SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE CHEVALLEY

La notion de correspondance propre en géométrie algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 152, p. 219-229

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__219_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

LA NOTION DE CORRESPONDANCE PROPRE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Claude CHEVALLEY

Soient U et V des variétés ; une correspondance Γ, entre U et V, est, par définition, une partie du produit $U \times V$. On désigne par $\overset{-1}{\Gamma}$ la correspondance entre V et U formés des (y, x) pour tous les $(x, y) \in \Gamma$. Si W est une troisième variété, et Δ une correspondance entre V et W, on désigne par $\Gamma \circ \Delta$ l'ensemble des $(x, z) \in U \times W$ pour lesquels il existe un $y \in V$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ et $(y, z) \in \Delta$.

La correspondance Γ est dite <u>algébrique</u> si c'est une partie fermée de $U \times V$, au sens de la topologie de Zariski ; si U et V sont des variétés affines (ou projectives), dire que Γ est fermé, c'est dire que la condition pour qu'un point (x, y) appartienne à Γ peut se traduire par des relations algébriques entre les coordonnées de x et celles de y. Le problème de l'élimination peut alors se formuler comme suit : étant données des correspondances algébriques Γ entre U et V et Δ entre V et W, déterminer à quelle condition un point donné (x, z) de $U \times W$ appartient à $\Gamma \circ \Delta$. En général, $\Gamma \circ \Delta$ n'est pas une partie fermée de $U \times W$, de sorte que $(U, V, W$ étant supposées affines ou projectives), la condition cherchée ne pourra pas s'exprimer par des relations algébriques entre les coordonnées de x et z : il faudra aussi introduire les conditions d'inégalité.

DÉFINITION 1. - <u>On dit qu'une correspondance</u> Γ <u>entre des variétés</u> U <u>et</u> V <u>est propre si, pour toute variété</u> T <u>et toute partie fermée</u> E <u>de</u> $T \times U$, <u>l'ensemble</u> $E \circ \Gamma$ <u>est fermé dans</u> $T \times V$.

Par exemple, si f est un morphisme (application rationnelle partout définie) de V dans U, et Γ_f son graphe, $\overset{-1}{\Gamma}_f$ est une correspondance propre entre U et V. En effet, si T est une variété quelconque, $(t, y) \to (t, f(y))$ est un morphisme g de $T \times V$ dans $T \times U$; si E est une partie fermée de $T \times U$, $E \circ \Gamma_f$ est $\overset{-1}{g}(E)$ qui est fermé en vertu de la continuité de g.

Une <u>fonction</u> f sur une variété U à valeurs dans une variété V est dite <u>propre</u> si l'adhérence du graphe de f dans $U \times V$ est une correspondance propre. Supposons que f soit un morphisme. Pour que f soit propre, il faut et il suffit que, pour toute variété T, l'application $(t, x) \to (t, f(x))$ de $T \times U$ dans $T \times V$

soit fermée (i.e. transforme tout ensemble fermé en un esemble fermé). En effet, l'image d'une partie E de $T \times U$ par cette application n'est autre que $E \circ \Gamma_f$ (où Γ_f est le graphe de f).

1. Propriétés fonctionnelles.

1° Si Γ est une correspondance propre entre U et V et Δ une correspondance propre entre V et W . $\Gamma \circ \Delta$ est une correspondance propre entre U et W. Cela résulte immédiatement de la formule

$$E \circ (\Gamma \circ \Delta) = (E \circ \Gamma) \circ \Delta$$

2° Si Γ est une correspondance propre entre U et V et Γ' une correspondance propre entre U' et V', l'ensemble $\Gamma \divideontimes \Gamma'$ des

$$((x, x'), (y, y')) \in (U \times U') \times (V \times V')$$

tels que $(x, y) \in \Gamma$, $(x', y') \in \Gamma'$ est une correspondance propre. Soient en effet T une vriété et E une partie fermée de $T \times (U \times U')$. Identifiant $T \times (U \times U')$ à $(T \times U') \times U$ et $T \times (V \times U')$ à $(T \times U') \times V$, on voit que l'ensemble E_1 des $(t, y, x') \in (T \times V) \times U'$ pour lesquels il existe un $x \in U$ tel que $(t, x, x') \in E$, $(x, y) \in \Gamma$ est fermé. Par ailleurs, Γ' étant propre, l'ensemble des $(t, y, y') \in T \times V \times V'$ pour lesquels il existe un $x' \in U'$ tel que $(t, y, x') \in E$, et $(x', y') \in \Gamma'$ est fermé ; or cet ensemble est $E \circ (\Gamma \divideontimes \Gamma')$.

Il en résulte que, si f est une fonction propre sur U à valeurs dans V et f' une fonction propre sur U' à valeurs dans V', la fonction $f \divideontimes f'$ définie par $(f \divideontimes f')(x, x') = (f(x), f'(x'))$ si f est défini en x et f' en x' est une fonction propre sur $U \times U'$ à valeurs dans $V \times V'$. En effet, si Γ_f, $\Gamma_{f'}$, sont les graphes de f, f', celui de $f \divideontimes f'$ est l'ensemble $\Gamma_f \divideontimes \Gamma_{f'}$, dont l'adhérence est $\overline{\Gamma}_f \divideontimes \overline{\Gamma}_{f'}$, (si $\overline{\Gamma}_f$, $\overline{\Gamma}_{f'}$, sont les adhérences de Γ_f, $\Gamma_{f'}$).

2. Une caractérisation des correspondances propres:

THÉORÈME 1. - Soit Γ une correspondance entre des variétés U et V. Pour que Γ soit propre, il faut et suffit que Γ soit fermé et que, pour toute variété T, l'application $(t, (x, y)) \rightarrow (t, y)$ $((x, y) \in \Gamma)$ soit une application fermée de $T \times \Gamma$ dans $T \times V$.

Supposons Γ propre. Il est évident que Γ est fermé. Montrons que, si E est une partie fermée de Γ, l'image E' de E par l'application $(x, y) \rightarrow y$ est fermée dans V. L'ensemble E^{-1} est une partie fermée de $V \times U$; $E^{-1} \circ \Gamma$ est donc fermé dans $V \times V$, et on vérifie que si Δ est la diagonale de $V \times V$, E' est la projection sur V de $(\overset{-1}{E} \circ \Gamma) \cap \Delta$. Soient maintenant T une variété et E une partie fermée de $T \times \Gamma$; soit E' son image par l'application de l'énoncé. L'ensemble E_1 des $((t, x), (t, y) \in (T \times U) \times (T \times V))$ tels que $(t, (x, y)) \in E$ est fermé. Or la diagonale D_T de $T \times T$ est une correspondance propre entre T et T ; E_1 est une partie fermée de $D_T \times \Gamma$ qui est une correspondance propre entre $T \times U$ et $T \times V$, et E' est la projection de E_1 sur $T \times V$, ce qui montre que E' est fermé.

Supposons réciproquement les conditions satisfaites. Soient T une variété et E une partie fermée de $T \times U$; $E \circ \Gamma$ est alors l'image par l'application de l'énoncé de l'ensemble des $(t, (x, y)) \in T \times \Gamma$ tels que $(t, x) \in E$, $(x, y) \in \Gamma$, ensemble qui est manifestement fermé ; Γ est donc propre.

Il résulte immédiatement du théorème 1 que toute partie fermée d'une correspondance propre est propre. Comme toute réunion finie de correspondances propres est évidemment propre, on voit que, pour qu'une correspondance soit propre, il faut et suffit que ses composantes irréductibles le soient. Si Γ est une partie irréductible fermée de $U \times V$, il résulte du théorème 1 et de la caractérisation donnée plus haut des morphismes propres qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit propre est que l'application $(x, y) \to y$ induise un morphisme propre de Γ dans V.

Soient f une fonction sur une variété U à valeurs dans une variété V et g une fonction sur V à valeurs dans une variété W. On dit que g est composable avec f si l'ensemble de définition de $g \circ f$, qui est toujours ouvert, est non vide ; il y a alors une fonction et une seule sur U à valeurs dans W qui prolonge $g \circ f$; nous la noterons $g \Theta f$. Si f et g sont propres, il en est de même de $g \Theta f$. En effet, le graphe de $g \circ f$ est $\Gamma_f \circ \Gamma_g$ et est dense dans le graphe de $g \Theta f$. Soient $\overline{\Gamma}_f$ et $\overline{\Gamma}_g$ les adhérences de Γ_f, Γ_g ; $\overline{\Gamma}_f \circ \overline{\Gamma}_g$ est donc une correspondance propre et par suite fermée ; contenant $\Gamma_f \circ \Gamma_g$ elle contient l'adhérence de $\Gamma_{g \Theta f}$; cette dernière, étant partie fermée d'une correspondance propre, est propre.

Si X est une sous-variété fermée d'une variété U, l'application identique de X est évidemment un morphisme propre de X dans U. Si donc X et Y sont des sous-variétés fermées de variétés U, V et Γ une correspondance propre entre U et V, $\Gamma \cap (X \times Y)$ est une correspondance propre entre X et Y. Il en résulte que, si f est une fonction propre sur U à valeurs dans V qui induit une fonction g sur X et qui applique X dans Y, g est une fonction propre sur X à valeurs dans Y.

Nous dirons qu'une fonction f sur une variété U à valeurs dans une variété V est *dominante* si $f(U)$ est dense dans V.

PROPOSITION 1. - *Soit* f *un morphisme d'une variété* U *dans une variété* V ; *s'il existe un morphisme* g *de* V *dans une variété* W *tel que* $g \circ f$ *soit propre* f *est propre et, si* f *est dominant,* g *est propre*.

Montrons d'abord que f est fermé. Soit E une partie fermée de U ; soient Γ_f Γ_g les graphes de f et g. Comme la projection $V \times W \rightarrow V$ induit un homéomorphisme de Γ_g sur V, il suffit, pour montrer que $f(E)$ est fermé, de montrer que l'ensemble E' des $(y , g(y))$ tels que $y \in f(E)$ est fermé dans Γ_g. Si I_V est l'application identique de V, E' est l'image par $I_V * (g \circ f)$ de l'ensemble E'' des $(y , x) \in V \times U$ tels que $y = f(x)$ et $x \in E$. Or $E'' = (V \times E) \cap \overset{-1}{\Gamma}_f$ est fermé ; puisque $I_V * h$ est un morphisme propre, E' est fermé. Nous avons donc bien montré que f est une application fermée. Soit maintenant T une variété quelconque et soit I_T l'application identique de T ; pour montrer que f est propre, il suffit de montrer que l'application $I_T * f \ : \ (t , x) \rightarrow (t , f(x))$ est fermée. Or cela résulte de ce que nous avons établi puisque $I_T * (g \circ f) = (I_T * g) \circ (I_T * f)$ est un morphisme propre. Supposons maintenant f dominant ; comme f est une application fermée, f est surjectif. Soit Ω une correspondance quelconque entre V et W telle que $\Gamma_f \circ \Omega$ soit propre. Soient T une variété quelconque et E une partie fermée de $T \times V$; si Δ_V est la diagonale de V, on a $E = E \circ \Delta_V$ et, puisque f est surjectif, $\Delta_V = \overset{-1}{\Gamma}_f \circ \Gamma_f$, d'où $E \circ \Omega = (E \circ \overset{-1}{\Gamma}_f) \circ (\Gamma_f \circ \Omega)$; or $E \circ \overset{-1}{\Gamma}_f$ est fermé parce que $\overset{-1}{\Gamma}_f$ est une correspondance propre ; $E \circ \Omega$ est donc fermé, ce qui montre que Ω est propre. Appliquant ceci au cas où $\Omega = \Gamma_g$, on voit que g est propre.

COROLLAIRE. - *Soit* f *un morphisme dominant d'une variété* U *dans une variété* V. *Si* g *est une fonction sur* V *à valeurs dans* W *telle que* $h = g \Theta f$ *soit propre* g *est propre*.

Soient $\overline{\Gamma}_g$, $\overline{\Gamma}_h$ les adhérences des graphes Γ_g, Γ_h de g, h. Si $x \in U$ est tel que g soit défini en $f(x)$, on a $(f(x) , h(x)) \in \Gamma_g$. Il en résulte tout de suite que l'application $(x , z) \longrightarrow (f(x) , z)$ de $U \times W$ dans $V \times W$ induit un morphisme $\hat{f}$ de $\overline{\Gamma}_h$ dans $\overline{\Gamma}_g$. Soient g^* et h^* les restrictions à $\overline{\Gamma}_g$ et $\overline{\Gamma}_h$ des projections $V \times W \longrightarrow V$ et $U \times W \longrightarrow W$ respectivement ; ce sont des morphismes et on a $g^* \circ \hat{f} = h^*$. Le morphisme $\hat{f}$ est évidemment dominant ; puisque h est propre, h^* est propre ; g^* est donc propre, en vertu de la proposition 1, d'où il résulte que g est propre.

3. Localisation de la notion de fonction propre.

Soit f une fonction sur une variété U à valeurs dans une variété V. On dit que f est propre au-dessus d'un point y de V si y est adhérent à $f(U)$ et s'il existe une sous-variété ouverte V_0 de V contenant y telle que la restriction f_0 de f à $\overset{-1}{f}(V_0)$ soit une fonction propre sur $\overset{-1}{f}(V_0)$ à valeurs dans V_0 (auquel cas f_0 est aussi, comme on le voit facilement, une fonction propre sur U à valeurs dans V_0).

Pour qu'une fonction $f : U \to V$ soit propre, il faut et suffit qu'elle soit propre au-dessus de tout point de l'adhérence de $f(U)$. Supposons en effet cette condition satisfaite. Soient Γ_f le graphe de f, $\overline{\Gamma_f}$ son adhérence, T une variété, E une partie fermée de $T \times U$, (f, y) un point de $T \times V$ adhérent à $A = E \circ \overline{\Gamma_f}$. On voit d'abord facilement que $A \subset T \times \overline{f(U)}$ (où $\overline{f(U)}$ est l'adhérence de $f(U)$), d'où $y \in \overline{f(U)}$. Il y a donc une sous-variété ouverte V_0 de V contenant y telle que la restriction f_0 de f à $\overset{-1}{f}(V_0)$ soit une fonction propre sur U à valeurs dans V_0. Soit $\overline{\Gamma_{f_0}}$ l'adhérence dans $U \times V_0$ du graphe Γ_{f_0} de f_0. On a $\Gamma_{f_0} = \Gamma_f \cap (U \times V_0)$, et, comme $U \times V_0$ est ouvert,

$$\overline{\Gamma_{f_0}} = \overline{\Gamma_f} \cap (U \times V_0) .$$

On a donc $E \circ \overline{\Gamma_{f_0}} = A \cap (T \times V_0)$, comme $T \times V_0$ est ouvert, (t, y) est adhérent à $E \circ \overline{\Gamma_{f_0}}$, donc appartient à cet ensemble puisque f_0 est propre, d'où $(t, y) \in A$.

4. Correspondances propres et variétés complètes.

On peut définir une variété complète U par la condition qu'il existe un morphisme propre f de U dans une variété réduite à un point a. Soit alors T une variété quelconque ; comme f est propre, l'application $I_T * f$ (où I_T est l'application identique de T) est propre, ce qui signifie que la projection $T \times U \to T$ est propre. Si donc X est une sous-variété fermée de $T \times U$, le morphisme $X \to T$ induit par la projection $T \times U \to T$ est propre. De plus toute correspondance fermée Γ entre U et une variété V quelconque est propre ; si T est une variété quelconque, la projection $T \times U \times V \to T \times V$, qui est propre, induit une application fermée de $T \times \Gamma$ dans $T \times V$, ce qui montre que Γ est propre (théorème 1). En particulier, toute fonction g sur U à valeurs dans une variété V quelconque est propre.

Si g est un morphisme, g est une application fermée, ce qui montre que $g(U)$ est fermée ; de plus, $g(U)$ est une variété complète, car, si h est un morphisme constant de $g(U)$, $h \circ g$ est propre, ce qui implique que h est propre (proposition 1). En particulier, toute sous-variété complète d'une variété V est fermée dans V. Par ailleurs, si u est une fonction numérique partout définie sur une variété complète U, $u(U)$ est une sous-variété complète de K, donc réduite à un point ; tout morphisme de U dans une variété affine est donc constant.

Si U et V sont des variétés complètes, $U \times V$ est complète ; car si f, g sont des morphismes constants propres de U, V, $f * g$ est un morphisme constant et propre de $U \times V$.

Le résultat suivant est dû à CHOW :

THÉORÈME 2. - Soit V une variété. Il existe alors une variété complète U et une fonction propre f sur U à valeurs dans V qui possèdent les propriétés suivantes : f est birationnelle et surjective, et le graphe de f est fermé dans $U \times V$. On peut de plus supposer que U est uen sous-variété d'un produit de droites projectives.

Si toutes ces conditions sont satisfaites, nous dirons que (U, f) est une pré-présentation de Chow de V. Le théorème est évident si V est affine. Il suffit de montrer que, si des sous-variétés ouvertes V_i $(i = 1,2)$ de V telles que $V = V_1 \cup V_2$ admettent des présentations de Chow (U_i, f_i), V admet une présentation de Chow (U, f) telle que U soit une sous-variété de $U_1 \times U_2$. Il y a une sous-variété ouverte U_i' de U_i telle que f_i induise un isomorphisme f_i' de U_i' sur une sous-variété ouverte V_i' de V_i ; on prend pour U l'adhérence dans $U_1 \times U_2$ de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in U_1' \times U_2'$ tels que $f_1(x_1') = f_2(x_2')$; U est alors une sous-variété fermée donc complète de $U_1 \times U_2$.

Les projections de $U_1 \times U_2$ sur ses deux facteurs induisent des morphismes propres $\pi_i : U \to U_i$. La fonction f_i se prolonge en une fonction f_i^* sur U_i à valeurs dans V ; cette fonction est propre puisque U_i est complète. Il est clair que $f_1^* \pi_1 = f_2^* \odot \pi_2$; soit f leur valeur commune, qui est propre puisque U est complète. Il est évident que f est birationnelle. Montrons que son graphe est fermé. Soit $((x_1, x_2), y)$ un point adhérent au graphe de f, et soit i tel que $y \in V_i$. La restriction $\tilde{f}$ de f à $\overset{-1}{f}(V_i)$ peut être considérée comme une fonction sur U à valeurs dans V_i ; comme $U \times V_i$ est ouvert dans $U \times V$, $((x_1, x_2), y)$ est adhérent au graphe de $\tilde{f}$. Or il est clair que $f = f_i \odot \pi_i$;

l'ensemble $\Gamma_{\pi_i} \circ \Gamma_{f_i}$, graphe de $f_i \circ \pi_i$, est dense dans le graphe $\Gamma_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$. Or, Γ_{f_i} est fermé par hypothèse ; comme f_i est propre, Γ_{f_i} est une correspondance propre entre U_i et V_i . Par ailleurs, π_i étant un morphisme, Γ_{π_i} est fermé ; $\Gamma_{\pi_i} \circ \Gamma_{f_i}$ est donc fermé et identique à l'adhérence de $\Gamma_{\tilde{f}}$. Il en résulte que $((x_1 , x_2) , y) \in \Gamma_{\pi_i} \circ \Gamma_{f_i}$, d'où $(x_i , y) \in \Gamma_{f_i}$, ce qui montre que f_i est défini en x_i , donc que $\tilde{f} = f_i \odot \pi_i$ est défini en (x_1 , x_2) ; f est donc défini en (x_1 , x_2) , d'où $((x_1 , x_2) , y) \in \Gamma_f$, ce qui montre que Γ_f est fermé. C'est donc une correspondance propre entre U et V ; il en résulte que sa projection sur V est fermée, donc que $f(U)$ est fermé, d'où $f(U) = V$ puisque f est birationnelle.

Soit g une fonction sur une variété V à valeurs dans une variété W , et soit z un point adhérent à $g(V)$. Soit (U , f) une présentation de Chow de V , et soit $h = g \odot f$. Pour que g soit propre au-dessus de z , il faut et suffit que tout point $x \in U$ tel que (x , z) appartienne à l'adhérence $\overline{\Gamma}_h$ du graphe Γ_h de h appartienne à l'ensemble de définition de f .

Nous avons besoin, pour démontrer ce résultat, du lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soit</u> r <u>une fonction propre sur une variété</u> X <u>à valeurs dans une variété</u> Y . <u>Soient</u> X' <u>et</u> Y' <u>des sous-variétés ouvertes de</u> X <u>et</u> Y ; <u>si l'adhérence</u> $\overline{\Gamma}_r$ <u>du graphe de</u> r <u>est telle que</u> $\overline{\Gamma}_r \cap (X \times Y') \subset X' \times Y'$, <u>la restriction</u> r' <u>de</u> r <u>à</u> X' <u>est une fonction propre sur</u> X' <u>à valeurs dans</u> Y' .

Soient T une variété, E une partie fermée de $T \times X'$ et $\bar{E}$ l'adhérence de E dans $T \times X$, d'où $E = (T \times X') \cap \bar{E}$. L'adhérence $\overline{\Gamma}_{r'}$ du graphe de r' dans $X' \times Y'$ est $\overline{\Gamma}_r \cap (X' \times Y')$; on a

$$E \circ \overline{\Gamma}_{r'} = E \circ (\overline{\Gamma}_r \cap (X' \times Y')) = (\bar{E} \cap (T \times X')) \circ (\overline{\Gamma}_r \cap (X' \times Y')) ,$$

ensemble qui est égal, en vertu de l'hypothèse faite, à $(\bar{E} \circ \overline{\Gamma}_r) \cap (T \times Y')$, ce qui montre qu'il est fermé dans $T \times Y'$. Si W_0 est une sous-variété ouverte de W contenant z , nous désignerons par g_0 la restriction de g à $\overset{-1}{g}(W_0)$, considérée comme fonction sur V à valeurs dans W_0 , et nous poserons $h_0 = g_0 \odot f$; l'adhérence $\overline{\Gamma}_{h_0}$ du graphe de h_0 dans $U \times W_0$ est $\overline{\Gamma}_h \cap (U \times W_0)$. Supposons que g soit propre au-dessus de z ; choisissons alors W_0 tel que g_0 soit propre. L'ensemble $\Gamma_f \circ \overline{\Gamma}_{g_0}$ est fermé dans $U \times W_0$ puisque Γ_f est fermé et

$\overline{\Gamma}_{g_0}$ propre ; cet ensemble contient $\Gamma_f \circ \Gamma_{g_0}$, donc aussi son adhérence $\overline{\Gamma}_{h_0}$. Si $(x , z) \in \overline{\Gamma}_h$, on a $(x , z) \in \overline{\Gamma}_{h_0} \subset \Gamma_f \circ \overline{\Gamma}_{g_0}$, ce qui montre que f est défini en x . Supposons maintenant la condition satisfaite. Soit U' l'ensemble de définition de f ; $U - U'$ est donc fermé ; comme U est complète, la projection A sur W de $\overline{\Gamma}_h \cap ((U - U') \times W)$ est fermée ; $W_0 = W - A$ est une sous-variété ouverte de W qui contient par hypothèse z . On a $\overline{\Gamma}_{h_0} \subset U' \times W_0$; les applications f et h_0 peuvent donc être considérées comme des fonctions f' et h_0' sur U' à valeurs dans V et W_0 respectivement ; f' est un morphisme et h_0' est propre (lemme 1). Comme on a $h_0' = g_0 \odot f'$ et comme f' est surjectif, g_0 est propre (corollaire à la proposition 1), de sorte que g est propre au-dessus de Z .

Si g est un morphisme propre d'une variété V dans une variété W , et si $z \in W$, toute composante irréductible Y de $g^{-1}(z)$ est une variété complète. En effet, Y est une sous-variété fermée de V , de sorte que la restriction de g à Y est un morphisme propre et constant de Y . La réciproque n'est pas vraie : par exemple, si V est une sous-variété ouverte de W et g l'application identique $V \to W$, alors, pour tout $z \in W$, $g^{-1}(z)$ est soit vide soit composé d'un seul point mais g n'est pas propre si $V \neq W$. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - *Soit g un morphisme d'une variété V dans une variété W . Si, quel que soit $z \in W$, toute composante irréductible de $g^{-1}(z)$ est complète, il y a un point $z_0 \in W$ tel que g soit complète au-dessus de z_0 .*

Soit (U , f) une présentation de Chow de V , et soit $h = g \odot f$. Désignons par $\overline{\Gamma}_h$ l'adhérence du graphe de h et par r , s les morphismes $\overline{\Gamma}_h \to U$, $\overline{\Gamma}_h \to W$ induits par les projections de $U \times W$ sur U et sur W . Soit U' l'ensemble de définition de U ; $E = r^{-1}(U - U')$ est alors une partie fermée $\neq \overline{\Gamma}_h$ de $\overline{\Gamma}_h$. On voit facilement pour des raisons de dimension qu'il y a une sous-variété ouverte W_0 de W telle que, si $z \in W_0$, aucune composante irréductible de $s^{-1}(z)$ ne soit contenue dans E . Soit $z \in W_0$; si T est une composante irréductible de $s^{-1}(z)$, $r(T)$ rencontre U' , et $r(T) \cap U'$, qui est irréductible, est contenu dans une composante irréductible Y de $h^{-1}(z)$. Soit X l'adhérence de $r(T) \cap U'$ dans U ; f induit sur X une fonction f_X à valeurs dans Y qui est propre puisque f est propre. L'adhérence $\overline{\Gamma}_{f_X}$ du graphe de f est contenue dans l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ du graphe de f , donc dans Γ_f puisque Γ_f est fermé. Or, Y étant par hypothèse complète, la projection $X \times Y \to X$ induit un morphisme propre de $\overline{\Gamma}_{f_X}$ dans X ;

ce morphisme est une application fermée, d'où il résulte aussitôt qu'il est surjectif. Si donc $x \in X$, il y a un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in \overline{\Gamma}_{f_X} \subset \overline{\Gamma}_f$, ce qui implique que $x \in U'$; on a donc $X \subset U'$ et par suite $r(T) \subset U'$. Ceci étant vrai pour toute composante irréductible T de $\overset{-1}{s}(z)$, on voit que tout $x \in U$ tel que $(x, z) \in \overline{\Gamma}_h$ appartient à U' : on a vu qu'il en résulte que g est propre au-dessus de Z.

COROLLAIRE. - Si G est un groupe algébrique et H un sous-groupe de G tel que H et G/H soient des variétés complètes, G est complet.

Soit en effet f l'application canonique $G \to G/H$. Pour tout $y \in G/H$, $\overset{-1}{f}(y)$ est une variété complète ; il y a donc un $y \in G/H$ tel que f soit propre au-dessus de y. Mais alors f est évidemment encore propre au-dessus de $s.y$, où s est un élément quelconque de G, i.e. au-dessus de tout point de G/H ; f est donc un morphisme propre de G dans la variété complète G/H, ce qui montre que G est complet.

5. Caractérisation algébrique de la notion de fonction propre.

Si U est une variété, et $x \in U$, les fonctions numériques u sur U qui sont définies en x forment un anneau local, que nous désignons par $\mathcal{O}(x)$ ou $\mathcal{O}_U(x)$, l'application $u \to u(x)$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(x)$ dans le corps K des constantes, que nous appelons l'assignation associée à x. Soit F_U le corps des fonctions numériques sur U ; on appelle place de F_U tout homomorphisme dans K d'une sous-algèbre $\mathcal{V}$ de F_U sur K qui possède la propriété suivante : si $u \in F_U$ n'appartient pas à $\mathcal{V}$, u^{-1} y appartient. Tout homomorphisme dans K d'une sous-algèbre de F_U se prolonge d'au moins une manière en une place.

Soit f une fonction, que nous supposerons pour simplifier dominante, sur une variété U à valeurs dans une variété V. Si v est une fonction numérique sur V, il y a une fonction numérique $\varphi(v) = v \odot f$ et une seule sur U qui prolonge l'application $v \circ f$; φ est un isomorphisme du corps F_V sur un sous-corps de F_U. Si ζ_y est l'assignation associée à un point $y \in V$, nous désignerons par ζ_y^{φ} l'homomorphisme $\varphi(v) \to v(y) = \zeta_y(v)$ de l'anneau $\mathcal{O}^{\varphi}(y) = \varphi(\mathcal{O}(y))$ dans K. Si $x \in U$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit définie en x et y prenne la valeur y est que l'assignation ζ_x associée à x prolonge ζ_y^{φ}. Il n'est pas difficile de montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (x, y) appartienne à l'adhérence $\overline{\Gamma}_f$ du graphe de f est qu'il existe une place de F_U qui prolonge à la fois ζ_x et ζ_y^{φ}. On voit d'abord en effet tout de suite qu'on peut se ramener au cas où U et V sont affines ; soient alors P et Q leurs algèbres affines. Les projections de $U \times V$ sur U et V induisent des morphismes dominants $r : \overline{\Gamma_f} \to U$, $s : \overline{\Gamma_f} \to V$, qui définissent eux-mêmes des isomorphismes ρ et σ de F_U et F_V sur des sous-corps du corps Φ des fonctions numériques sur $\overline{\Gamma_f}$. Comme $U \times V$ est une variété affine d'algèbre affine $P \otimes Q$, $\overline{\Gamma_f}$ est une variété affine dont l'algèbre affine R est engendrée par les $\rho(u)$, $u \in P$ et $\sigma(v)$, $v \in Q$. Si $(x , y) \in \overline{\Gamma_f}$, l'assignation associée à ce point prolonge ζ_x^{ρ} et ζ_y^{σ} ; cette assignation se prolonge en une place π du corps Φ . Or ρ est un isomorphisme de F_U sur Φ ; la place de F_U qui correspond à π par cet isomorphisme prolonge ζ_x et ζ_y^{ρ} . Réciproquement, s'il y a une place de F_U qui prolonge ζ_x et ζ_y^{ρ}, il y a une place π de Φ qui prolonge ζ_x^{ρ} et ζ_y^{σ} ; l'anneau de définition $\mathfrak{O}$ de π contient donc $\rho(P)$ et $\sigma(Q)$, d'où $R \subset \mathfrak{O}$; la restriction de π à R est un homomorphisme de R dans K qui détermine un point Z de $\overline{\Gamma_f}$, dont on voit tout de suite qu'il se projette en x et y sur U et V , d'où $(x , y) \in \overline{\Gamma_f}$.

THÉORÈME 3. - Pour qu'une variété V soit complète, il faut et il suffit que, pour toute place π du corps F_V des fonctions numériques sur V , il y ait un point $y \in V$ tel que π prolonge l'assignation associée à y .

Supposons d'abord que V soit une sous-variété fermée d'un produit de droites projectives. Il y a alors des fonctions numériques $t_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$ sur V telles que V soit réunion de 2^n morceaux affines $V_{e_1 , \dots , e_n} (e_i = \pm 1)$, $V_{e_1 , \dots , e_n}$ admettant comme algèbre affine l'algèbre $P[t_1^{e_1}, \dots , t_n^{e_n}]$. Si π est une place de F_V , il y a pour chaque i un exposant $e_i = \pm 1$ tel que $t_i^{e_i}$ appartienne à l'anneau de définition $\mathfrak{O}$ de π . On a alors $P[t_1^{e_1}, \dots , t_n^{e_n}] \subset \mathfrak{O}$ la restriction de π à $P[t_1^{e_1} , \dots , t_n^{e_n}]$ est un homomorphisme de cette algèbre dans K et détermine par suite un point $y \in V_{e_1 , \dots , e_n}$; la place π prolonge l'assignation associée à y .

Passons maintenant au cas général. Soit (u , f) une présentation de Chow de V . Alors f détermine un isomorphisme φ de F_V sur F_U qui fait correspondre à toute place π de F_V une place π^{φ} de F_U . Comme U est une sous-variété fermée d'un produit de droites projectives, il y a un $x \in U$ tel que π^{φ} prolonge l'assignation ζ_x de F_U associée à x . Si V est complète, f est un morphisme; en effet, le graphe de Γ_f est fermé, de sorte que, si V est complète, l'image d de Γ_f par la projection $U \times V \to U$ est fermée et est par suite U tout entier.

Dans ce cas, soit $y = f(x)$; ζ_x prolonge ζ_y^{φ}, et, comme Π^{φ} prolonge ζ_x, Π prolonge ζ_y. Supposons réciproquement la condition de l'énoncé du théorème satisfaite. Partons d'un point x quelconque de U ; comme Π^{φ} peut être une place quelconque de F_U, on peut choisir Π de telle manière que Π^{φ} prolonge ζ_x ; si y est tel que Π prolonge ζ_y, Π^{φ} prolonge ζ_x et ζ_y^{φ}, de sorte que (x , y) appartient à l'adhérence du graphe de f. Comme ce dernier est fermé, (x , y) appartient au graphe de f, de sorte que f est défini en x. L'application f est donc un morphisme surjectif $U \to V$, ce qui montre que V est complète.

THÉORÈME 4. - *Soit* g *une fonction dominante sur une variété* V *à valeurs dans une variété* W, *et soit* γ *l'isomorphisme correspondant du corps* F_W *des fonctions numériques sur* F_W *sur un sous-corps de* F_V. *Soit* $z \in W$; *pour que* g *soit propre au-dessus de* z, *il faut et suffit que, pour toute place* Π *de* F_V *qui prolonge* ζ_z^{φ} *(où* ζ_z *est l'assignation de* F_W *associée à* z*), il existe un point* $y \in V$ *tel que* Π *prolonge l'assignation* ζ_y *associée à* y.

Soit (U , f) une présentation de Chow de V, et soit $h = g \odot f$. Pour que g soit complète au-dessus de z, il faut et suffit, comme on l'a vu, que tout $x \in U$ tel que (x , z) appartienne à l'adhérence du graphe de h soit contenu dans l'ensemble de définition de f, i.e. qu'il existe un $y \in V$ tel que (x , y) appartienne à l'adhérence du graphe de f. Ceci étant, la démonstration du théorème 4 est entièrement analogue à celle du théorème 3, en se limitant à celles des places Π de F_V qui prolongent ζ_Z^{γ} et à ceux des $x \in U$ tels que (x , z) appartienne à l'adhérence du graphe de h.

COROLLAIRE. - *Soit* g *un morphisme propre est dominant d'une variété* V *dans variété* W ; *soient* z *un point de* W, $\mathcal{O}(z)$ *son anneau local et* γ *l'isomorphisme de* F_W *sur un sous-corps de* F_V *défini par* g. *Pour qu'une fonction numérique* v *sur* V *n'ait aucun pôle sur l'ensemble* $g^{-1}(z)$, *il faut et suffit que* v *soit entier sur l'anneau* $\gamma(\mathcal{O}(z))$.

Si $y \in V$, il est bien connu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que v n'ait pas de pôle en y est que v soit entier sur l'anneau local $\mathcal{O}(y)$ de y donc appartienne aux anneaux de définition de toutes les places qui prolongent l'assignation associée à y. Or, g étant propre, ces places sont toutes les places de F_V qui prolongent ζ_z^{γ}, où ζ_z est l'assignation associée à z. L'intersection de toutes ces places étant la fermeture entière de $\gamma(\mathcal{O}(z))$, le corollaire est établi.

On déduit tout de suite de là que, si V et W sont affines, d'algèbres affines Q et R, une condition nécessaire et suffisante pour que g soit propre est que Q soit entier sur l'anneau $\gamma(R)$.