BERNARD MALGRANGE

Variétés analytiques réelles

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 150, p. 195-206
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__195_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES

par Bernard MALGRANGE

(d'après F. BRUHAT, H. CARTAN, et B. MALGRANGE)

1. Sous-ensembles analytiques.

Soit V une variété analytique réelle ; un sous-ensemble E de V est appelé sous-ensemble analytique si tout point $a \in V$ possède un voisinage $\mathcal{O}$ tel que $E \cap \mathcal{O}$ soit l'ensemble des zéros d'un nombre fini de fonctions analytiques dans $\mathcal{O}$ (nombre qu'on peut d'ailleurs prendre égal à un 1). La notion de germe de sous-ensemble analytique se définit alors de la manière habituelle ; comme l'anneau des fonctions analytiques en un point est noethérien, tout germe de sous-ensemble analytique admet une décomposition unique en un nombre fini de germes irréductibles.

Supposons provisoirement que V soit un ouvert $\subset R^n$ (ce qui est licite si l'on étudie les propriétés locales des sous-ensembles analytiques) et plongeons R^n dans C^n : soit alors E un sous-ensemble analytique de V, et E_a le germe induit par E au point $a \in V$; soit $\tilde{E}_a$ le complexifié de E_a, c'est-à-dire le plus petit germe d'ensemble analytique complexe en a contenant E_a ; la dimension de $\tilde{E}_a$, c'est-à-dire la plus grande des dimensions complexes des composantes de $\tilde{E}_a$, s'appelle par définition la dimension du germe E_a : la borne supérieure des dimensions des E_a, aux différents points de V, s'appelle la dimension de E. Désignons par $V_p(E)$ l'ensemble des points de E au voisinage desquels E est une sous-variété de dimension p. En utilisant les propriétés classiques des points singuliers des sous-ensembles analytiques complexes, on démontre alors les résultats suivants (voir [1], et [4]) :

PROPOSITION 1. - Les composantes irréductibles de $\tilde{E}_a$ sont les complexifiés des composantes irréductibles de E_a. Si $\dim E_a = p$, le point a est adhérent à $V_p(E)$, et il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de a et un sous-ensemble analytique S de $\mathcal{O}$ de dimension $< p$, tel que l'on ait :

$$S \subset E \cap \mathcal{O} \subset (V_p(E) \cap \mathcal{O}) \cup S$$

Soit maintenant V une variété analytique réelle, et soit G_p l'ensemble de tous les germes irréductibles de dimension p de sous-ensemble analytique aux différents points de E ; on munit G_p de la topologie dans laquelle un système fondamental d'ouverts $\Gamma(\mathcal{O}, E)$ est obtenu ainsi : pour tout couple $(\mathcal{O}, E)$ formé d'un ouvert $\mathcal{O} \subset V$ et d'un sous-ensemble analytique E *de dimension* p de $\mathcal{O}$, $\Gamma(\mathcal{O}, E)$ est l'ensemble des germes composants irréductibles de dimension p de E aux différents points de E.

Muni de cette topologie, G_p est séparé (comme on le voit en complexifiant). Si E est un sous-ensemble analytique de dimension p de V, l'espace $G_p(E)$ (germes irréductibles de dimension p de E aux différents points de E) est ouvert et fermé dans G_p. On a de plus [2] :

THÉORÈME 1. - *L'espace* G_p *est localement connexe* (par arcs).

Pour obtenir ce théorème, on démontre le résultat suivant (démonstration assez technique, utilisant la structure des germes complexes (cf. [9]).

Soit E un sous-ensemble analytique, et a un point de E tel que le germe E_a soit irréductible et de dimension p : il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de a tel que $V_p(E) \cap \mathcal{O}$ ait un nombre fini de composantes connexes A_i et que a soit "fortement adhérent" à chacune d'elles (i.e. il existe un arc γ_i d'extrémité a tel que $\gamma_i - \{a\} \subset A_i$).

COROLLAIRE 1. - *Soit* E *un sous-ensemble analytique de* V, *et soit* a *un point de* E ; *il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{O}$ *de* a *possédant la propriété suivante* : *si un sous-ensemble analytique* F *de* V *contient* E_a ; *il contient* $E \cap \mathcal{O}$.

(Raisonner par récurrence sur la dimension de E_a en utilisant la proposition 1)

COROLLAIRE 2. - *Toute intersection de sous-ensembles analytiques est un sous-ensemble analytique.*

Soit E_i, $i \in I$ une famille de sous-ensembles analytiques de V, et $(E_i)_a$ le germe induit par E_i au point a ; la famille des intersections finies des $(E_i)_a$ est stationnaire ; donc (corollaire 1) il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de a tel que la famille des intersections finies de $E_i \cap \mathcal{O}$ soit stationnaire.

Etant donné un sous-ensemble quelconque A de V, le corollaire 2 permet donc de définir *le plus petit sous-ensemble analytique de* V *contenant* A.

COROLLAIRE 3. - *Soit* E *un sous-ensemble analytique de* V, *de dimension* p ; *il existe une famille* (x_i) *de points de* E, *sans point d'accumulation, possédant la propriété suivante* :

Si un sous-ensemble analytique $F \subset E$ ne contient aucun des points x_i, on a $\dim F < \dim E$.

(Si V est dénombrable à l'infini, l'ensemble des x_i sera donc dénombrable). Il suffit pour cela de choisir un point g_i dans chacune des composantes connexes de $G_p(E)$, et de prendre pour x_i l'image de g_i dans V ; le théorème 1 entraîne que les x_i n'ont aucun point d'accumulation.

A propos du corollaire 3, remarque ceci : si V est une variété analytique complexe et E un sous-ensemble analytique complexe de V, un résultat analogue au précédent (et bien connu) se démontre ainsi : décomposons E en composantes irréductibles E_i, et prenons un point x_i sur chacune de ces composantes : alors si $F \subset E$ ne contient aucun des x_i, on a $F \cap E_i \neq E_i$, donc $\dim(F \cap E_i) < \dim E_i$ d'autre part, les x_i n'ont aucun point d'accumulation parce que tout compact de V ne rencontre qu'un nombre fini de E_i.

Ce raisonnement n'est pas applicable aux sous-ensembles analytiques réels, et ceci pour deux raisons (voir paragraphe 4).

1° On ne peut pas toujours décomposer un sous-ensemble analytique en composantes irréductibles (globales) !

2° Si E est irréductible et si $F \subset E$, $F \neq E$, il se peut que l'on ait : $\dim F = \dim E$!!

2. Plongement euclidien.

Dans toute la suite nous considérerons seulement des fonctions analytiques à valeurs réelles. Ceci dit, le paragraphe va être consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit V une variété analytique réelle, dénombrable à l'infini, de dimension n, munie d'un ds^2 analytique. Alors V est régulièrement plongeable dans un espace euclidien (i.e. il existe une application analytique $V \to R^N$, propre, injective, et de rang n en chaque point).

(autrement dit : V peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace R^N).

EXEMPLE. - V est un ouvert de R^n (ici, il suffit évidemment de démontrer qu'il existe une application propre $V \to R^m$, mais cela ne simplifie pas grand'chose!).

a. Approximation des fonctions analytiques.

Je rappelle le résultat suivant, qu'on pourrait appeler "théorème de Runge pour les fonctions harmoniques" (cf. [6]) :

soit W une variété analytique réelle, dénombrable à l'infini, et D un opérateur différentiel elliptique, à coefficients analytiques sur W ; soit Ω un ouvert $\subset W$ tel que $\complement\Omega$ n'ait aucune composante connexe compacte ; toute solution dans Ω de l'équation $Df = 0$ peut être approchée uniformément sur tout compact de Ω par des solutions dans V de cette équation. (Naturellement, à cause de hypoellipticité de D et du théorème du graphe fermé, la convergence uniforme sur tout compact peut être remplacée par la convergence dans l'espace $\mathcal{E}\Omega$ des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω, où la convergence dans l'espace $\mathcal{D}'\Omega$ des distributions dans Ω, ou toute autre analogue).

Considérons alors une variété, V, vérifiant les hypothèses du théorème 2, et soit $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset V$, et f une fonction analytique dans $\mathcal{O}$: prenons pour W la variété $V \times R$ (R paramétré par t) et munissons W de la métrique riemannienne $ds^2 + dt^2$ (ds^2 étant la métrique de V) : soit Δ l'opérateur de Laplace associé à cette métrique ; identifions V à $V \times \{0\}$, et soit $\tilde{\mathcal{O}}$ un voisinage de $\mathcal{O}$ dans W, tel que f se prolonge dans $\tilde{\mathcal{O}}$ en une fonction harmonique $\tilde{f}$ (existence par Cauchy-Kovalevska), et tel que la complémentaire de $\tilde{\mathcal{O}}$ dans W n'ait aucune composante connexe compacte (ce qu'on peut toujours supposer en diminuant au besoin $\tilde{\mathcal{O}}$). D'après le théorème de Runge, $\tilde{f}$ est limite dans $\mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{O}}}$ de fonctions harmoniques dans W ; donc f est limite, dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ de fonctions analytiques dans V. Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

<u>Toute fonction analytique dans un ouvert</u> $\mathcal{O} \subset V$ <u>est limite, dans</u> $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, <u>de fonctions analytiques dans</u> V.

Ce résultat suffit déjà à établir le théorème 2 lorsque V est compacte.

Si maintenant V n'a aucune composante connexe compacte (ce que nous supposerons dans la suite du paragraphe 2), il est nécessaire de le renforcer, et plus précisément, de démontrer le

LEMME 1. - <u>Soient</u> $\mathcal{O}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) <u>une suite d'ouverts</u> $\subset V$, <u>deux à deux disjoints</u>, f_i <u>une fonction analytique dans</u> $\mathcal{O}_i$ <u>et</u> u_i <u>un voisinage de zéro dans</u> $\mathcal{E}_{\mathcal{O}i}$. <u>Supposons en outre que tout compact de</u> V <u>ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts</u> $\mathcal{O}_i$. <u>Il existe alors une fonction analytique</u> g <u>dans</u> V <u>qui, pour tout</u> i, <u>vérifie</u> $g - f_i \in u_i$.

DÉMONSTRATION. - On se ramène à la situation suivante : il existe une suite d'ouverts relativement compacts Ω_i ($i = 1, 2, \ldots$) vérifiant :

$$\bar{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1} \ ; \ \cup \Omega_i = V \ ; \ \mathcal{O}_i \subset \Omega_i - \bar{\Omega}_{i-1}$$

Soit alors $\tilde{\mathcal{O}}_i$ construit comme précédemment ; on peut supposer $\tilde{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_i x]-1 , 1[$ et soit $\tilde{f}_i$ une fonction harmonique dans $\tilde{\mathcal{O}}_i$ prolongeant f_i ; soit enfin $\tilde{\Omega}_i$ l'ouvert $\Omega_i \, x]-1-i , 1+i[$.

Tout revient à démontrer ceci : <u>étant donné, pour tout</u> i , K_i <u>compact dans</u> $\tilde{\mathcal{O}}_i$, <u>et</u> $a_i > 0$, <u>il existe</u> $\tilde{g}$ <u>harmonique dans</u> W <u>et vérifiant, pour tout</u> i : $|\tilde{g} - \tilde{f}_i| < a_i$ <u>sur</u> K_i .

Pour établir ce résultat, on peut supposer la suite a_i décroissante ; on construit alors par récurrence, en utilisant le théorème de Runge, une suite $\tilde{g}_i$ de fonctions harmoniques dans W , qui vérifient :

1° $|\tilde{g}_i - \tilde{g}_{i-1}| \leq \frac{a_i}{2^i}$ dans $\bar{\Omega}_{i-2} \cup K_{i-1}$ (on pose $\tilde{\Omega}_{-1} = \tilde{\Omega}_0 = K_0 = \emptyset$, $\tilde{g}_0 = 0$

2° $|\tilde{g}_i - \tilde{f}_i| \leq \frac{a_i}{2}$ dans K_i .

Les $\tilde{g}_i$ convergent uniformément sur tout compact $\subset W$ vers une fonction $\tilde{g}$; et l'on vérifie immédiatement que $\tilde{g}$ possède les propriétés voulues, d'où le le lemme.

Le théorème 2 est maintenant très facile à établir :

b. <u>Existence d'une application propre</u>.

Soit $\mathcal{O}_i$ une suite d'ouverts relativement compacts de V , vérifiant $\bar{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_{i+1}$; $\cup \mathcal{O}_i = V$. Il existe f , analytique dans V , vérifiant pour tout i : $|f - i| \leq \frac{1}{2}$ dans $\mathcal{O}_{2i} - \bar{\mathcal{O}}_{2i-1}$ (lemme 1) ; il existe de même g analytique dans V et vérifiant $|g - i| \leq \frac{1}{2}$ dans $\mathcal{O}_{2i+1} - \mathcal{O}_{2i}$. Alors le couple (f , g) (ou si l'on préfère, la fonction $f^2 + g^2$) définit une application propre $V \to R^2$ (resp. $V \to R$) :

c. <u>Existence d'une application de rang</u> n $(= \dim V)$ <u>en tout point</u>.

Soient $f_1 , \dots , f_m$ des fonctions analytiques dans V , et soit $E_{f_1,\dots,f_m}$ l'ensemble des points de V où l'application $x \to (f_1(x) , \dots , f_m(x))$ est de rang $< n$. $E_{f_1 \dots f_m}$ est un sous-ensemble analytique de V , auquel nous pouvons appliquer le corollaire 3 du théorème 1. Soit (x_i) une suite de points de V obtenue ainsi.

Comme la suite (x_i) est sans point d'accumulation, le lemme 1 montre qu'il existe n fonctions analytiques dans V , $f_{m+1},\dots,f_{m+n}$ qui soient des coordonnées locales en tous les points x_i. Par conséquent, $E_{f_1 \dots f_{m+n}}$ ne contient aucun des points x_i, et l'on a : $\dim E_{f_1 \dots f_{m+n}} < \dim E_{f_1 \dots f_m}$. En recommençant (au plus $n + 1$ fois), on trouvera finalement des fonctions $f_1, \dots, f_N$ telles que $E_{f_1 \dots f_N}$ soit vide.

d. Existence d'une application injective.

L'idée est la même, mais il faut prendre quelques précautions supplémentaires. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions analytiques sur V telles que l'application $x \to (f_1(x), \dots, f_m(x))$ soit propre et de rang n en tout point. Soit δ la diagonale de $V \times V$, et soit $\mathcal{V}$ la variété $V \times V - \delta$. Dans $\mathcal{V}$, les équations $f_i(x) = f_i(y)$ définissent un sous-ensemble analytique $\mathcal{E}_{f_1 \dots f_m}$ auquel nous allons encore appliquer le corollaire 3 du théorème 1 : soit (x_i, y_i) une suite ainsi obtenue.

Dans $\mathcal{V}$, les (x_i, y_i) n'ont aucun point d'accumulation ; comme l'application $x \to (f_i(x))$ est de rang n en tout point, les (x_i, y_i) ne peuvent pas avoir, dans $V \times V$, de point d'accumulation sur δ, donc ils n'ont aucun point d'accumulation dans $V \times V$; alors, comme l'application $x \to (f_i(x))$ est propre, les x_i (et les y_i) n'ont aucun point d'accumulation dans V.

Le lemme 1 montre alors qu'il existe une fonction analytique dans V, soit f_{m+1}, telle que, pour tout i, on ait $f_{m+1}(x_i) \neq f_{m+1}(y_i)$; on aura donc $\dim \mathcal{E}_{f_1 \dots f_{m+1}} < \dim \mathcal{E}_{f_1 \dots f_m}$ d'où le résultat par récurrence.

3. Faisceaux analytiques cohérents.

Sur une variété analytique réelle, la notion de faisceau analytique cohérent se définit comme sur une variété analytique complexe. Nous allons chercher des conditions pour qu'une variété analytique réelle dénombrable à l'infini "vérifie les théorèmes A et B", ce qui, je le rappelle, signifie ceci (où $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des germes de fonctions analytiques aux différents points de V) :

(A) Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur V, et tout point $x \in V$, $H^0(V, \mathcal{F})$ engendre le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$.

(B) Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur V, et pour tout entier $p \geq 1$, on a $H^p(V, \mathcal{F}) = 0$.

Une réponse est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Pour qu'une variété analytique réelle dénombrable à l'infini vérifie les théorèmes A et B, il faut et il suffit qu'elle puisse être munie d'un ds^2 analytique (et par conséquent, d'après le théorème 2, qu'elle soit régulièrement plongeable).

Nécessité. - Supposons seulement ceci : pour tout faisceau cohérent $\mathfrak{I}$ d'idéaux du faisceau $\mathcal{R}$, on a $H^1(V, \mathfrak{I}) = 0$: on sait que V possède alors la propriété suivante :

Pour toute suite (x_i) de points de V, sans point d'accumulation, il existe une fonction analytique f dans V ayant en chacun des points x_i un développement limité d'ordre 1 donné.

En raisonnant alors comme en 2,(c) on montre qu'il existe une application analytique $(f_1, \ldots, f_N) : V \to R^N$ de rang égal à $\dim V$ en tout point de V ; et $\sum df_i^2$ est un ds^2 analytique sur V.

Suffisance. - Si V possède un ds^2 analytique, V peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace R^N ; on est alors ramené à démontrer que R^N vérifie les théorèmes A et B, ce qui se fait à partir du résultat suivant :

PROPOSITION 2. - R^N admet, dans C^N, un système fondamental de voisinages dont chacun est un domaine d'holomorphie.

DÉMONSTRATION. - $z_k = x_k + iy_k$ étant les N coordonnées complexes de C^N, et R^N étant défini par les équations $y_k = 0$, R^N admet évidemment un système fondamental de voisinages de la forme :

$$\sum y_k^2 < f(\sum x_k^2)$$

où f est une fonction de la variable $t \geqslant 0$ strictement positive, décroissante, et semi-continue inférieurement.

D'autre part, si g est une fonction de $t \geqslant 0$, strictement positive, décroissante, indéfiniment différentiable, et vérifiant partout $2tg''(t) < 1$, le théorème de Levi-Krzoska et le théorème d'Oka sur les domaines pseudoconvexes montrent que l'ouvert

$$\sum y_k^2 < g(\sum x_k^2)$$

est un domaine d'holomorphie.

Par conséquent, il suffit de démontrer ceci :

Etant donnée une fonction $f(t)$ $(t \geqslant 0)$ strictement positive, décroissante, et semi-continue inférieurement, il existe $g(t) > 0$, décroissante, indéfiniment différentiable, et vérifiant pour tout $t \geqslant 0$:

a. $g(t) \leqslant f(t)$

b. $2tg''(t) < 1$.

Soit $u = t^{-1}$, et $F(u)$ la fonction égale à 0 si $u \leqslant 0$ et à $f(t)$ si $u > 0$. Soit $\lambda(u)$ une fonction $\geqslant 0$, indéfiniment différentiable, égale à 0 en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, et vérifiant $\int \lambda(u)\, du = 1$.

Posons $H(u) = \lambda * F$; la fonction $h(t) = H(t^{-1})$ possède les propriétés voulues lorsque t est assez grand, par exemple $t > t_0$ (b. est satisfaite parce que $H(u)$ est indéfiniment différentiable pour $u = 0$: les autres propriétés sont immédiates). Il suffit alors de prendre $g(t) = h(t + t_0)$, d'où la proposition.

Les théorèmes 2 et 3 montrent en particulier ceci : tout ouvert $\subset R^n$ vérifie les "théorèmes A et B". A titre de distraction, nous allons en déduire le mirifique (?) résultat suivant :

PROPOSITION 3. - V étant une variété analytique réelle (quelconque) et $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur V, on a pour tout $p \geqslant 2$: $H^p(V, \mathfrak{F}) = 0$.

Précisons d'abord que, lorsque V n'est pas paracompacte, $H^p(V, \mathfrak{F})$ doit être entendu au sens de GROTHENDIECK (groupe de cohomologie obtenu à partir d'une résolution injective ; cf. [5]) ; pour ces groupes de cohomologie, le théorème de Leray marche, et, plus précisément, on a le résultat suivant :

V étant un espace topologique $\mathfrak{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur V, et $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} = \mathcal{O}$ un recouvrement ouvert de V par des ouverts $\mathcal{O}_i$ tels que pour toute intersection finie $\mathcal{O}_{i_1 \ldots i_k} = \mathcal{O}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{i_k}$ des $\mathcal{O}_i$, on ait (pour $m \geqslant 1$) $H^m(\mathcal{O}_{i_1 \ldots i_k}, \mathfrak{F}) = 0$, on a $H^\ell(\mathcal{O}, \mathfrak{F}) \approx h^\ell(V, \mathfrak{F})$ $(\ell \geqslant 1)$.

La proposition 3 résulte alors du lemme suivant :

LEMME 2. - V, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{F}$ possédant les propriétés précèdentes, supposons en outre qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que tout ouvert $\mathcal{U}$ contenu dans l'un des $\mathcal{O}_i$ vérifie $H^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) = 0$.

Alors, $H^{p+1}(V, \mathcal{J}) = 0$.

Soit en effet $c = \{c_{i_0 \dots i_{p+1}}\}$ un $(p+1)$-cocycle alterné de $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathcal{J}$: tout revient (théorème de Leray) à démontrer qu'il existe une p-cochaîne alternée $c' = \{c'_{i_0 \dots i_p}\}$ de $\mathcal{O}$ telle que $\delta c' = c$. On détermine les $c'_{i_0 \dots i_p}$ par récurrence (transfinie au besoin) : supposons-les déjà déterminés pour $i \in J$, $J \subset I$, et soit $a \in I$, $a \notin J$; il s'agit de déterminer les $c'_{i_0 \dots i_{p-1} a}$; pour cela, on considère $\{c'_{i_0 \dots i_{p-1} a}\}$ comme une $(p-1)$-cochaîne γ' du recouvrement $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in J}$, $\Omega_i = \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_a$ de l'ouvert $\mathcal{O}_a \cap (\bigcup_{i \in j} \mathcal{O}_i)$; en écrivant les conditions que doivent satisfaire les $c'_{i_0 \dots i_{p-1} a}$, on s'aperçoit :

a. que ces conditions signifient que γ' doit avoir pour cobord une certaine p-cochaîne γ de $\underline{\Omega}$.

b. que γ est un cocycle.

Alors, les hypothèses et le théorème de Leray (encore une fois) prouvent l'existence de $c'_{i_0 \dots i_{p-1} a}$ possèdant les propriétés voulues, d'où le lemme.

La proposition 3 (et aussi la plupart des résultats des paragraphes 2 et 3) perdraient évidemment la plus grande partie de leur intérêt, si l'on savait. démontrer le résultat suivant :

Toute variété analytique réelle dénombrable à l'infini vérifie les théorèmes A et B.

4. Contre exemples divers.

V désigne dans la suite une variété analytique réelle dénombrable à l'infini.

a. Soit E un sous-ensemble analytique de V, et $\mathcal{R}_E$ le faisceau des germes de fonctions analytiques nulles sur E. En général, $\mathcal{R}_E$ n'est pas cohérent.

EXEMPLE immédiat. – $V = R^3$, E est l'ensemble des zéros de l'équation : $x^3 = z(x^2 + y^2)$; $\mathcal{R}_E$ n'est pas cohérent à l'origine (génératrice double isolée)!

b. Dans le même ordre d'idées, voici une question plus subtile ; disons qu'un sous-ensemble analytique est "parfait" s'il possède la propriété suivante : il existe un faisceau cohérent d'idéaux $J \in \mathcal{R}$ tel que E soit l'ensemble des zéros de J.

[A noter que les ensembles parfaits ont été récemment étudiés par WHITNEY et par BRUHAT, et qu'ils possèdent, dit-on, d'excellentes propriétés sur lesquelles l'orateur s'excuse de n'avoir que fort peu de renseignements.] [11].

Si V vérifie les théorèmes A et B, les ensembles parfaits peuvent être définis par des équations globales : on voit assez facilement qu'il suffit même d'un nombre fini (qu'on peut trivialement prendre égal à un) d'équations globales ; réciproquement, un ensemble défini par une équation globale est évidemment parfait.

Ceci dit, voici un exemple de sous-ensemble analytique non parfait : soit $a(z)$ la fonction d'une variable réelle z égale à $\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$ pour $|z| < 1$, et à zéro pour $|z| \geqslant 1$; et soit E l'ensemble des zéros (dans R^3) de l'équation :

$$z(X^2 + Y^2) = X^3\, a(z)$$

E est un sous-ensemble analytique de R^3 (le vérifier pour $z = \pm 1$) ; <u>mais toute fonction analytique dans</u> R^3, <u>nulle sur</u> E, <u>est identiquement nulle</u>.

Voici en gros, la démonstration : f se prolonge en une fonction analytique complexe $\tilde{f}$ dans un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de R^3 dans C^3 ; considérons alors dans $\mathcal{O}$ privé des plans $z = \pm 1$, l'ensemble S des zéros de l'équation :

$$z(X^2 + Y^2) = X^3 \exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$$

Un raisonnement de connexion montre que f s'annule en tous les points de S assez voisins du point $(0, 0, 1)$: mais le théorème de Picard, appliqué à la fonction $\frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$ montre que, pour x_0 et y_0 fixés assez voisins de zéro, il existe une infinité de points $(x_0, y_0, z) \in S$ pour lesquels z est arbitrairement voisin de 1. Par suite, $\tilde{f}(x_0, y_0, z)$ est identiquement nulle, au voisinage de $z = 1$; et f est identiquement nulle.

c. Si E et F sont deux sous-ensembles analytiques de V, avec $F \subset E$, on note $C(F, E)$ le plus petit sous-ensemble analytique de V contenant $E - F$ (cf. théorème 1, corollaire 2).

On appelle <u>irréductible</u> un sous-ensemble analytique E (non vide) possédant la propriété suivante : si F et F' sont deux sous-ensembles analytiques avec $E \subset F \cup F'$, on a : $E \subset F$ ou $E \subset F'$.

On dit que E, irréductible, est une composante irréductible de F si l'on a $E \subset F$, $F \neq C(E, F)$.

Ceci posé, voici un exemple de sous-ensemble analytique non irréductible, et ne possédant aucune composante irréductible.

Soit S le cône (irréductible) d'équation $z(x^2 + y^2) = x^3$; D la droite $x = 0$, $y = 0$; S' l'adhérebce de $S - D$. Soit D_k une suite infinie de droites distinctes contenues dans S'. Pour toute suite finie I d'entiers ≥ 1 , définissons un déplacement T_I de R^3 , par récurrence sur le nombre $p(I)$ des termes de I : T_ϕ est l'identité ; pour $I = (J ; k)$ on choisit T_I de manière que $T_I(S')$ ne rencontre pas la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq n(I)$ (où $n(I)$ désigne la somme des termes de I), que $T_I(D) = T_J(D_k)$, et que les $S_I = T_I(S)$ soient tous distincts ; l'ensemble $E = \cup T_I(S)$ fournit l'exemple cherché.

Une construction analogue à partir de l'ensemble S défini par l'équation

$$x^2(z + 1)^2 + y^2(z - 1)^2 = (z^2 - 1)^2$$

(c'est la réunion de la droite $D : x = 0$, $z = 1$, de la droite $D' : y = 0$, $z = -1$ et du lieu des droites rencontrant D , D' et le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$) fournit un exemple d'ensemble analytique E possédant les propriétés suivantes : E est de dimension 2, est irréductible, mais contient une infinité de sous-ensembles analytiques de dimension 2 distincts de E ; et tout ensemble analytique contenant les points singuliers de E contient E ! .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT (François). - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 97-205 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[2] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 988-990.

[3] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique réel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1123-1126.

[4] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 77-99.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., Série 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[6] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 271-354 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[7] MALGRANGE (Bernard). - Plongement des variétés analytiques-réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 101-112.

[8] MALGRANGE (Benard). - Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 231-237.

[9] Séminaire Henri Cartan, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes.

ADDITIF

Depuis cet exposé, H. GRAUERT a démontré le théorème 2 sans l'hypothèse " V possède un ds^2 analytique". Voir :

[10] NORGUET (François). - Problème de Lévi et plongement des variétés analytiques réelles, Séminaire Bourbaki, t. 11, exposé n° 173.

[11] WHITNEY (H.) et BRUHAT (F.). - Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels, Comment. Math. Helvet., t. 33, 1959, p. 132-160.

[Avril 1959]