0$.

<u>On dit simplement que</u> A <u>est évitable si</u> $(A|\complement A)$.

REMARQUE. - Il est immédiat que la condition $(A|B)$ équivaut à ce que pour toute $\mu \neq 0$ portée par A , il existe une $\mu' \sim \mu$ telle que $\mu'(B) \neq 0$ (utiliser le théorème de Zorn ou une construction de caractère transfini).

LEMME 4. - Lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable, pour que $(A|B)$, il faut et il suffit que $(\{x\}|B)$ pour tout $x \in A$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 3 et de la remarque ci-dessus.

DÉFINITION des ouverts $\mathcal{E}_h$. - Nous allons maintenant faire intervenir l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

Supposons $\mathcal{B}$ métrisable ; le cône $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ l'est alors aussi ; munissons $\mathcal{B}$ et $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ une fois pour toutes d'une distance compatible avec leur topologie.

L'application φ étant continue, l'ensemble convexe compact $\varphi^{-1}(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement de x, donc son diamètre $\Delta(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement ; en particulier, pour tout $h > 0$, l'ensemble $\mathcal{E}_h$ des x tels que $\Delta(x) < h$ est ouvert (et c'est une fonction croissante de h). Les points x de $\mathcal{E}$ sont caractérisés par $\Delta(x) = 0$; d'où $\mathcal{E} = \bigcap_{h>0} \mathcal{E}_h$; on retrouve ainsi le fait que $\mathcal{E}$ est un G_δ lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable.

PROPOSITION 1. - Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Pour tout $h > 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout ensemble universellement mesurable $A \subset \mathcal{B}$ de diamètre $< \varepsilon$, on ait

$$((A \cap \complement \mathcal{E}_h)|(\complement A))$$

En effet, il existe évidemment un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x dans le compact $(\mathcal{B} \cap \complement \mathcal{E}_h)$, il y ait une μ de résultante x, dont le support ait un diamètre $> \varepsilon$.

Pour tout A de diamètre $< \varepsilon$ et tout $x \in A \cap \complement \mathcal{E}_h$, on a donc $(\{x\}|\complement A)$ d'où la proposition, d'après le lemme 4.

5. Stabilité. Stabilisation des mesures.

Nous ne supposons pas dans ce paragraphe que $\mathcal{B}$ soit métrisable.

DÉFINITION 4. - Soit A une partie quelconque de $\mathcal{B}$. On dit qu'une mesure μ est stable sur A, et on note $(\frac{\mu}{A})$ si toutes les mesures équivalentes à μ sont portées par A (donc μ l'est aussi).

Il évident que $[(\nu \leq \mu)$ et $(\frac{\mu}{A})] \Rightarrow (\frac{\nu}{A})$.

LEMME 5. - Soit A universellement mesurable $\subset \mathcal{B}$. Si $\mu \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$, il existe $\nu \sim \mu$ telle que $(\frac{\nu_A}{A})$.

En effet soit C_μ l'ensemble des mesures équivalentes à μ ; on le préordonne [1] par la relation : $(\mu \in \mu'$ si $\mu_{\complement A} \leq \mu'_{\complement A})$. L'ensemble préordonné C_μ est inductif ; la mesure ν est l'un quelconque de ses éléments maximaux.

LEMME 6. - <u>Pour tout compact</u> $X \subset \mathcal{B}$, <u>et pour tout entourage</u> W <u>de la structure uniforme de</u> $\mathcal{B}$, <u>il existe un compact</u> $X' \subset X$, <u>avec</u> $X' \neq X$, <u>et un ouvert</u> ω <u>de</u> $\mathcal{B}$, <u>tels que</u>

1° $X \subset X' \cup \omega$

2° ω <u>soit petit d'ordre</u> W .

3° <u>Si</u> $(\frac{\mu}{X})$, <u>on a</u> $\mu \sim \mu' + \sum_1^\infty \mu_n$, <u>où</u> $(\frac{\mu'}{X'})$ <u>et</u> $(\frac{\mu_n}{\omega})$ <u>pour tout</u> n .

Soit x_0 un point extrémal quelconque de l'enveloppe convexe fermée de X (on sait que $x_0 \in X$) ; on prend pour ω un voisinage ouvert quelconque, petit d'ordre W , du point x_0 .

Soit alors V (où $V \subset \omega$) un voisinage ouvert de x_0 , assez petit pour que pour toute μ non nulle sur V , les relations $(\frac{\mu}{X})$ et $\mu \sim \nu$ entrainent $\nu(\omega) \neq 0$ L'existence de V résulte aisément du choix de x_0 . On pose enfin $X' = X \cap \complement V$ Pour démontrer la partie 3 de ce lemme il suffit d'utiliser le théorème de Zorn et la remarque suivante :

Si $(\frac{\mu}{X})$ sans que $(\frac{\mu}{X'})$, il existe, d'après le lemme 5, μ_1 et μ_2 telles que $\mu \sim \mu_1 + \mu_2$ où $(\frac{\mu_1}{\omega})$ et $\mu_1 \neq 0$.

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout entourage</u> W <u>de la structure uniforme de</u> $\mathcal{B}$, <u>et pour toute</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$, <u>il existe une suite</u> (μ_n) <u>de mesures positives dont chacune est stable sur un ouvert petit d'ordre</u> W , <u>et telle que</u> $\mu \sim \sum \mu_n$.

On va le montrer en utilisant le théorème de Zorn et le lemme 6. Appelons <u>grappe</u> d'ordre W tout système $(K , (\omega_i)_{i \in I})$ où K est un compact $\subset \mathcal{B}$ et où (ω_i) est une famille d'ouverts de $\mathcal{B}$ petits d'ordre W , et tels que

1° les ω_i et K recouvrent $\mathcal{B}$

2° pour tout $\mu \in \mathfrak{M}$ on ait : $\mu \sim \pi + \sum_1^\infty \mu_n$ où $(\frac{\pi}{K})$ et où pour tout n on ait $(\frac{\mu_n}{\omega_i})$ pour au moins un i .

On ordonne l'ensemble des grappes d'ordre W (W fixe) par la relation :

---

[1] Une relation de préordre sur un ensemble est une relation binaire réflexive et transitive. Le théorème de Zorn est valable pour une telle relation.

$$[(K\ ,\ (\omega_i)_{i\in I}) \prec (K'\ ,\ (\omega_i)_{i\in I'})] \text{ si } [K' \subset K \text{ et } I \subset I']$$

Cet ensemble est inductif ; d'après le lemme 6, chacun de ses éléments maximaux est de la forme $(\emptyset\ ,\ (\omega_i)_{i\in I_0})$; les ouverts d'une telle famille maximale fournissent les ouverts portant les mesures μ_n de l'énoncé.

6. Théorème d'existence.

THÉORÈME 1. - Si la base compacte $\mathcal{B}$ du cône $\mathcal{C}$ est métrisable, tout point de $\mathcal{C}$ est la résultante d'au moins une mesure portée par $\mathcal{E}$.

Donnons-nous une constante $h > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ la constante correspondante de la proposition 1.

D'après la proposition 2, pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ on a $\mu \sim \sum_1^\infty \mu_n$, où chaque μ_n est stable sur un ouvert ω_n de diamètre $< \varepsilon$. Or (proposition 1), on a $[(\omega_n \cap \complement \mathcal{E}_h) | (\complement \omega_n)]$; et comme $\left(\frac{\mu_n}{\omega_n}\right)$, μ_n est stable sur $\omega_n \cap \mathcal{E}_h$.

En résumé toute $\mu \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ équivaut à une somme de mesures dont chacune est stable sur un sous-ouvert de $\mathcal{E}_h$ de diamètre $< \varepsilon$, ce que nous exprimerons en disant que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut ε stabiliser μ sur $\mathcal{E}_h$.

On peut maintenant itérer ce procédé relativement à deux suites (h_n), (ε_n) décroissantes et tendant vers 0 : on peut, pour toute suite finie $i_1, i_2, \ldots, i_n$ d'entiers > 0, définir une mesure $\mu_{i_1 i_2,\ldots,i_n} \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$, qui soit stable sur un sous-ouvert de $\mathcal{E}_{h_n}$ de diamètre $< \varepsilon_n$, et de telle sorte que :

$$\mu \sim \sum_1^\infty \mu_p \quad ; \quad \mu_{i_1 i_2,\ldots,i_n} \sim \sum_{p=1}^\infty \mu_{i_1,i_2,\ldots,i_n,p}$$

Posons $\nu_n = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_n)} \mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

On a $\nu_n \sim \mu$, et la suite ν_n converge vers une mesure $\nu\ (\nu \sim \mu)$, portée par chacun des $\mathcal{E}_{h_n}$, donc par $\mathcal{E}$.

a. Existence dans le cas non métrisable. - La difficulté de ce cas vient de ce qu'on n'a alors rien d'analogue à la proposition 1. Voici le seul énoncé simple connu (que nous ne démontrerons pas).

PROPOSITION 3. - Pour une base compacte $\mathcal{B}$ quelconque, si $\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$ est fini ou dénombrable, tout point de $\mathcal{C}$ est la résultante d'au moins une mesure portée par $\mathcal{E}$.

Nous verrons plus loin (proposition 4) ce qu'on peut dire de l'ensemble $\varphi(\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}})$ des points représentables, lorsque $\mathcal{A}$ est réticulé.

b. Nature topologique de $\mathcal{E}$. - Lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ, donc est universellement mesurable. Par contre nous allons voir que si $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable, $\mathcal{E}$ n'est pas toujours universellement mesurable. Ceci permet de douter d'un théorème d'existence général analogue au théorème 1.

Voici le contre-exemple :

Remarquons que si un convexe $\mathcal{A}$ est un produit de convexes $\mathcal{A}_i$, on a la relation $\mathcal{E} = \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$ entre leurs ensembles de points extrémaux.

Prenons pour chaque $\mathcal{A}_i$ un convexe métrisable compact tel que $\bar{\mathcal{E}}_i$ soit homéomorphe à une circonférence, $\bar{\mathcal{E}}_i$ et $\mathcal{E}_i$ ne différant que par un seul point (il existe de tels A_i). Si l'ensemble I des indices a la puissance du continu, $\mathcal{E}$ n'est pas universellement mesurable. Ceci résulte de la remarque suivante : soit $\prod_{i \in I} K_i$ un produit de compacts K_i identiques à un même compact métrisable K, et soit D sa diagonale ; soit $x_i \in K$ et soit $A_i = K - \{a_i\}$. Alors $D \cap (\prod A_i) = D -$ (ensembles des $\dot{x}_i$) ; si donc I a la puissance du continu on peut choisir les x_i pour que cet ensemble ne soit pas universellement mesurable.

7. Unicité des représentations.

Nous allons maintenant chercher dans quels cas on peut affirmer que la relation $x_{\mu_1} = x_{\mu_2}$ (où μ_1 et $\mu_2 \in \mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}$) entraine $\mu_1 = \mu_2$.

a. Condition nécessaire. - Si tout point x de $\mathcal{C}$ est la résultante d'une mesure et d'une seule portée par $\mathcal{E}$, le cône $\mathcal{C}$ est réticulé pour l'ordre $\prec$.

En effet, la restriction de φ à $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ est alors une application linéaire et biunivoque de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{C}$; c'est donc un isomorphisme pour la structure linéaire, donc aussi pour l'ordre ; comme $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}$ est réticulé, $\mathcal{C}$ l'est aussi.

REMARQUE. - Plus généralement, s'il existe un sous-cône convexe réticulé $A \subset \mathcal{M}^+_{\mathcal{B}}$ tel que $\varphi(A) = \mathcal{C}$ et tel que la restriction de φ à A soit biunivoque, $\mathcal{C}$ est réticulé.

THÉORÈME 2. - Si le cône convexe $\mathcal{C}$ de base compacte $\mathcal{B}$ est réticulé (pour l'ordre $\prec$), tout point de $\mathcal{C}$ est la résultante d'au plus une mesure μ portée par $\mathcal{E}$.

Autrement dit la restriction de φ à $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$ est biunivoque. Ce théorème sera la conséquence des lemmes 7,8,9, (où l'on ne suppose pas $\mathcal{C}$ réticulé).

LEMME 7. - Soit K un compact de $\mathcal{E}$; soit V un voisinage universellement mesurable quelconque de K ; et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entourage W de la structure uniforme de $\mathcal{B}$ tel que, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$ de masse totale 1 portée par une partie de $\mathcal{B}$ rencontrant K et petite d'ordre W, et pour toute $\mu' \sim \mu$, on ait $\mu'(\complement V) < \varepsilon$.

C'est immédiat si K est réduit à un point ; de ce cas particulier on déduit le cas général par application du théorème de Borel-Lebesgue.

LEMME 8. - Soit K un compact de $\mathcal{E}$, V un voisinage universellement mesurable quelconque de K. Pour toute μ sur K, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$\mu \sim \pi + \sum \nu_i$ ($i \in I$ fini, π et $\nu_i \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$) où $\|\pi\| < \varepsilon$ et $(\frac{\nu_i}{V})$ pour tout i.

Soit W l'entourage associé à (K, V, ε) par le lemme 7. On fait une partition finie de μ en mesure μ_i de supports petits d'ordre W ; d'après le lemme 5, il existe $\mu'_i \sim \mu_i$ telle que $(\frac{\nu_i}{V})$ où ν_i = restriction de μ'_i à V. Si $\pi_i = \mu_i - \nu_i$, on a $\|\pi_i\| < \varepsilon \|\mu_i\|$. Donc si $\pi = \sum \pi_i$ on a bien $\|\pi\| < \varepsilon$.

LEMME 9. - Soient A universellement mesurable et $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{B}}$. Alors $[(x_{\mu_1} \prec x_{\mu_2})$ et $(\frac{\mu_2}{A})] \Rightarrow (\frac{\mu_1}{A})$.

En effet par hypothèse $x_{\mu_2} = x_{\mu_1} + y$ où $y \in C$; si $y = x_\nu$, on a donc $\mu_2 \sim \mu_1 + \nu$, donc $(\mu_1 + \nu)$ est portée par A, et a fortiori μ_1 l'est aussi

DÉMONSTRATION du théorème 2. - Pour montrer que la relation $x_{\mu_1} = x_{\mu_2}$ (où μ_1 $\mu_2 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$) entraine $\mu_1 = \mu_2$, il suffit évidemment de montrer que si μ_1 et $\mu_2 \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$ avec $\inf(\mu_1, \mu_2) = 0$, on a aussi $\inf(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}) = 0$.

1° Cas particulier. - μ_1 et μ_2 sont portées par deux compacts disjoints K_1 et K_2 de $\mathcal{E}$.

Soient V_1 et V_2 deux voisinages disjoints de K_1 et K_2 dans $\mathcal{B}$, et soit ε un nombre > 0 .

D'après le lemme 8 ; on a :

$$\mu_1 \sim \pi_1 + \sum \nu_1^i \quad ,$$

où $(\frac{\nu_1^i}{V_1})$ pour tout i , et $\|\pi_1\| < \varepsilon$.

On définit de même μ_2^j , π_2 et les ν_2^j .

Posons : $u = \inf(x_{\mu_1} , x_{\mu_2})$. On a (en vertu de l'inégalité de sous-distributivité valable dans tout cône convexe réticulé : $\inf(\sum x_i , \sum y_j) \leq \sum \inf(x_i , y_j)$)

$$u \leq \sum_{i,j} \inf(x_{\nu_1^i} , x_{\nu_2^j}) + x_{\pi_1} + x_{\pi_2} \quad ,$$

D'après le lemme 9, toute mesure ayant pour résultante $\inf(x_{\nu_1^i} , x_{\nu_2^j})$ est stable relativement à V_1 et V_2 , donc est nulle. Donc $u \leq x_{\pi_1} + x_{\pi_2}$; si donc $u = x_\alpha$, on a $\|\alpha\| \leq \|\pi_1\| + \|\pi_2\| < 2\varepsilon$; comme ε est arbitraire, $\|\alpha\| = 0$, donc $u = x_\alpha = 0$.

2° Cas général. - Si $\inf(\mu_1 , \mu_2) = 0$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux compacts disjoints $K_n \subset \mathcal{E}$ $(n = 1 , 2)$ tels que $\mu_n(\complement K_n) < \varepsilon$.

Désignons par ν_n et π_n les restrictions de μ_n à K_n et $\complement K_n$. On a (en vertu de l'inégalité de sous-distributivité)

$$\inf(x_{\mu_1} , x_{\mu_2}) \leq \inf(x_{\nu_1} , x_{\nu_2}) + x_{\pi_1} + x_{\pi_2}$$

D'après le cas particulier précédent, $\inf(x_{\nu_1} , x_{\nu_2}) = 0$; et on termine comme ci-dessus.

b. Autres formes du théorème 2.

DÉFINTION 5. - On dit qu'un ensemble convexe X d'un espace vectoriel E est un simplexe si l'intersection de deux ensembles X_1 et X_2 positivement homothétiques à X $(X_i = a_i + \lambda_i X$ où $\lambda_i \geqslant 0)$ est vide ou bien est un ensemble de même nature.

On montre assez aisément que, pour qu'un cône $\mathcal{C}$ de base $\mathcal{B}$ soit réticulé, il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ soit un simplexe ; dans R^n les cônes réticulés sont les cônes engendrés par p $(p \leq n)$ vecteurs linéairement indépendants; les simplexes compacts de R^n sont ceux de la géométrie élémentaire.

THÉORÈME 2 bis. - *Soit X un ensemble convexe compact d'un espace localement convexe, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Si tout point de X est, d'une façon et d'une seule, le barycentre d'une mesure positive portée par $\mathcal{E}$, X est un simplexe. Réciproquement, dans un simplexe X, tout point est le barycentre d'au plus une mesure positive portée par $\mathcal{E}$.*

C'est la traduction immédiate du théorème 2 et de la condition nécessaire qui le précéde.

c. *Interprétation de l'unicité au moyen des formes linéaires.* - Dans le cas particulier où l'ensemble $\mathcal{E}$ du théorème 2 est compact, ce théorème peut s'énoncer sous une nouvelle forme intéressante :

THÉORÈME 2 ter. - *Si le cône convexe $\mathcal{C}$ de base compacte $\mathcal{B}$ est réticulé et si $\mathcal{E}$ est compact, toute fonction numérique f définie et continue dans $\mathcal{E}$ se prolonge d'une façon et d'une seule en une fonction linéaire, définie et continue dans $\mathcal{C}$.*

Notons que le prolongement de f en une fonction linéaire continue dans l'espace $\mathcal{Y}$ tout entier n'est pas toujours possible : il suffit pour le voir de prendre pour $\mathcal{Y}$ l'espace des mesures de Radon sur $[0, 1]$ muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications $\mu \to \int g_n(x)\, d\mu(x)$ où g_n parcourt une suite totale dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$; puis on prend pour $\mathcal{C}$ le cône des mesures positives.

8. *Existence des représentations dans les cônes réticulés non métrisables.*

On pourrait s'attendre à ce qu'il soit plus aisé d'étendre le théorème 1 (d'existence) au cas non métrisable, lorsque $\mathcal{C}$ est réticulé. Il ne le semble pas. Cependant on peut préciser alors la structure de l'ensemble des éléments représentables : soit $\mathcal{C}$ un cône réticulé et soit $\mathcal{R} = \varphi(\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}})$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des points purement non représentables de $\mathcal{C}$ ($x \in \mathcal{N}$ si pour tout $y \prec x$, avec $y \neq 0$, on a $y \notin \mathcal{B}$)

PROPOSITION 4. - *$\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ sont deux sous-cônes convexes réticulés de $\mathcal{C}$, ils sont héréditaires en ce sens que si $x \in \mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{N}$), et si $y \prec x$, on a aussi $y \in \mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{N}$). D'autre part $\mathcal{C}$ est somme directe de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{N}$,* en ce sens que tout $x \in \mathcal{C}$ s'écrit d'une façon et d'une seule :

$$x = x_1 + x_2 , \quad \text{où} \quad x_1 \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathcal{N} .$$

Cette proposition est certes triviale si $\mathcal{B}$ est métrisable puisque alors $\mathcal{R} = \mathcal{C}$. Malgré son aspect purement algébrique, sa démonstration utilise largement la compacité de $\mathcal{B}$.

9. Exemple d'application des théorèmes 1 et 2 à la théorie ergodique.

Soulignons l'importance pratique du corollaire suivant des théorèmes 1 et 2 :

COROLLAIRE. - Si le cône $\mathcal{C}$ à base compacte $\mathcal{B}$ est métrisable et réticulé, il y a existence et unicité de la représentation de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{M}^+_{\mathcal{E}}$.

Soit par exemple X un espace compact métrisable, et soit (T_i) une famille de diffusions continues et conservatives de X dans lui-même. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}^+_X$ le cône convexe des mesures μ invariantes par les T_i , c'est-à-dire telles que $\mu = T_i\mu$ pour tout i ; on supposera qu'il existe de telles $\mu \neq 0$, ce qui est toujours le cas si les T_i permutent deux à deux.

Si $\mu_1 , \mu_2 \in \mathcal{C}$ et si $\nu = \inf(\mu_1 , \mu_2)$, on a : $T_i \nu \leq T_i \mu_1$ et $T_i \mu_2$, donc $T_i \nu \leq \nu$, ce qui entraine, puisque T_i est conservative, que $T_i \nu = \nu$.

Donc $\inf(\mu_1 ; \mu_2) \in \mathcal{C}$; il en est de même pour $\sup(\mu_1 ; \mu_2)$.

Donc $\mathcal{C}$ est un sous-treillis de $\mathcal{M}_X$ et il a évidemment une base compacte.

Donc toute mesure invariante admet une représentation intégrale et une seule au moyen de mesures invariantes extrémales (dites souvent mesures ergodiques).

C'est une généralisation d'un théorème connu concernant les mesures invariantes par un groupe d'automorphismes de X , et que l'on démontre en général de façon très différente.

Notons qu'en général l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas compact.

EXEMPLE. - X est le produit $U \times V$ où $U = (0 , 1)$ et $V = \text{tore } \frac{R}{Z}$, et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des μ' invariantes par l'homéomorphisme $(u , v) \rightarrow (u , v + f(u))$ où f est une fonction continue non constante.

Lorsque X n'est plus métrisable, l'unicité subsiste, mais on ne sait plus rien sur l'existence.

10. Structure des cônes réticulés.

Si $\mathcal{C}$ est réticulé et tel que $\mathcal{E}$ soit compact, $\mathcal{C}$ est isomorphe, pour l'ordre, la structure linéaire, et la topologie, au cône $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{E}}$. Donc sa structure est entièrement déterminée par la donnée de $\mathcal{E}$. Ce n'est plus vrai si $\mathcal{E}$ n'est pas compact. Nous signalerons simplement dans ce sens que, pour tout ensemble A qui est un G_δ d'un espace métrique compact, il existe un cône réticulé $\mathcal{C}$ (et en général une infinité de tels cônes non isomorphes) de base compacte $\mathcal{B}$ tel que $\bar{A}$ soit homéomorphe à $\bar{\mathcal{E}}$ dans une homéomorphie qui applique A sur $\mathcal{E}$.

Autrement dit non seulement $\mathcal{E}$ peut être un G_δ quelconque mais encore sa compactification par $\bar{\mathcal{E}}$ peut être quelconque.