Jean-Louis Koszul

Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 154, p. 245-254
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__245_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

FIBRÉS VECTORIELS SUR LES COURBES ELLIPTIQUES

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après M.F. ATIYAH [1] , [2])

On désigne par X une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Un fibré vectoriel E de base X est dit <u>décomposable</u> lorsqu'il est de dimension 0 ou somme directe de deux sous-fibrés de dimension > 0 . Tout fibré vectoriel est somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables. De plus, si F est un fibré indécomposable de base X et si dans une décomposition du fibré E en somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables il y a p sous-fibrés isomorphes à F , alors il en est de même de toute décomposition (théorème du type Krull-Schmidt, cf. [1]). Dans [2], ATIYAH détermine l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique non singulière et précise sa structure. Auparavant, seul le cas des courbes de genre 0 était bien connu (cf. [3]).

1. <u>Ensembles</u> $J(r , d)$.

On suppose que X est non singulière. Pour tout fibré vectoriel E de dimension r , on désigne par $\det E$ le fibré vectoriel de dimension 1, puissance extérieure r-ième de E (ses fonctions de passage s'obtiennent en prenant le déterminant des fonctions de passage de E). Pour toute suite exacte $0 \to E \to E' \to E'' \to 0$, on a $\det E' \simeq \det E \otimes \det E''$. Si E et E' sont deux fibrés de dimensions r et r' respectivement, on a

$$\det(E \otimes E') \simeq (\det E)^{r'} \otimes (\det E')^{r}$$

les exposants désignant des puissances tensorielles. On appelle <u>degré</u> d'un fibré vectoriel E , et l'on note $\deg E$, le degré du fibré $\det E$ (c'est le degré du diviseur qui correspond à $\det E$).

On désignera par $J(r , d)$ l'ensemble des classes de fibrés vectoriels <u>indécomposables</u> de degré d et de dimension r . En associant à la classe d'un fibré E la classe du fibré $\det E$, on définit pour tout $r > 0$ et tout d une application $\det : J(r , d) \to J(1 , d)$.

Le produit tensoriel définit une structure de groupe abélien dans l'ensemble

$G = \bigcup_d J(1, d)$ des classes de fibrés indécomposables de dimension 1. L'inverse de la classe d'un fibré L de dimension 1 est la classe du fibré dual ; l'unité est la classe du fibré trivial I de dimension 1. Ce groupe G opère (par le produit tensoriel) dans l'ensemble des classes de fibrés indécomposables. On a

$$J(1, d)\, J(r', d') \subset J(r', dr' + d')$$

En particulier, $J(1, 0)$, qui est la variété de Picard de X, opère dans chaque $J(r, d)$. Le sous-groupe de stabilité de G opérant dans $J(r, d)$ est constitué par des éléments d'ordre r de $J(1, 0)$. En effet, si $f \in G$ et si $e \in J(r, d)$, pour que $fe = e$, il est nécessaire que $\det(fe) = \det(e)$, donc que

$$f^r \det(e) = \det(e)$$

et par suite $f^r = 1$.

Si $a \in J(1, 1)$, l'application $e \to ae$ est une bijection de $J(r, d)$ sur $J(r, d + r)$ quels que soient r et d. Cette remarque servira dans la suite à ramener la détermination de $J(r, d)$ à celle de $J(r, d')$ où d' est le reste de la division de d par r.

2. Clivages.

Dans la suite on considère uniquement des fibrés vectoriels dont la base est une courbe non singulière X de genre g.

Toute section méromorphe d'un fibré E de base X engendre un sous-fibré de dimension 1. Il existe donc toujours un clivage de E, c'est-à-dire une suite de sous-fibrés emboités $E = E_r \supset E_{r-1} \dots E_0 = (0)$ telle que $\dim E_i = i$ (un clivage correspond à une réduction du groupe de structure au groupe triangulaire). En appliquant l'égalité de Riemann-Roch aux quotients E_i/E_{i-1} d'un clivage on obtient une égalité de Riemann-Roch pour la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau $\underline{E}$ des germes de sections régulières de E :

$$\dim H^0(X, \underline{E}) - \dim H^1(X, \underline{E}) = \deg E + \dim E(1 - g).$$

On utilisera aussi la dualité de SERRE (cf.[4],) entre les espaces $H^0(X, \underline{E})$ et $H^1(X, \underline{E^* \otimes K})$, où K est le fibré canonique de la courbe X.

3. Degrés des sous-fibrés de dimension 1.

Soit $E_i (i = 0, 1, \dots, r)$ un clivage du fibré vectoriel E et soit L un sous-fibré de dimension 1 de E. Pour un indice i, il existe un homomorphisme non nul de L dans E_i/E_{i-1}, donc $\deg L \leq \deg E_i/E_{i-1}$. Le degré des sous-fibrés de dimension 1 de E est donc borné supérieurement.

LEMME 1. - Soient E un fibré vectoriel et L un sous-fibré de dimension 1 et de degré maximal dans E. Tout sous-fibré de dimension 1 de E/L est de degré au plus égal à $2g + \mathrm{dg}\, L$.

Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $\dim E = 2$. La suite exacte

$$0 \to I \to L^* \otimes E \to L^* \otimes E/L \to 0$$

donne

$$g - \dim H^0 (X , \underline{L^* \otimes E/L}) + \dim H^0(X , \underline{L^* \otimes E}) - 1 \geqslant 0 .$$

D'autre part (égalité de Riemann-Roch pour $L^* \times E/L$) :

$$\dim H^0(X , L^* \otimes E/L) - \dim H^1(X , L^* \otimes E/L) = \mathrm{dg}\, E/L - \mathrm{dg}\, L + 1 - g .$$

Par suite, $\dim H^0(X , L^* \otimes E) \geqslant 2(1 - g) + \mathrm{dg}\, E/L - \mathrm{dg}\, L$. Si $\mathrm{dg}\, E/L - \mathrm{dg}\, L - 2g > 0$, alors $\dim H^0(X , L^* \otimes E) \geqslant 3$. Puisque $L^* \otimes E$ est de dimension 2, il existerait donc une section de degré >0 dans $L^* \otimes E$. Soit M le sous-fibré engendré par cette section ; E contiendrait un sous-fibré isomorphe à $L \otimes M$, donc de degré égal à $\mathrm{dg}\, L + \mathrm{dg}\, M > \mathrm{dg}\, L$, contrairement à l'hypothèse.

LEMME 2. - Soient E un fibré vectoriel et L un sous-fibré de dimension 1 de E. Si E est indécomposable, et si $E/L \neq (0)$, il existe dans E/L un sous-fibré L' de dimension 1 tel que

$$\mathrm{dg}\, L' \geqslant \mathrm{dg}\, L - 2(g - 1) .$$

Puisque E est indécomposable, l'extension $0 \to L \to E \to E/L \to 0$ n'est pas triviale. Or on démontre que, comme dans la théorie homologique des extensions de modules, les classes d'extensions de E/L par L sont en correspondance bijective avec les éléments de $H^1(X , \underline{\mathrm{Hom}(E/L , L)})$. Par conséquent, $H^1(X , \underline{\mathrm{Hom}(E/L , L)}) \neq$ $\neq (0)$ d'où, par dualité, $H^0(x , \underline{\mathrm{Hom}(L \otimes K^*, E/L)}) \neq (0)$, K désignant le fibré canonique de X. Soit alors f un homomorphisme non nul de $L \otimes K^*$ dans E/L. Son image engendre un sous-fibré L' de dimension 1 tel que $\mathrm{dg}\, L' \geqslant \mathrm{dg}(L \otimes K^*) =$ $= \mathrm{dg}\, L - 2(g - 1)$.

THÉORÈME 1 (GROTHENDIECK [3]). - <u>Si</u> X <u>est une courbe de genre</u> 0 , <u>tout fibré vectoriel indécomposable de base</u> X <u>est de dimension</u> 1 .

Résulte immédiatement des lemmes 1 et 2.

Un clivage E_i $(i = 0 , 1 , \dots , r)$ du fibré vectoriel E est dit <u>maximal</u>

lorsque, pour tout i, E_i/E_{i-1} est un sous-fibré de degré maximal dans l'ensemble des sous fibrés de dimension 1 de E_i/E_{i-1}. Tout fibré vectoriel possède évidemment un clivage maximal.

LEMME 3. - Soient E un fibré vectoriel indécomposable et E_i $(i = 0, 1, \dots, r)$ un clivage maximal de E : on a pour tout $i > 0$

$$\mathrm{dg}(E_i/E_{i-1}) \geqslant \mathrm{dg}\, E_1 + 2(1-g)(i-1) .$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur i en appliquant le raisonnement du lemme 2 aux suites exactes $0 \to E_i \to E \to E/E_i \to 0$.

THÉORÈME 2. - Soit E un fibré vectoriel indécomposable de dimension r et de degré d et soit L un sous-fibré de dimension 1 de E. On a :

$$\mathrm{dg}\, L \leqslant d/r + (r-1)(q-1)$$

Résulte du lemme 3 par sommation.

COROLLAIRE. - Soit X une courbe elliptique et soit E un fibré vectoriel indécomposable de base X, de degré d et de dimension r :

- si $d < r$, alors les sections de E engendrent un sous-fibré trivial maximal de dimension égale à $\dim H^0(X, \underline{E})$
- si $d > 0$, alors $\dim H^0(X, \underline{E}) = d$.

En effet, si $d < r$ et si $g = 1$, le théorème montre que toutes les sections de E sont de degré 0. Si $d > 0$, alors $\mathrm{dg}\, E^* = -d < 0$ donc d'après le théorème, E^* n'a pas de section $\neq 0$ et, par dualité, on en déduit que $H^1(X, \underline{E}) = (0)$. L'égalité de Riemann-Roch donne alors $\dim H^0(X, \underline{E}) = d$.

4. Fibrés indécomposables de degré 0 sur une courbe elliptique.

On considère dans la suite des fibrés vectoriels dont la base est une courbe elliptique X.

LEMME 4. - Soit F un fibré indécomposable de degré 0 tel que $H^0(X, \underline{F}) \neq (0)$ et soit F' le sous-fibré de F orthogonal au sous-fibré trivial maximal de F^*. Si $\dim F > 1$, alors

- F' est indécomposable et de degré 0,
- $\dim H^0(X, \underline{F}) = \dim H^0(X, \underline{F'})$.

Posons $s = \dim H^0(X, \underline{F})$. La dualité et l'égalité de Riemann-Roch donnent :

$\dim H^o(X, \underline{F}^*) = \dim H^1(X, \underline{F}) = s$. Le fibré $T = F/F'$ est trivial et de dimension s, car isomorphe au dual du sous-fibré trivial maximal de F^* . Par suite $dg\, F' = 0$. L'homorphisme $d : H^o(X, \underline{T}) \to H^1(X, \underline{F}')$ défini par la suite exacte $0 \to F' \to F \to T \to 0$ est surjectif. En effet $\dim H^1(X, \underline{F}) = s = \dim H^1(X, \underline{T})$. Il est injectif, car son noyau est l'espace des sections d'un sous-fibré de T image d'un facteur direct de F qui ne peut être F lui même puisque $\dim F > 1$. Si F' se décomposait en $F' = F'_1 + F'_2$, l'espace $H^o(X, \underline{T})$ se décomposerait en $d^{-1} H^1(X, \underline{F'}_1) + d^{-1} H^1(X, \underline{F'}_2)$ et cette décomposition donnerait une décomposition de T en $T = T_1 + T_2$ telle que F soit somme directe d'une extension de T_1 par F'_1 et d'une extension de T_2 par F'_2 . Puisque F est indécomposable, ceci démontre la première assertion. La seconde résulte de ce que d est injectif.

LEMME 5. - Les hypothèses étant celles du lemme 6, $\dim H^o(X, \underline{F}) = 1$ et F possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux.

Cela résulte facilement du lemme 4 par récurrence sur la dimension.

THÉORÈME 3. - Soit E un fibré indécomposable, de degré 0 et de dimension r . Il existe dans E un sous-fibré et un seul de dimension 1 et de degré 0 . L'application qui associe à la classe de E la classe de son sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 est une bijection $\mu_{r,o}$ de $J(r, 0)$ sur $J(1, 0)$.

Démontrons la première assertion :

- Existence. - Soit A un fibré de degré 1 et de dimension 1 . Le fibré $E \otimes A$ est de degré r et de dimension $r = \dim E$. Du lemme 4 résulte que $\dim H^o(X, \underline{E \otimes A}) = r$. Mais d'après le théorème 2, les sections de E sont de degré 0 ou 1 . Si elles étaient toutes de degré 0 , le fibré $E \otimes A$ serait trivial, ce qui n'est pas puisque son degré est r . Soit M le sous-fibré de dimension 1 engendré par une section de degré 1 dans $E \otimes A$. Le fibré E contient un sous-fibré isomorphe à $A^* \otimes M$ qui est de degré 0 .

- Unicité. - Soit L un sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 dans E . En appliquant le lemme 5 à $L^* \otimes E$, on voit que E possède un clivage dont tous les quotients sont isomorphes à L . Si L' est un sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 dans E , il existe donc un homomorphisme non nul de L' dans L . Donc $H^o(X, \underline{L'^* \otimes L}) \neq 0$ et puisque $L'^* \otimes L$ est de degré 0 , on a $L' \simeq L$. Or d'après le lemme 5, $H^o(X, \underline{L^* \otimes E})$ est de dimension 1 . Donc $L' = L$.

La seconde assertion se démontre par récurrence sur la dimension.

COROLLAIRE. - Si F_r est un fibré indécomposable de dimension r et de degré 0 tel que $H^o(X, \underline{F}_r) \neq (0)$, alors $F_r^* \simeq F_r$.

En effet F_r possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux, (lemme 5), donc F_r^* contient un sous-fibré trivial de dimension 1, ce qui entraîne $F_r^* \simeq F_r$ d'après le théorème.

5. Bijections $\mu_{r,d} : J(r, d) \to J(1, 0)$.

On a vu au n° 1 que la détermination des $J(r, d)$ se ramenait au cas où $0 \leq d < r$. Le cas $d = 0$ a été traité au n° 4 ; il reste donc le cas $0 < d < r$. On dispose alors d'un processus diminuant la dimension qui est donné par le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit E un fibré indécomposable de degré d, de dimension r avec $0 < d < r$ et soit T le sous-fibré trivial maximal de E.

- le fibré E/T est indécomposable,
- l'application $\lambda_{r,d}$ de $J(r, d)$ dans $J(r - d, d)$ qui associe à la classe de E la classe de E/T est une bijection.

La démonstration repose sur les mêmes méthodes que celles du théorème 3.

En combinant les bijections $\lambda_{r,d}$ avec les bijections $J(r, d) \to J(r, d + r)$ définies par une classe $a \in J(1, 1)$ (cf. n° 1), on obtient une bijection de $J(r, d)$ sur $J(h, 0)$ où h est le plus grand commun diviseur (r, d). En définitive :

THÉORÈME 4. - Soit une classe $a \in J(1, 1)$. Il existe une famille de bijections $\mu_{rd} : J(r, d) \to J(1, 0)$ et une seule telle que

1. $\mu_{r,o}$ est l'application du théorème 3,
2. $\mu_{r,d}(e) = \mu_{r,d+nr}(a^n e)$ pour tout $e \in J(r, d)$ et tout entier n.
3. si $0 < d < r$, alors $\mu_{r,d} = \mu_{r-d,d} \lambda_{r,d}$

(où $\lambda_{r,d}$ est la bijection définie au lemme 6).

On raisonne par récurrence sur r en s'appuyant sur le théorème 3 et le lemme 6.

On notera dans la suite $e_a(r, d)$ la classe appartenant à $J(r, d)$ telle que $\mu_{r,d}(e_a(r, d)) = 1$ (classe du fibré trivial de dimension 1). On a $e_a(1, d) = a^d$ et pour tout $r > 0$, $e_a(r, 0)$ est la classe des fibrés indécomposables de degré 0 de dimension r ayant des sections $\neq 0$.

6. Opérations de $J(1\ ,\ 0)$ dans $J(r\ ,\ d)$.

THÉORÈME 5. - Le groupe $J(1\ ,\ 0)$ opère transitivement dans $J(r\ ,\ d)$, le groupe de stabilité étant constitué par les éléments d'ordre $\frac{r}{(r\ ,\ d)}$.

Pour $d = 0$, cela résulte immédiatement du théorème 3. Le cas général exige une étude assez longue du comportement des bijections $\lambda_{r,d}$ vis-à-vis des opérations de $J(1\ ,\ 0)$. Indiquons seulement comment on procède dans le cas $(r\ ,\ d) = 1$. Dans ce cas, l'application $\det : J(r\ ,\ d) \to J(1\ ,\ d)$ est bijective. C'est évident pour $r = 1$ et $d = 0$. Le cas général s'en déduit par récurrence sur r en observant que $\det(ae) = a^r \det(e)$ et $\det(\lambda_{r,d}\ e) = \det(e)$ pour $e \in J(r\ ,\ d)$. Puisque pour $f \in J(1\ ,\ 0)$ et $e \in J(r\ ,\ d)$ on a $\det(fe) = f^r \det(e)$, il en résulte que $fe = e$ équivaut à $f^r = 1$.

7. Structure de l'anneau des classes de fibrés.

Soit S le Z-module libre ayant pour base l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique X sur un corps de caractéristique 0 . Les classes de fibrés (décomposables ou non) s'identifient aux combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 de la base de S . Il existe dans le groupe abélien S une structure d'anneau et une seule telle que la classe du fibré $E \otimes E'$ soit le produit des classes de E et de E' . L'anneau S est commutatif. On désignera par $S(r\ ,\ d)$ le Z-sous-module de S ayant pour base $J(r\ ,\ d)$. On pose $\Lambda = \sum_d S(1\ ,\ d)$. C'est évidemment un sous-anneau de S contenant l'unité $1 = e_a(1\ ,\ 0)$. Pour tout entier $r > 0$, on notera $\Lambda(r)$ l'idéal de Λ engendré par les éléments de la forme $e - 1$ où e parcourt l'ensemble des éléments d'ordre r dans $J(1\ ,\ 0)$.

(a) L'annulateur de $e_a(r\ ,\ d)$ considéré comme élément du Λ-module S est $\Lambda(\frac{r}{(r\ ,\ d)})$

On désigne par B la famille des $e_a(r\ ,\ d)$ tels que $0 \leq d < r$.

(b) Considéré comme Λ-module , S est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments de B .

On pose $T_o = \sum_{r,m} S(r\ ,\ mr)$.

(c) Considéré comme Λ-module , T_o est un module libre admettant pour base les éléments $f_r = e_a(r\ ,\ 0)$. De plus, T_o est un sous-anneau de S contenant Λ et sa table de multiplication en tant qu'algèbre sur Λ est :

$$f_r f_s = f_{r-s+1} + f_{r-s+3} + \dots + f_{r+s-1} \quad (r \geqslant s) .$$

Pour tout nombre premier p , on pose $T_p = \sum_{k,d} S(p^k , d)$, la somme étant étendue à tous les entiers $k \geqslant 0$ et à tous les entiers d tels que $(p , d) = 1$.

(d) <u>Pour tout premier</u> p , T_p <u>est un sous-anneau de</u> S <u>contenant</u> Λ.

Soit Π la suite des entiers premiers ou nul. On notera T le produit tensoriel restreint de la famille des Λ-algèbres $(T_i)_{i \in \Pi}$. Les inclusions $T_i \to S$ définissent un homomorphisme canonique $\theta : T \longrightarrow S$.

(e) <u>L'homomorphisme</u> θ <u>est bijectif</u>.

L'algèbre S est donc déterminée par θ et par les algèbres T_i . Pour $i = 0$, voir (c) . Pour tout entier premier p , T_p est somme directe des Λ-sous-modules monogènes engendrés par les éléments $e_a(p^k , d)$ avec $(d , p) = 1$ et $0 \leqslant d < p^k$ c'est-à-dire les éléments de $B \cap T_p$. Comme on connait les annulateurs dans Λ de ces éléments, il suffit de connaitre les produits de deux éléments de $T_p \cap B$.

(f) <u>Si</u> $p \neq 2$ <u>et si</u> k , k' , d , d' <u>sont des entiers tels que</u> $k , k' \geqslant 0$, $0 \leqslant d < p^k$, $0 \leqslant d' < p^{k'}$, $(p , d) = (p , d') = 1$, <u>alors on a</u>

$$e_a(p^k , d)e_a(p^{k'}, d') = \begin{cases} p^{k'} e_a(p^k , p^{k-k'} d' + d) & \text{si } k > k' \\ & \\ p^{s-k}(\Sigma e_i)e_a(p^k , \frac{d+d'}{p^s} & \begin{array}{l}\text{si } k = k' \\ \text{et } p^s = (p^k , d + d')\end{array} \end{cases}$$

(la somme Σe_i étant la somme des éléments d'ordre p^k de $J(1 , 0)$.

La dernière formule a un sens car $(\Sigma e_i)\, e_a(p^k , \frac{d+d'}{p^s})$ est dans $p^{k-s} S$. Pour $p = 2$, les formules (f) sont probablement encore vraies ; il est démontré qu'elles le sont à conditions d'ajouter aux seconds membres un facteur $e \in J(1 , 0)$.

<u>Indication sur les démonstrations</u>. - (a) n'est qu'une nouvelle formulation du théorème 4, et (b) est évident.

(c). La première assertion résulte de (b). <u>La caractéristique nulle intervient dans la seconde</u>. Si F_r et F_s sont deux fibrés appartenant respectivement aux classes f_r et f_s , alors $F_r \otimes F_s$ possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux (cela résulte du lemme 5). Tout sous-fibré de dimension 1 et de degré $\geqslant 0$ dans $F_r \otimes F_s$ est donc trivial. Soit E un sous-fibré de $F_r \otimes F_s$. On a

$dg\ E \leqslant 0$, car si $dg\ E > 0$ alors pour tout fibré non trivial L de dimension 1 et de degré 0 on aurait $dg\ (L^* \otimes E) > 0$ ce qui d'après l'égalité de Riemann-Roch entraînerait l'existence d'un homomorphisme non nul de L dans E dont l'image serait un sous-fibré non trivial de dimension 1 et de degré $\geqslant 0$. Puisque $F_r \otimes F_s$ est isomorphe à son dual, tout sous-fibré facteur direct de $F_r \otimes F_s$ est donc somme directe d'une famille sous-fibrés indécomposables de degré 0 . Comme ces sous-fibrés ne contiennent pas de sous-fibré de dimension 1 de degré $\geqslant 0$ non trivial, $F_r \otimes F_s = \sum_{i=1}^{i=k} F_{r_i}$ où F_{r_i} est de classe f_{r_i} pour tout i . Par récurrence sur r , on voit facilement que, si $r \leqslant s$, alors $H^0(X\ ,\ \underline{F_r \otimes F_s}) = r$. Puisque $\dim H^0(X\ ,\ \underline{F}_{r_i}) = 1$ pour tout i , on a $k = \min(r\ ,\ s)$. Finalement, on voit que

$$(1) \qquad f_r\, f_s = \sum_{i=1}^{i=\min(r,s)} f_{r_i} \qquad\qquad rs = \sum_i r_i \ .$$

D'autre part, $F_r \otimes F_r \simeq \mathrm{Hom}(F_r\ ,\ F_r)$ contient un sous-fibré trivial de dimension 1 engendré par la bijection identique de F_r . Puisque le corps de base est supposé de caractéristique 0 , ce sous-fibré est supplémentaire du sous-fibré des éléments de trace nulle dans $\mathrm{Hom}(F_r\ ,\ F_r)$. Ainsi,

$$f_r^2 - 1 \text{ est combinaison linéaire à coefficients } \geqslant 0 \text{ des } f_i \ .$$

Un simple calcul permet alors de déduire (c) de cette dernière condition et de (1) . La formule donnée par (c) est liée aux formules donnant le produit tensoriel de deux puissances symétriques d'un espace vectoriel de dimension 2. En fait, on en déduit que f_r est la classe de la $(r-1)$-ième puissance symétrique d'un fibré de classe f_2 .

(d). La démonstration repose sur la formule :

$$(2) \qquad e_a(r\ ,\ d)\, e_a(r'\ ,\ d') = e_a\ (rr'\ ,\ rd' + r'd)$$

valable lorsque $(r\ ,\ d) = (r'\ ,\ d') = (r\ ,\ r') = 1$.

(e). Soit B' l'ensemble des éléments de T de la forme

$$f_h \otimes e_a(2^k\ ,\ d_2) \otimes e_a(3^k\ ,\ d_3) \ldots \otimes e_a(p^k\ ,\ d_p) \otimes \ldots$$

avec $(d_p\ ,\ p) = 1$,

$0 \leqslant d_p < p^k$ et $k = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers premiers p .. On vérifie que T est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments de B' . Puis on vérifie que $\theta : T \to S$ induit une bijection de B' sur B . Cela utilise (2) et la formule

(3) $$f_h \, e_a(r , d) = e_a(rh , dh)$$

valable lorsque $(r , d) = 1$. On montre alors que l'annulateur dans Λ d'un élément de B' est le même que celui de son image par θ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M.F.). - On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 307-317.

[2] ATIYAH (M.F.). - Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 414-452.

[3] GROTHENDIECK (A.). - Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 121-138.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Théorèmes de dualités pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.