MARCEL GUILLAUME

Les tableaux sémantiques de calcul des prédicats restreint

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 153, p. 231-243

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__231_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

LES TABLEAUX SÉMANTIQUES DE CALCUL DES PRÉDICATS RESTREINT

par Marcel GUILLAUME

(d'après une méthode mise au point par E. W. BETH)

1. Préliminaires.

1. - Nous appellerons conséquence tout couple dont les membres sont des ensembles d'énoncés (formules sans variables libres) J et K, tels que $J \cup K \neq \emptyset$. Nous noterons ça $J \vdash K$, et si J (resp. K) se réduit à l'énoncé $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \vdash K$ (resp. $J \vdash \mathcal{E}$), et si $J = J' \cup J''$ (resp. $K = K' \cup K''$), J', $J'' \vdash K$ (resp. $J \vdash K'$, K'').

Le problème que nous voulons étudier est le suivant : étant donnée une conséquence $J \vdash K$, est-il possible de "rendre vrais" tous les énoncés de J, et, simultanément, de "rendre faux" tous les énoncés de K ? Nous construirons, pour répondre à cette question, ce que nous appellerons un tableau sémantique pour $J \vdash K$, au moyen de $J \vdash K$. Si la réponse est positive, alors notre conséquence possède un contre-modèle en un sens que l'on précisera, et qui est fourni par un tableau sémantique. Si elle est négative, nous dirons que la conséquence est exacte ; alors, certain tableau sémantique fournit une sous-conséquence finie $J^o \vdash K^o$ de $J \vdash K$, qui est aussi exacte, et il peut être utilisé pour bâtir une démonstration de la disjonction des énoncés de K^o à partir des hypothèses J^o.

Ceci étant, le texte ci-dessus est vague, et laisse dans le vague ce à quoi nous nous référons. Il est donc nécessaire d'apporter des précisions, et ceci sera long, car il en faut beaucoup avant d'arriver à des définitions précises et à la position nette du problème ci-dessus.

2. - Tout symbole différent de ceux de 1.3.1 est un méta-symbole (abréviation sténographique d'un texte). Conformément à un usage courant chez les logiciens, on utilise métamathématiquement les résultats de théories informelles telles que l'arithmétique élémentaire et la théorie (informelle) des ensembles. Cela va jusqu'à l'emploi du méta-axiome du choix. Cependant, dans de nombreux passages cette utilisation n'est pas essentielle.

3. - 1.3.1-"Symboles" (proprement dits) au moyen desquels sont construits les objets de la présente étude : symboles :

1° de ponctuations : [et] ;

2° logiques : $-$ (symbole de négation), $\vee$ (symbole de disjonction), $\exists$ (symbole de quantification existentielle) ;

3° figuratifs (dits "variables" par abréviation) : composés de la lettre x suivie d'un indice inférieur numérique, entier ; exemple : x_{35} ;

4° individuels (dits "individus") : composés de la lettre a suivie d'un indice inférieur numérique, ordinal ; exemple : a_6 , $a_{\Omega+8}$;

5° relationnels (dits "prédicats") : composés de la lettre r suivie d'un indice supérieur numérique, entier (le poids de ce symbole), et d'un indice inférieur numérique, ordinal ; exemple : r^5_ω .

Les métasymboles (nous avons déjà introduits J et K) sont réservés dans tout ce qui suit leur introduction à la désignation d'objets de même espèce que ceux qu'ils désignent lors de leur introduction. S'ils dont littéraux, ils désignent toujours la même espèce d'objets, qu'ils soient ou non affectés d'indices ou d'accents, mais pas lorsqu'ils sont soulignés une ou deux fois.

Conventions habituelles sur l'allègement de l'emploi des crochets, remplacés par des parenthèses dans les écritures métamathématiques, sauf ceux qui indiquent le champ d'un quantificateur. Emploi habituel des abréviations $\wedge$ (conjonction) et $\rightarrow$ (implication). A noter que dans la présente manière de prendre les choses, on ne gagne que très peu à ne pas les considérer comme primitifs.

Emploi de m , n (resp. λ , μ , ν) pour désigner des entiers (resp. ordinaux), de N pour désigner l'ensemble des entiers.

Moyennant les spécifications de 1.3.1 , 1.3.1 définit les ensembles S(resp. X , rep. I , resp. R_n , resp. C) (ensemble des symboles (resp. variables, resp. individus, resp. prédicats de poids n , resp. assemblages de symboles de S)). Ce qu'on considère ici peut être nommé un "symbolisme du premier ordre réduit sur S" ; soit $\Sigma = \bigcup_{n\in N}\mathfrak{P}_{(n)}(C)$, en posant $\mathfrak{P}_{(0)}(C) = C$ et $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}_{(n)}(C)) = \mathfrak{P}_{(n+1)}(C)$.

On peut considérer que 1.3.1 et 1.2.2 , plus les définitions de la formule et des formules démontrables, définissent une structure sur S("engere Prädikatenkalkul" de HILBERT et ACKERMANN avec addition de symboles aptes à désigner des individus particuliers, qui sont là pour simplifier la suite de l'exposé. Même motif pour introduire tout de suite les spécifications 1.3.2 , la suite ramenant toujours à un tel cas si l'on part initialement d'un autre cas). On se bornera à supposer :

1.3.2. - Σ est parfait, c'est-à-dire :

1° pour tout $n \in N$, il y a une variable (resp. un individu), désignée par x_n (resp. a_n),,et dont l'indice est n ; il n'y a pas d'autres variables ;

2° il y a un ordinal Λ (resp. pour tout $n \in N$, il y a un ordinal Λ_n) tel que pour tout ordinal $\mu < \Lambda$ (resp. $\mu < \Lambda_n$), il y a un individu (resp. un prédicat de poids n), désigné par a_μ (resp. r^n_μ), et dont l'indice inférieur est μ ; il n'y a pas d'autres individus (resp. prédicats de poids n) ;

3° $\bigcup_{n \in N} R_{n+1} \neq \emptyset$;

4° Card S = Card I .

4. - Soit F l'ensemble des formules, D l'ensemble des formules démontrables ; il est bien connu que l'ensemble D se déduit facilement de l'ensemble $T = D \cap E$, où E est l'ensemble des énoncés ; c'est pourquoi nous ne considèrerons que ceux-ci. Un atome est énoncé sans symbole logique ; A est l'ensemble des atomes.

Nous désignerons par x (resp. a, resp. r^n, resp. b, resp. ε, resp. α) un élément générique de X (resp. I, resp. R_n, resp. $X \cup I$, resp. E, resp. A); par H une partie de I et par φ une formule ; par $(H|b)\varphi$ l'ensemble $((a|b)\varphi)_{a \in H}$, qui n'est vide qu'avec H ; par $\varphi{>}b{<}$, une formule construite sans utiliser le symbole désigné par b ; et par $\varphi\langle a, \ldots\rangle$, une formule construite au moyen de a .

L'ordre d'un énoncé est le nombre de symboles logiques qu'il comporte. Une formule est dite quantifiable par x si elle ne comporte aucune occurence liée de x et aucune occurence libre de chacune des autres variables ; soit F^x l'ensemble des formules quantifiables par x . Nous utiliserons encore β, γ, δ (resp. φ^x) pour désigner des éléments génériques de E (resp. F^x).

Par $A(H)$ (resp. $E(H)$, etc.), nous désignerons l'ensemble des atomes (resp. énoncés, resp. etc.) construits exclusivement au moyen d'individus de H .

1.4.1. - Définition des sous-énoncés immédiats de ε par rapport à H :

1° β, si $\varepsilon = -\beta$;

2° β et γ, si $\varepsilon = \beta \vee \gamma$;

3° tous ceux de $(H|x)\varphi^x$, si $\varepsilon = \exists x[\varphi^x]$.

Ce ne sont pas en général des sous-assemblages de ε, dans le 3e cas ! Mais ce sont toujours des énoncés d'ordre strictement inférieur à celui de ε ; un atome n'a pas de sous-énoncés immédiats par rapport à H .

La base I_J d'un ensemble d'énoncés J est l'ensemble des individus utilisés pour la construction d'au moins un des énoncés de J .

On écrira $A(J)$ (resp. $E(J)$) pour $A(I_J)$ (resp. $E(I_J)$). Par a_J (resp. x_J) on désigne, par contre, un individu (resp. une variable) qui n'appartient pas à I_J (resp. qui n'apparaît dans aucun énoncé de J).

Dans les notations suivantes, J' sera remplacé par JK (resp. $\mathcal{E}$) quand $J' = J \cup K$ (resp. $J' = \{\mathcal{E}\}$) : $I_{J'}$, $A(J')$, $E(J')$, $a_{J'}$ et $x_{J'}$.

5. - 1.5.1. - Définition directe de T : $\mathcal{E} \in T$ si et seulement si il y a une démonstration de $\mathcal{E}$ au sens suivant : $\mathcal{E}$ est le dernier d'une suite d'énoncés tels que, pour chacun d'eux, l'une des conditions suivantes au moins est réalisée :

1° β est un axiome (parmi ceux-ci : pour tout $(x, \varphi^x, a) \in X \times F^x \times I$, l'énoncé $(a|x)\varphi^x \rightarrow \exists x[\varphi^x]$) ;

2° β est précédé dans la suite par δ et par $\delta \rightarrow \beta$;

3° $\beta = \exists x_{\delta,(a_\delta|x)\varphi^x}[(x_{\delta,(a_\delta|x)\varphi^x}|x)\varphi^x] \rightarrow \delta$, et $(a_\delta|x)\varphi^x \rightarrow \delta$ prècède β dans la suite.

2. Validations et structures exprimables dans Σ .

1. - 2.1.1. - Validation de base H (partie non vide de I) : toute partie V de $E(H)$ telle que :

1° $(-E) \cap V = \complement_{E(H)} V$ (un énoncé de la forme $-\mathcal{E}$ est valide, si et seulement si $\mathcal{E} \in E(H)$ et n'est pas valide) ;

2° $(E \vee E) \cap V = (E(H) \vee V) \cup (V \vee E(H))$ (un énoncé de la forme $\beta \vee \gamma$ est valide, si et seulement si l'un au moins de β et γ est valide, ...) ;

3° $\exists x[\varphi^x] \in V$, si et seulement si $(H|x)\varphi^x \cap V \neq \emptyset$.

Etant donnée une partie H non vide de I , et $B \subset A(H)$, il y a une validation V de base H , et une seule, telle que $V \cap A(H) = B$. En effet, comme 2.1.1 renvoie à des sous-énoncés immédiats par rapport à H , on peut la construire par récurrence sur l'ordre des énoncés qui lui appartiennent.

Il est clair aussi qu'on a $I_V = H$ pour toute validation V de base H , ce qui justifie la terminologie.

2. - 2.2.1. - Si $V' \cap E(V) = V$, on dira que V' est un prolongement de V .

Comme il est aisé de voir qu'il s'agit là d'une relation d'ordre, nous écrirons $V' \geqslant V$.

Soit $\underline{Z}$ un ensemble d'indices ζ.

2.2.2. - Si $(V_\zeta)_{\zeta \in \underline{Z}}$ est une famille totalement ordonnée pour $\leqslant$ de validations, $\bigcup_{\zeta \in Z} V_\zeta$ en est la borne suppérieure pour cette relation.. La cause essentielle de ce fait réside dans ce que 2.1.1. définit l'appartenance de $\mathcal{E}$ à une validation au moyen d'un nombre fini de conditions portant sur des sous-énoncés immédiats de $\mathcal{E}$ par rapport à sa base.

2.2.3. - Si $\exists x[\varphi^x] \in V$, il existe, pour tout a_V, au moins un prolongement V' de V tel que $(a_V|x)\varphi^x \in V'$.

Une conséquence immédiate de l'hypothèse étant qu'il existe $a \in I_V$, tel que $(a|x)\varphi^x \in V$, définissons V' par : $I_{V'} = I_V \cup \{a_V\}$ et les conditions : $\alpha > a_V < \in V'$ si et seulement si $\alpha > a_V < \in V$; $\alpha < a_V , \ldots > \in V'$, si et seulement si $(a|a_V)\alpha < a_V , \ldots > \in V$. On établit sans peine, par récurrence sur l'ordre de $\varepsilon \in E(V')$, qu'on a $\varepsilon > a_V < \in V'$, si et seulement si on a $\varepsilon > a_V < \in V$, et $\varepsilon < a_V , \ldots > \in V'$, si et seulement si $(a|a_V)\varepsilon < a_V , \ldots > \in V$; la proposition en découle immédiatement.

3. - On dira qu'on s'est donné une structure $\underline{\underline{M}}^+$ exprimable dans Σ, toutes les fois qu'on se sera donné :

1° un ensemble $\underline{\underline{M}}$ d'objets ;

2° pour chaque $n \in N$, un ensemble $\underline{\underline{R}}_n$ de relations n-adiques entre les éléments des n-uples (ordonnés) d'éléments de $\underline{\underline{M}}$;

3° une injection $\underline{j}$ de $\underline{\underline{M}}$ dans I ;

4° pour chaque $n \in N$, une injection $\underline{j}_n$ de $\underline{\underline{R}}_n$ dans R_n ;

5° si $\underline{\underline{A}}$ est la réunion de $\underline{\underline{R}}_0$ et de l'ensemble des couples dont le premier élément est une relation $\underline{\underline{r}}^{n+1}$ de $\underline{\underline{R}}_{n+1}$ et le second un $(n + 1)$-uple

$$(\underline{\underline{a}}_{m_1} , \underline{\underline{a}}_{m_2} , \ldots , \underline{\underline{a}}_{m_{n+1}})$$

d'éléments de $\underline{\underline{M}}$, une partie $\underline{\underline{B}}$ de $\underline{\underline{A}}$ (dont les éléments seront dits "vrais").

Dans ces conditions soit $\underline{k}$ l'injection de $\underline{\underline{A}}$ dans A, telle que $\underline{k}(\underline{\underline{r}}^0)=\underline{j}_0(\underline{\underline{r}}^0)$ pour tout $\underline{\underline{r}}^0 \in \underline{\underline{R}}_0$, et que $\underline{k}((\underline{\underline{r}}^{n+1} , (\underline{\underline{a}}_{m_1} , \underline{\underline{a}}_{m_2} , \ldots , \underline{\underline{a}}_{m_{n+1}})))$ est l'atome construit avec $\underline{j}_{n+1}(\underline{\underline{r}}^{n+1})$, $\underline{j}(\underline{\underline{a}}_{m_1})$; $\underline{j}(\underline{\underline{a}}_{m_2})$, $\ldots$, $\underline{j}(\underline{\underline{a}}_{m_{n+1}})$.

Alors l'ensemble $V(\underline{\underline{M}}^+)$ des énoncés valides sur la structure $\underline{\underline{M}}^+$ exprimable dans Σ est la validation de base $\underline{j}(\underline{\underline{M}})$, telle que $\underline{k}^{-1}(V(\underline{\underline{M}}^+) \cap A) = \underline{\underline{B}}$. On peut dire aussi que $\underline{\underline{M}}^+$ est un modèle des énoncés de $V(\underline{\underline{M}}^+)$.

2.3.1. - <u>Etant donnée une validation</u> V , <u>de base</u> I_V , <u>il existe une structure</u> $\underline{\underline{M}}^+$ <u>exprimable dans</u> Σ <u>et telle que</u> $V(\underline{\underline{M}}^+) = V$.

Ceci est en effet trivial de la structure $\underline{\underline{M}}^+$ ainsi définie : $\underline{\underline{M}} = I_V$; $\underline{j}$ est l'injection canonique de I_V dans I ; $\underline{\underline{r}}^0_\lambda$ est la relation : " r^0_λ appartient à V " ; $\underline{\underline{r}}^{n+1}$, la relation : "constituer, dans cet ordre, un (n + 1)-uple d'individus tels que l'atome formé avec r^{n+1}_λ et les individus de ce (n + 1)-uple appartient à V " ; $\underline{j}_n$, l'injection qui, à $\underline{\underline{r}}^n$, fait correspondre le symbole r^n qui y figure ; et $\underline{\underline{B}}$, conformément à notre conception habituelle du "vrai" et aux définitions précédentes, ne peut être que $\underline{k}^{-1}(V \cap A)$, $\underline{k}$ étant l'injection définie comme ci-dessus à partir de $\underline{j}$ et des $\underline{j}_n$.

4. - Les définitions qui viennent d'être données de la validation et du modèle sont des plus naturelles ; or, elles font coïncider le fait, pour une conséquence $J \vdash K$, de posséder un contre-modèle (pour lequel tous les énoncés de J sont valides tandis qu'aucun de ceux de K ne l'est) et la possibilité de répondre positivement à la question que nous nous sommes posée au sujet de cette conséquence au début. Encore reste-t-il à savoir reconnaître si l'on est dans ce cas, et si oui, à trouver un tel contre-modèle.

En raison de 2.3.1 , et bien que le sémantique soit "la branche de la métamathématique qui s'occupe des relations entre les énoncés et les structures mathématiques qu'ils peuvent décrire" (A. ROBINSON), nous ne parlerons plus que de validations, au lieu de modèles, et nous sommes en mesure de préciser désormais :

<u>2.4.1.</u> - <u>Définition</u> de la conséquence <u>exacte</u> (resp. <u>inexacte</u>) : $J \vdash K$ est exacte (resp. inexacte) si et seulement si, quelle que soit la validation V telle que $I_V \supset I_{JK}$ et $V \supset J$, on a $V \cap K \neq \emptyset$ (resp. s'il existe une validation V , telle que $I_V \supset I_{JK}$, $V \supset J$ et $V \cap K = \emptyset$) .

Nous utiliserons souvent. le fait trivial que, si $J \vdash K$ est exacte (resp. inexacte), il en est de même de toutes ses sur- (resp. sous-) conséquences.

3. Saturantes immédiates d'une conséquence.

1. - La conséquence $J \vdash K$ est évidemment exacte, si l'on a $J \cap K \neq \emptyset$. Nous dirons alors qu'elle est <u>immédiatement close</u> ; cela entraîne la même propriété pour toutes ses surconséquences.

2. - <u>3.2.1.</u> - $J \vdash K$ est <u>saturée à gauche</u> (resp. <u>droite</u>) <u>par rapport à</u> :

α , si α est un atome de J (resp. de K) ;

$-\varepsilon$, si et seulement si on a $-\varepsilon \in J$ (resp. $-\varepsilon \in K$) et $\varepsilon \in K$ (resp. $\varepsilon \in J$) ;

$\beta \vee \gamma$, si et seulement si on a $\beta \vee \gamma \in J$ (resp. $\beta \vee \gamma \in K$) et $\{\beta, \gamma\} \cap J \neq \emptyset$ (resp. $\{\beta, \gamma\} \subset K$) ;

$\exists x[\varphi^x]$, si et seulement si on a $\exists x[\varphi^x] \in J$ (resp. $\exists x[\varphi^x] \in K$) et $(I_{JK}|x)\varphi^x \cap J \neq \emptyset$ (resp. $I_{JK} \neq \emptyset$ et $(I_{JK}|x)\varphi^x \subset K$) .

3.2.2. – $J \vdash K$ est saturée si et seulement si elle l'est à gauche par rapport à tout énoncé de J et à droite par rapport à tout énoncé de K .

EXEMPLE. – Si V est une validation, $V \vdash \begin{cases} V \\ E(V) \end{cases}$ est saturée. Or :

3.2.3. – Si $J \vdash K$ est saturée et non immédiatement close, elle est inexacte.

On démontre en effet, par récurrence sur l'ordre des énoncés de $J \cup K$, que la validation V, de base I_{JK}, telle que $V \cap A(JK) = J \cap A(JK)$, est telle que $J \subset V$ et $K \subset \begin{cases} V \\ E(V) \end{cases}$.

3. – Nous venons de trouver deux cas dans lesquels la solution de notre problème est immédiate. Dans les autres cas, cette solution consistera à se ramener à une famille de conséquencesdans ce cas, équivalente à $\{J \vdash K\}$ du point de vue de l'exactitude, et que nous appellerons un tableau sémantique pour $J \vdash K$.

3.3.1. – Définition des saturantes immédiates de $J \vdash K$ (règles de constitution des tableaux sémantiques) :

1° si $J \vdash K$ est saturée, elle est sa seule saturante immédiate ;

2° dans le tableau suivant, si la conséquence en-dessus d'une ligne n'est pas saturée par rapport à l'énoncé explicité, du côté où il est explicité, les conséquences au-dessous de la même ligne en sont les saturantes immédiates par rapport à cet énoncé, du côté correspondant :

$\dfrac{J', -\varepsilon \vdash K}{J', -\varepsilon \vdash K, \varepsilon}$; $\qquad \dfrac{J \vdash K', -\varepsilon}{J, \varepsilon \vdash K', -\varepsilon}$;

$\dfrac{J', \beta \vee \gamma \vdash K}{J', \beta \vee \gamma, \beta \vdash K \quad \text{et} \quad J', \beta \vee \gamma, \gamma \vdash K}$; (dont nous dirons qu'elles forment un couple de saturantes immédiates conjuquées)

$\dfrac{J \vdash K', \beta \vee \gamma}{J' \vdash K', \beta \vee \gamma, \beta, \gamma}$; $\qquad \dfrac{J', \exists x[\varphi^x] \vdash K}{J', \exists x[\varphi^x], (a_{JK}|x)\varphi^x \vdash K}$;

$$\frac{J \vdash K',\ \exists x[\varphi^x]}{J \vdash K',\ \exists x[\varphi^x],\ K''}$$ où K'' se réduit à $(a|x)\varphi^x$, si $I_{JK} = \emptyset$, et est égal à $(I_{JK}|x)\varphi^x$, dans tout autre cas.

Dans la définition ci-dessus, nous dirons de chacun des ensembles de conséquences placé en-dessous d'une ligne (et de $\{J \vdash K\}$ si $J \vdash K$ est saturée) qu'il constitue un ensemble de saturation de la conséquence placée au-dessus de cette ligne.

On a 3.3.2 à 3.3.5 ci-dessous, sous réserve que le complémentaire de I_{JK} ne soit pas vide :

3.3.2. - Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1° $J \vdash K$ est inexacte ;

2° il y a un ensemble de saturation de $J \vdash K$ contenant une conséquence inexacte ;

3° tout ensemble de saturation de $J \vdash K$ possède cette propriété.

En effet, 2° entraîne 1° parce que toute saturante immédiate de $J \vdash K$ en est une surconséquence. La démonstration de : 1° entraîne 3°, est triviale, sauf au cas où l'on considère la saturante immédiate à gauche de $J \vdash K$ par rapport à l'énoncé $\exists x[\varphi^x] \in J$. On a alors une validation V, telle que $I_V \supset I_{JK}$, $V \supset J$ et $V \cap K = \emptyset$, et 2.2.1 fournit une validation V' telle $I_{V'} \supset I_{JK} \cup \{a_V\}$, $V' \supset J \cup \{(a_V|x)\varphi^x\}$ et $V' \cap K = \emptyset$. Il faut alors considérer la permutation h de I qui conserve tout a distinct de a_V et de a_{JK} et échange ces derniers. Il est clair que l'extension à E d'une telle permutation est une permutation de E, qui conserve la propriété d'êtreune validation en permutant les bases, et que son extension à l'ensemble des conséquences conserve les relations de saturation, saturation immédiate, conjugaison, etc., bref, on peut vraiment parler d'un automorphisme pour qualifier h. A ce moment, $h(V')$ est donc une validation V'' telle que $I_{V''} \supset I_{JK} \cup \{a_{JK}\}$, $V'' \supset J \cup \{(a_{JK}|x)\varphi^x\}$ et $V'' \cap K = \emptyset$.

3.3.3. - COROLLAIRE. - Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1° $J \vdash K$ est exacte ;

2° tout ensemble de saturation de $J \vdash K$ ne contient que des conséquences exactes ;

3° il y a un ensemble de saturation de $J \vdash K$ qui possède cette propriété.

3.3.4. - Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1° $J \vdash K$ possède une sous-conséquence finie exacte ;

2° il y a un ensemble de saturation de $J \vdash K$ dont toutes les conséquences possèdent la même propriété ;

3° tout ensemble de saturation de $J \vdash K$ possède cette propriété.

Que 2° entraîne 1°, cela se démontre trivialement en construisant la sous-conséquence finie de $J \vdash K$ exacte au moyen des sous-conséquences finies exactes des conséquences de l'ensemble de saturation en cause. On élimine, de la même façon que dans la démonstration de 3.3.2, une complication analogue dans le même cas.

3.3.5. - Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1° $J \vdash K$ possède une sous-conséquence finie $J^o \vdash K^o$ telle que la disjonction $\vee K^o$ des énoncés de K^o possède une démonstration à partir des énoncés de J^o ;

2° il y a un ensemble de saturation de $J \vdash K$ dont toutes les conséquences possèdent la même propriété ;

3° tout ensemble de saturation de $J \vdash K$ possède cette propriété.

Même démonstration que 3.3.4 (un peu moins triviale cependant), mais sans complication cette fois. A noter, que dans la proposition, les mots "telle que la disjonction ... à partir des énoncés de K^o " peuvent être remplacés par "démontrable" , non plus au sens de 1.5.1 , mais dans un "calcul de conséquences" ou dans un "calcul de déduction naturelle", dont les règles correspondent, point par point, exactement à celles de 3.3.1 (cf. [5] , p. 480, et [4]) ; on passe d'ailleurs de l'une aux autres, selon des règles connues. La proposition est donc triviale dans les deux derniers cas mais ceux-ci sont moins connus.

4. Tableaux sémantiques.

1. - Nous appellerons fonction de saturation toute fonction s appliquant toute conséquence sur une de ses saturantes immédiates, et chaîne de saturation de $J \vdash K$ l'ensemble, bien ordonné et possédant un plus grand élément saturé, fourni par le théorème de HESSENBERG pour $J \vdash K$ et une fonction de saturation s . Tout segment initial fini d'une chaîne de saturation de $J \vdash K$ sera appelé une suite de saturation de $J \vdash K$; il est clair cependant qu'on peut définir directement les suites de saturation de $J \vdash K$.

Deux chaînes (resp. suites) de saturation de $J \vdash K$ ont toujours un plus grand segment initial commun, ayant un dernier élément qui est leur conséquence de bifurcation. Si chacune d'elles "continue" par la saturante immédiate conjuguée de celle par laquelle "continue" l'autre, elles seront aussi dites conjuguées.

Un arbre (resp. tronc) de saturation de $J \vdash K$ est un ensemble de chaînes (resp. suites) de saturation de $J \vdash K$ tel que, si $J' \vdash K'$ et sa saturante immédiate sans conjuguée $J'' \vdash K''$ appartiennent à l'une d'elles, toute chaîne (resp. suite) de cet ensemble qui contient $J' \vdash K'$ contient $J'' \vdash K''$, et si $J''_1 \vdash K''_1$ a une saturante immédiate conjuguée $J''_2 \vdash K''_2$ contenue dans une chaîne (resp. suite) de cet ensemble, il y a une autre chaîne qui contient $J''_1 \vdash K''_1$.

4.1.1. - Définition du tableau sémantique complet (resp. partiel) (T.S.C. (resp. T.S.P.)) de l'arbre $\mathcal{A}$ (resp. du tronc $\mathcal{T}$) de $J \vdash K$: l'ensemble des extrémités des chaînes (resp. suites) de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{T}$).

On voit que, par définition, un T.S.C. se compose de conséquences toutes saturées.

Un tableau sémantique sera dit clos, s'il se compose de conséquences toutes immédiatement closes.

2.-4.2.1. - Sous réserve que le complémentaire de I_{JK} soit équipotent à I, les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

1° $J \vdash K$ est inexacte (resp. exacte) ;

2° Tout T.S.C. pour $J \vdash K$ et non clos (resp. clos) ;

3° Il y a un T.S.C. non clos (resp. clos) pour $J \vdash K$.

Il suffit de voir que chacune des conditions 1° entraîne la condition 2° correspondante. Si $J \vdash K$ est exacte, c'est trivial (3.3.3), et c'est trivial aussi intuitivement, si $J \vdash K$ est inexacte, à partir de 3.3.2. Mais en fait, la démonstration utilisant 2.4.1 se heurte à des complications analogues à celles de la démonstration de 3.3.2. On s'en tire en considérant, au lieu de l'arbre $\mathcal{Q}$, l'arbre $\sigma(\mathcal{Q})$ défini par l'intermédiaire de fonctions σ_{C} , de telle sorte que pour toute $C \in \mathcal{Q}$, $\sigma(C) = \sigma_C(C)$. Les fonctions σ_C sont définies à leur tour comme extensions de fonctions σ_C de E dans lui-même, de telle façon que soient conservés les énoncés de $J \vdash K$, et que $\sigma_C = \sigma_{C'}$ jusqu'à la conséquence de bifurcation de C et de C' ; à partir d'une conséquence exacte $\sigma_C(J' \vdash K')$, on prolonge σ_C ad libitum, et on démontre au moyen de 2.2.2 et de 2.2.3 qu'on peut en outre choisir les σ_C de telle façon que pour tout ordinal μ , il y a une chaîne $C \in \mathcal{Q}$, telle que pour tout $\nu \leqslant \mu$, il existe une validation V_ν pour laquelle on a $I_{V_\nu} \supset I_{\sigma_C(J_\nu)\sigma_C(K_\nu)}$, $V_\nu \supset \sigma_C(J_\nu)$ et $V_\nu \cap \sigma_C(K_\nu) = \emptyset$, de telle façon que $\nu' \leqslant \nu \leqslant \mu$ entraîne $V_{\nu'} \leqslant V_\nu$. Il s'ensuit que l'arbre $\sigma(\mathcal{Q})$ possède une chaîne $\sigma(C)$ composée de conséquences toutes inexactes, et on revient à C en considérant la permutation $\underline{h}$ qui échange, pour tout ordinal ν de type inférieur à celui de C , le a_{V_ν} et le $a_{J_\nu K_\nu}$ précédemment en cause, tout en conservant les autres individus.

Nous avons donc dans la construction d'un T.S.C. une réponse à la question posée. Cependant il n'est pas toujours possible de construire un T.S.C. de $J \vdash K$ si Card $\complement I_{JK}$ est trop petit. C'est ici qu'intervient l'hypothèse 1.3.2 , 4° ; nous remplaçons $J \vdash K$ par $\underline{h}(J \vdash K)$, $\underline{h}$ étant cette fois une injection de I dans lui-même, telle que Card $\complement \underline{h}(I_{JK})$ = Card I . Or, chaque saturante immédiate de $J' \vdash K'$ possédant un énoncé au moins de plus que $J' \vdash K'$, à moins que celle-ci ne soit saturée, toute chaîne de saturation a son cardinal borné par celui de E , qui est visiblement égal à celui de I . Donc, $\underline{h}(J \vdash K)$ possède un T.S.C. qui nous fournit sur $J \vdash K$ tous les renseignements voulus.

3. - Au cas où $J \vdash K$ est au plus dénombrable, nous dirons d'un arbre $\mathcal{Q}$ de $J \vdash K$ (et de son T.S.C.) qu'ils sont réguliers si, quels que soient $C \in \mathcal{Q}$, $J' \vdash K' \in C$,

$\varepsilon \in J'$ (resp. $\varepsilon \in K'$), il y a une suite de saturation de $J' \vdash K'$ incluse dans C et dont l'extrémité est saturée à gauche (resp. droite) par rapport à ε .

Il est aisé de voir que les chaînes d'un arbre régulier sont de type $\omega + 1$ au plus. Il en résulte immédiatement qu'un tel arbre est compact pour la topologie dont les ouverts sont les sous-arbres (ensembles des chaînes de l'arbre ayant en commun un certain segment initial) en mettant celui-ci en correspondance biunivoque avec l'ensemble triadique de CANTOR.

Plus compliquée (mais non difficile) et plus longue est la démonstration de ce que toute conséquence au plus dénombrable possède au moins un arbre régulier (c'est la forme que prend ici le théorème de SKOLEM). Elle consiste à décricre en détail le procédé de construction d'un tel arbre (c'est-à-dire à définir la fonction de saturation convenable).

On a 4.4.1 à 4.4.3 , sous réserve que le complémentaire de I_{JK} soit dénombrable :

4. - 4.4.1. - Pour que $J \vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle possède une sous-conséquence finie exacte.

C'est vrai de toutes les conséquences d'un T.S.C. de $J \vdash K$. De là, moyennant 3.3.4 , que c'est vrai de toute conséquence appartenant à une chaîne de l'arbre correspondant (par "descente infinie") et donc de $J \vdash K$.

Corollaire, moyennant l'existence d'un arbre régulier pour cette sous-conséquence finie et la compacité de cet arbre :

4.4.2. - Pour que $J \vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle possède un T.S.P. clos.

Il faut et il suffit que $J \vdash K$ possède un T.S.P. clos, pour que tout tronc de saturation de $J \vdash K$ puisse être prolongé en un tronc dont le T.S.P. est clos. Mais, même pour une conséquence finie, il faut s'y prendre convenablement (construire un arbre régulier).

De plus : 4.4.3. - Pour que $J \vdash K$ possède un T.S.P. clos, il faut et il suffit qu'il existe une sous-conséquence finie $J^o \vdash K^o$ de $J \vdash K$, telle que $\vee K^o$ possède une démonstration à partir des énoncés de J^o .

Cela découle de 3. 3.5 , immédiatement pour la nécessité/dans tous les sens du mot "démonstration", immédiatement aussi pour la suffisance dans les deux derniers de ces sens. Au sens de 1.5.1 , cela nécessite une démonstration longue et amenant de nouvelles complications et l'introduction de nouvelles notions, mais elle se fait sans l'axiome du choix. En admettant celui-ci, il n'y a qu'à dire que si $\vee K^{o}$ se démontre à partir des énoncés de J^{o}, alors la conséquence $\emptyset \vdash \wedge J^{o} \rightarrow \vee K^{o}$ est exacte, donc qu'elle possède un T.S.P. clos (4.4.2), dont la parenté avec un T.S.P. clos pour $J \vdash K$ est évidente (plus haut, $\wedge J^{o}$ désigne la conjonction des énoncés de J^{o}). (3.3.5 n'est pas utilisable pour cette réciproque parce qu'elle porte, non sur la démonstration elle-même, mais sur ses prémisses et ses conclusions).

Donc, si $J \vdash K$ est exacte, elle possède une sous-conséquence finie $J^{o} \vdash K^{o}$ telle que $\vee K^{o}$ se démontre à partir des énoncés de J^{o}, et en s'y prenant bien, on pourra toujours (du moins si $J \vdash K$ est au plus dénombrable) construire un T.S.P. clos pour $J \vdash K$ qui donne les instructions pour bâtir cette démonstration (et trouver la sous-conséquence en question). On regardera donc le T.S.P. lui-même comme une démonstration.

En pratique, en utilisant la méthode pour décider si une conséquence est exacte, on construit un certain nombre de T.S.P. S'il y en a un de clos, ou s'il y en a un dont il apparaît qu'il correspond à un tronc dont le développement est régulier vers un prolongement dont le T.S.P. est clos, on en déduira l'exactitude. S'il y en a un qui possède une conséquence saturée non close, ou qui correspond à un tronc dont une suite de saturation se développe en chaîne infinie, on en déduira l'inexactitude. Mais si aucun ne donne de tels renseignements, le problème ne sera pas tranché (il serait contraire au théorème de CHURCH que la méthode des tableaux sémantiques apporte une telle réponse dans tous les cas). Ce que nous y gagnons, c'est un procédé systématique de recherche d'une démonstration, qu'on peut soumettre à une machine électronique (il y a donc espoir d'avancer par là la solution de problèmes qui s'avèrent longs à résoudre, ou compliqués, ou de les ramener à d'autres (ceux du dernier T.S.P)), et une théorie permettant des investigations plus générales sur le problème de la décision (En particulier, la construction des arbres réguliers jette une certaine lumière sur le rôle joué par le caractère fini des définitions de l'atome, de la formule et de la formule démontrable, dans le "paradoxe de SKOLEM").

BIBLIOGRAPHIE

1. La méthode des tableuax sémantiques, sous sa forme achevée, est d'un développement récent ; peu de littérature donc sur la question.

[1] BETH (E.W.). - Semantic entailment and formal derivability, Mededeelingen Kon. Nederlandse Akad. van Wetenschappen, Afd. Letterkunde, N. R., Deel 18, n° 13. - Amsterdam, 1955.

[2] BETH (E.W.). - Semantic construction of intuitionistic logic, Mededeelingen Kon. Nederlandse Akad. van Wetenschappen, Afd. Letterkunde, N. R., Deel 19, n° 13. - Amsterdam, 1956.

[3] BETH (E.W.). - La crise de la raison et la logique. - Paris, Gauthier-Villars, et Louvain, Nauwelaerts, 1957 (Collection de Logique mathématique, Série A).

2. Autres ouvrages :

[4] GENTZEN (G.). - Recherches sur la déduction logique, trad. et comm. R. Feys et J. Ladrière. - Paris, 1955.

[5] KLEENE (Stephen C.). - Introduction to metamathematics. - Amsterdam, North-Holland publishing, et Groningen, Noordhoff, 1952 (Bibliotheca mathematica, vol. 1).

3. Le 1.4.1. est inspiré de :

[6] ROBINSON (Abraham). - Théorie métamathématique des idéaux. - Paris, Gauthier-Villars, et Louvain, Nauwelaerts, 1955 (Collection de logique mathématique, Série A).