JACQUES DENY

# Les deux aspects de la théorie du potentiel

*Séminaire N. Bourbaki*, 1958, exp. nº 148, p. 151-168
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__151_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

# LES DEUX ASPECTS DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Jacques DENY

## 1. Introduction.

On peut définir la théorie générale du potentiel comme la recherche des "noyaux" satisfaisant à telle ou telle propriété du noyau newtonien (aspect linéaire), ou comme la recherche des espaces fonctionnels dont la norme a des propriétés semblables à la norme classique de Dirichlet (aspect quadratique au point de vue de l'énergie).

On rappelle à titre d'exemple deux propriétés importantes des potentiels de Green

$$G\mu(x) = \int G(x , y)\, d\mu(y)$$

où $G$ est la fonction de Green d'un domaine $\Omega$ de $R^n$ ($n \geqslant 2$ ; si $n = 2$, on doit supposer que le complémentaire de $\Omega$ n'est pas polaire), et $\mu$ une mesure de Radon sur $\Omega$ (si $\mu$ est à densité continue $f$, on note $Gf$ au lieu de $G\mu$ ; si $\Omega = R^n$, $n > 2$, $G$ est le noyau newtonien $|x - y|^{2-n}$) :

Principe du balayage. - Quels que soient $\mu \geqslant 0$ de potentiel $\neq \infty$ et $\omega$ ouvert de $\Omega$, il existe $\mu' \geqslant 0$ portée par $\bar{\omega}$ (adhérence de $\omega$) telle que

$$G\mu'(x) \leq G\mu(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega \quad ,$$

$$G\mu'(x) = G\mu(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \omega$$

Parmi toutes les $\mu'$ satisfaisant à ces conditions (et il peut en exister plus d'une) il en existe une seule dont le potentiel $G\mu'$ soit minimum (mais il ne sera pas question ici d'unicité ni de théorie fine).

Principe de domination. - Pour tout couple de fonctions $f$ et $g$ continues, $\geqslant 0$, à support compact dans $\Omega$, la relation " $Gf(x) \leq Gg(x)$ pour tout $x \in S_f$ " entraîne $Gf \leq Gg$ (on note $S_f$, resp. $S_\mu$, le support de la fonction $f$, resp. de la mesure $\mu$).

Sous cette forme il s'agit d'une conséquence tout à fait banale de la notion de surharmonicité.

Parmi les autres résultats fondamentaux de la théorie newtonienne, signalons les principes de l'équilibre, du maximum et de l'enveloppe inférieure ; on n'y fera allusion qu'incidemment.

Voici deux problèmes naturels concernant les aspects linéaires de la théorie générale :

PROBLÈME A. - Trouver les relations logiques entre les principes fondamentaux (un "noyau" G, satisfaisant au principe P, satisfait-il au principe P' ?)

PROBLÈME B. - Déterminer tous les noyaux satisfaisant à tel ou tel principe.

Cela suppose bien entendu une définition précise du noyau, des potentiels et des principes fondamentaux ; un grand choix est possible.

Revenons au noyau de Green G ; il est de type positif, et l'expression

$$||G\mu||^2 = \iint G(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

est le carré d'une norme hilbertienne (la "norme-énergie") sur l'ensemble des "potentiels d'énergie finie" ; l'espace préhilbertien associé peut être complété en lui adjoignant des fonctions convenables, et l'espace complet H ainsi obtenu peut être défini directement (sans utiliser le noyau de Green), car il est engendré par les fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $\Omega$, et pour une telle fonction u on a :

$$||u||^2 = \frac{1}{(n-2)s_n} \int |\text{grad } u|^2\, dx$$

(où $s_n$ est l'aire de la sphère-unité). Cette expression du carré de la norme (norme de Dirichlet) est d'ailleurs valable pour tout élément $u \in H$, une telle fonction admettant des dérivées généralisées qui sont dans $L^2(\Omega)$.

Il est bien connu que si u est dans H, il en est de même de son module $|u|$, et on a $||(|u|)|| \leq ||u||$ ; plus généralement si T est une contraction du plan complexe (transformation diminuant les distances), on a $Tu \in H$ et $||Tu|| \leq ||u||$.

On appellera espace de Dirichlet tout espace hilbertien de fonctions à valeurs complexes, définies sur un espace localement compact X, dont la norme est diminuée par les contractions du plan complexe (en réalité on considérera seulement les contractions normales, c'est-à-dire celles qui conservent l'origine, et on ajoutera quelques axiomes très simples) ; on s'occupera du problème suivant :

PROBLÈME C. - Déterminer tous les espaces de Dirichlet.

## I. Aspects linéaires.

### 2. Un théorème de dualité.

On va résoudre un problème du type A dans un cas qui contient tous les cas classiques. On se donne une fois pour toutes un espace localement compact $X$. On note $C$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $X$, $M$ l'ensemble des mesures de Radon réelles sur $X$, $C_K$ et $M_K$ les sous-ensembles constitués par les fonctions et mesures à support compact. On met $C$ en dualité avec $M_K$, $C_K$ en dualité avec $M$.

On appellera diffusion (continue) une application linéaire croissante $G$ de $M_K$ dans $M$, continue pour les topologies faibles (dans certaines questions il pourrait être utile d'envisager plus généralement des diffusions "mesurables"). $G$ est dite strictement croissante, si $G\delta_x \neq 0$ pour tout $x$ ($\delta_x$ = masse + 1 en $x$). Le transposé de $G$ est une application linéaire croissante de $C_K$ dans $C$.

Ces notions semblent constituer un cadre naturel pour les principes du balayage et de domination :

Principe du balayage. - Un noyau diffusion $G$ satisfait au principe du balayage si, pour tout ouvert relativement compact $\omega$ et toute mesure $\mu \geq 0$ de $M_K$, il existe une mesure $\mu' \geq 0$ de $M_K$ telle que :

i. $S\mu' \subset \bar{\omega}$ ($\mu'$ est portée par l'adhérence de $\omega$)

ii. $G\mu' \leq G\mu$

iii. $G\mu' = G\mu$ dans $\omega$ (les restrictions à $\omega$ des "potentiels" $G\mu$ et $G\mu'$ sont identiques).

La mesure $\mu'$, pas nécessairement unique, est dite balayée de $\mu$ sur $\omega$.

Principe de domination. - Un noyau $G$, transposé de diffusion satisfait au principe de domination si, pour tout couple de fonctions $f$ et $g \geq 0$ de $C_K$, la relation " $Gf(x) \leq Gg(x)$ pour tout $x \in S_f$ " entraîne $Gf \leq Gg$.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un noyau diffusion strictement croissante $G$ satisfasse au principe de balayage, il faut et il suffit que son transposé $G^*$ satisfasse au principe de domination.

DÉMONSTRATION.

1° Supposons que $G$ satisfasse au principe de balayage ; soient $f$ et $g \geqslant 0$ de $C_K$, avec $G^* f(x) \leq G^* g(x)$ pour tout $x \in S_f$ ; soit $\varepsilon'_y$ une G-balayée de $\varepsilon_y$ sur l'intérieur de $S_f$ $(y \in X)$ ; on a :

$$G^* f(y) = (G^* f , \varepsilon_y) = (f , G\varepsilon_y) = (f , G\varepsilon'_y) = (G^* f , \varepsilon'_y) \leq (G^* g , \varepsilon'_y)$$
$$= (g , G\varepsilon'_y) \leq (g , G\varepsilon_y) = (G^* g , \varepsilon_y) = G^* g(y) .$$

2° Supposons que $G^*$ satisfasse au principe de domination ; soit $\omega$ un ouvert relativement compact ; il s'agit de prouver l'inclusion

$$U \subset GM^+(\bar{\omega}) + M^+(\complement\omega)$$

où $M^+(E)$ désigne le cône des mesures $\geqslant 0$ portées par l'ensemble fermé $E$, $U = GM_K^+$ le cône des potentiels de mesures $\geqslant 0$ à support compact.

Or les relations $h \in C_K$, $h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \complement\omega$ ; $G^* h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \omega$ entraînent par hypothèse $G^* h(x) \geqslant 0$ pour tout $x$ ; autrement dit, les relations :

$$(h , \mu) \geqslant 0 \qquad \text{pour toute } \mu \in M^+(\complement\omega)$$

$$(h , \nu) \geqslant 0 \qquad \text{pour toute } \nu \in GM^+(\bar{\omega})$$

entraînent :

$$(h , \lambda) \geqslant 0 \qquad \text{pour toute } \lambda \in U .$$

Comme le cône $GM^+(\bar{\omega}) + M^+(\complement\omega)$ est convexe et fermé (c'est ici qu'intervient essentiellement l'hypothèse que $G$ est strictement croissante), donc identique à l'intersection des demi-espaces fermés le contenant, il contient bien le cône $U$.

<u>Noyaux de composition sur un groupe abélien localement compact.</u> - Soient $\Gamma$ un tel groupe, $\varkappa$ une mesure $\geqslant 0$ sur $\Gamma$. On peut lui associer un noyau diffusion $G_\varkappa$, défini par $G_\varkappa \mu = \varkappa * \mu$, et un noyau transposé de diffusion $G'_\varkappa$ défini par $G'_\varkappa f = \varkappa * f$ (observer à ce propos que le transposé de $G_\varkappa$ est $G'_{\check{\varkappa}}$, où $\check{\varkappa}$ est la mesure "symétrique" de $\varkappa$ par rapport à l'origine). On dira que le noyau de composition $\varkappa$ satisfait au principe du balayage (resp. de domination) si $G_\varkappa$ (resp. $G'_\varkappa$) satisfait à ce principe.

COROLLAIRE du théorème 1. - Pour qu'un noyau de composition $\varkappa$ satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe de domination.

C'est une conséquence évidente du théorème 1 et de la remarque : si $\varkappa$ satisfait à un des principes, il en est de même de son symétrique. Observer en outre que la diffision associée est strictement croissante si $\varkappa \neq 0$ .

3. Le problème du balayage pour un noyau de composition.

Parmi les problèmes du type B , le plus intéressant est la recherche des noyaux satisfaisant au principe du balayage ; on se bornera au cas des noyaux de composition sur un groupe abélien $\Gamma$ , donné une fois pour toutes.

PROPOSITION 1. - L'ensemble des noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage est vaguement fermé.

Démonstration standard. - Le résultat serait d'ailleurs banal si on considérait seulement l'ensemble des noyaux satisfaisant au principe du balayage avec abaissement des masses (la masse totale de la mesure balayée $\mu'$ est inférieure ou égale à celle de $\mu$ ) ; observer à ce propos que le principe du balayage n'entraîne pas nécessairement ce principe d'abaissement, mais on peut montrer qu'il l'entraîne ipso facto dans le cas particulièrement important où $\varkappa$ est symétrique $(\varkappa = \tilde{\varkappa})$ .

On aura souvent intérêt à considérer des "potentiels" engendrés par des mesures $\mu$ à support non compact $(\varkappa * \mu$ , si ce produit de composition a un sens) : cela permet de définir un principe du balayage sur ouverts quelconques (pas nécessairement bornés).

Noyaux élémentaires. - On appelle ainsi toute mesure de la forme

$$\varkappa = (a(\delta - \sigma))^{-1} = \frac{1}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sigma^p$$

où a est un nombre réel $> 0$ et $\sigma$ une mesure de Radon $\geqslant 0$ telle que la série converge ($\sigma^p$ est le produit de composition de p mesuresidentiques à $\sigma$ ; on pose $\sigma^0 = \delta$) .

PROPOSITION 2. - Les noyaux élémentaires satisfont au principe du balayage sur tout ouvert.

Démonstration sommaire. - Soit $\varkappa$ un tel noyau ; on dira que la mesure $u \geqslant 0$ est surharmonique (resp. harmonique) si $u * \sigma$ a un sens et est $\leqslant u$ (resp. $= u$)

Evidemment tout potentiel de mesure $\geqslant 0$ est surharmonique, et l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de mesures surharmoniques est surharmonique. On vérifie sans peine un théorème de décomposition du type de F. Riesz : toute $u$ surharmonique est la somme d'un potentiel de mesure $\geqslant 0$ , $\varkappa * \mu$, et d'une mesure harmonique $h$ $(\mu = a(\delta - \sigma) * u$ et $h = \lim_{p \to \infty} u * \sigma^p)$ .

CONSÉQUENCE. - Toute mesure surharmonique majorée par un potentiel est un potentiel (car $u * \sigma^p$ tend alors vers $0$ pour $p \longrightarrow \infty$) et par suite l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de potentiels de mesures positives est un potentiel de mesure positive (principe de l'enveloppe inférieure).

Soit alors $\omega$ un ouvert quelconque de $\Gamma$, $\mu$ une mesure $\geqslant 0$ telle que $\varkappa * \mu$ ait un sens ; l'enveloppe inférieure des mesures surharmoniques majorant $\varkappa * \mu$ sur $\omega$ est un potentiel de mesure positive $\varkappa * \mu'$. On montre que $\mu'$ est portée par l'ouvert $\omega$ lui-même (ce qui est plus précis que le principe du balayage) : pour cela décomposer $\mu' = \mu'_1 + \mu'_2$ , où $\mu'_1$ est la restriction de $\mu'$ à $\omega$ ; on constate que $\varkappa * (\mu'_1 + \sigma * \mu'_2) = \varkappa * \mu' - \mu'_2/a$ , d'où (par définition de $\varkappa * \mu'$), $\mu'_2 = 0$ .

C. Q. F. D.

Les propositions 1 et 2 fournissent une classe très étendue de noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage (sur tout ouvert borné) l'adhérence vague de l'ensemble des noyaux élémentaires ; mais on ne sait pas si on les obtient tous par ce procédé, bien que, si $\Gamma = R^n$ , cette classe contienne tous les noyaux classiques (noyau newtonien, noyau d'ordre $\alpha$ de Riesz-Frostman, etc.). On va établir des résultats plus complets en restreignant quelque peu le champ des noyaux de composition.

## 4. Noyaux de composition symétriques sur $R^n$ , tendant vers $0$ à l'infini.

On désignera par $(K_s)$ l'ensemble de ces noyaux satisfaisant au principe du bayalage : les éléments de $(K_s)$ jouissent de propriétés remarquables ; on verra (n° 8) que leur introduction est naturelle.

Rappelons qu'une mesure $\mu \geqslant 0$ sur $R^n$ tend vers $0$ à l'infini si ses régularisées (par des fonctions continues à support compact) tendent vers $0$ à l'infini ; il revient au même de dire que la translatée $\mu * \delta_x$ converge vaguement vers $0$ lorsque $x \to \infty$ .

LEMME 1. - Si $\mu$ est une mesure $\geqslant 0$ de masse totale $> 1$ , la charge de tout voisinage de $0$ pour $\mu^p$ tend vers l'infini pour $p \to \infty$ .

Evident (utiliser par exemple Fourier).

LEMME 2. - Tout noyau de $(K_s)$ satisfait au bayalage sur tout ouvert (et pas seulement sur les ouverts bornés).

Démonstration. - On établit d'abord un "principe de positivité des masses" : soit $N \in (K_s)$, $N \neq 0$ ; si $N * \mu \leq N * \nu$ ($\mu$ et $\nu \geqslant 0$), alors $\int d\mu \leq \int d\nu$ (on peut supposer $\mu$ et $\nu$ symétriques ; si on avait $\int d\nu < 1 < \int d\mu$, on aurait $N * \nu^p \longrightarrow 0$, d'après le comportement de $N$ à l'infini, et $N * \mu^p$ ne convergerait pas, d'après le lemme 1 ; or, par hypothèse $N * \mu^p \leq N * \nu^p$, d'où contradiction).

Soit alors $N \in (K_s)$, et $\omega$ ouvert non borné, réunion d'une suite croissante d'ouverts bornés $\omega_i$ ; si $\mu_i$ est une balayée de $\mu \geqslant 0$ à support compact sur $\omega_i$, $\int d\mu_i$ est uniformément bornée, d'où existence d'une mesure limite $\mu'$, et on peut passer à la limite sur $N * \mu_i$, grâce au comportement de $N$ à l'infini.

(Extension immédiate au balayage d'une $\mu \geqslant 0$ quelconque telle que $N * \mu$ ait un sens).

REMARQUE. - Il existe des noyaux de composition symétriques (ne tendant pas vers 0 à l'infini), qui satisfont au principe du balayage sur tout ouvert borné, mais non au balayage sur tout ouvert (exemple : $\delta + 1$).

LEMME 3. - Tout noyau élémentaire symétrique est dans $(K_s)$, et est de type positif.

Un tel noyau est construit à l'aide d'une $\sigma$ symétrique, donc de masse totale $\leq 1$ (lemme 1) ; il en résulte aussitôt qu'il est de type positif. Pour montrer qu'il est dans $(K_s)$ il suffit de constater que sa régularisée par une $f \geqslant 0$ de type positif tend vers 0 à l'infini, ce qui est facile (observer par exemple que la fonction continue de type positif $S_p(x) = f * (\delta + \sigma^2 + \ldots + \sigma^{2p})$ converge uniformément dans $R^n$ tout entier lorsque $p \rightarrow \infty$).

THÉORÈME 2. - Pour qu'un noyau de composition sur $R^n$, symétrique et tendant vers 0 à l'infini, soit dans $(K_s)$, il faut et il suffit qu'il soit limite vague de noyaux élémentaires symétriques.

La condition est suffisante, d'après les propositions 1 et 2 et le lemme 2 ; montrons brièvement qu'elle est nécessaire :

Soit $N \in (K_s)$ , $N \neq 0$ , et soit $\sigma_r$ une mesure balayée de $\delta$ sur le domaine $|x| > r$ . On a $N * \sigma_r = N$ dans ce domaine, $N * \sigma_r \leq N$ partout. <u>On ne peut avoir</u> $N \equiv N * \sigma_r$ (sinon il existe un point $x \neq 0$ du support de $\sigma_r$ ; soit $\mu \neq 0$ la restriction de $\sigma_r$ à un voisinage ouvert v de x ; soit $\nu'$ une balayée de $\nu = \sigma_r - \mu$ sur un voisinage ouvert w de 0 : par hypothèse $N * \mu + N * \nu' \leq 1$ partout, $N * \mu + N * \nu' = N$ dans w , d'où, en régularisant et appliquant le principe de domination, corollaire du théorème 1 : $N \leq N * \mu + N * \nu'$ d'où égalité ; faire alors tendre w vers 0 , puis v vers x : on met en évidence un nombre $h > 0$ tel que $N = h N * \varepsilon_x$ ; ce qui contredit l'hypothèse que N tend vers 0 à l'infini).

Posons alors $\alpha_r = a_r(\delta - \sigma_r) * N$ , le nombre $a_r$ étant bien déterminé par la condition $\int d\alpha_r = 1$ , on voit facilement que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_r^p$$

converge ; posons $N_r = (a_r(\delta - \sigma_r))^{-1}$ ; on a :

$$N = \alpha_r * N_r + \mu$$

où $\mu = \lim\limits_{p \to \infty} N * \sigma_r^p$ satisfait à $\mu = \mu * \sigma_r$ ; une telle relation satisfaite par une mesure <u>bornée</u> $\mu \geq 0$ entraîne que $\mu$ admet pour période tout point du support de $\sigma_r$ (on se ramène à un problème élémentaire par régularisation) ; or $\mu$ tend vers 0 à l'infini puisqu'il en est ainsi pour N (par hypothèse) et pour le noyau élémentaire $N_r$ (lemme 3) , donc aussi pour $N * \alpha_r$ (car $\alpha_r$ est à support compact) ; on a donc $\mu = 0$ et $N = N_r * \alpha_r$ ; comme $\alpha_r$ converge vers $\delta$ pour $r \to 0$ , N est bien limite vague des noyaux élémentaires $N_r$ .

REMARQUE. - <u>Tout noyau de</u> $(K_s)$ <u>est de type positif</u> (conséquence du lemme 3 et du théorème 2).

## II. <u>Espaces de Dirichlet</u>.

### 5. <u>Définitions et propriétés générales</u>.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact X et une mesure de Radon $\xi > 0$ , <u>partout dense</u> sur X (s'il en existe). On notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes définies sur X , à support compact.

DÉFINITION 3. - On appelle espace de Dirichlet $H = H(X , \xi)$ un espace hilbertien de (classes de) fonctions à valeurs complexes, localement sommables pour $\xi$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(a) $||u|| \to 0$ entraîne que $u \to 0$ dans $L^1(K , \xi)$ pour tout compact $K$ de $X$ ;

(b) $\mathcal{C} \cap H$ est dense dans $\mathcal{C}$ et dans $H$ ;

(c) pour toute contraction normale $T$ du plan complexe et tout $u \in H$ on a

$$Tu \in H \qquad \text{et} \qquad ||Tu|| \leq ||u|| \quad .$$

DÉFINITION 4. - On dit qu'un élément $u \in D$ est un potentiel, s'il existe une mesure de Radon $\mu$ sur $X$ telle que

$$(u , f) = \int \overline{f(x)}\, d\mu(x)$$

pour toute $f \in \mathcal{C} \cap H$.

La mesure $\mu$ est dite associée à $u$ ; si elle existe, elle est unique, et on écrira $u = u_\mu$ ; si elle est $\geqslant 0$, on dira que $u$ est un potentiel pur.

LEMME 4. - Les potentiels sont denses dans $H$.

En effet, à toute fonction $f$ bornée, mesurable, à support compact, on peut associer, d'après l'axiome (a), un élément $u_f \in H$ satisfaisant à :

$$(u , u_f) = \int u\bar{\ } \, d\xi \qquad \text{pour tout } u \in H \quad ;$$

ces éléments $u_f$ sont évidemment denses dans $H$.

On peut montrer que tout potentiel pur est réel $\geqslant 0$ ; on peut, grâce aux axiomes (a), (b), (c), démontrer pour ces potentiels purs des résultats tout à fait semblables à ceux de la théorie classique (principes du balayage, de l'enveloppe inférieure, de l'équilibre, etc.) sans jamais parler du noyau sous-jacent ; par exemple, on définira canoniquement le "balayé" d'un potentiel pur $u$ sur un ouvert $\omega$ comme l'élément $u'$ de $H$ de norme minimum parmi tous ceux dont la partie réelle majore (presque partout) $u$ sur $\omega$. On vérifie que $u'$ est un potentiel pur et que tous les axiomes du balayage sont satisfaits. Dans ces questions une caractérisation des potentiels purs est très utile : ce sont les éléments $u \in H$ satisfaisant à $||u + v|| \geqslant u$ pour toute fonction $v \in H$ dont la partie réelle est $\geqslant 0$.

Le lemme suivant sera utile pour déterminer les espaces de Dirichlet dans un cas particulier important : c'est une généralisation du principe de l'équilibre :

LEMME 5. - Etant donnés deux ouverts $\omega_0$ et $\omega_1$, $\bar{\omega}_0 \cap \bar{\omega}_1 = \emptyset$, $\omega_1$ borné, il existe un potentiel réel $u$ tel que :

i. $\mu^+$ est portée par $\bar{\omega}_1$. $\mu^-$ par $\bar{\omega}_0$.

ii. $u_\mu = 0$ (presque partout) sur $\omega_0$, $u_\mu = 1$ (presque partout) sur $\omega_1$

iii. $0 \leq u \leq 1$ (presque partout)

On reconnait le principe de l'équilibre pour $\omega_0 = \emptyset$.

Principe de la démonstration. - Soit $E$ l'ensemble (fermé, convexe, non vide) constitué par les $u \in H$ dont la partie réelle est (presque partout) $\geqslant 1$ sur $\omega_1$, $\leqslant 0$ sur $\omega_0$ ; l'élément de $E$ de norme minima convient : en effet, si $T$ est la contraction normale du plan complexe qui consiste à projeter sur le segment $[0\ ,\ 1]$ de l'axe réel, on a $Tu = u$ (d'après les hypothèses) donc (ii) et (iii) sont vérifiés. On prouvera facilement (i) en observant que, pour tout $h > 0$, on a $\|u + hv\| \geqslant \|u\|$ pour toute $v \in \mathcal{C} \cap H$ réelles, nulle sur $\omega_0$, $\geqslant 0$ sur $\omega_1$ et $\|u - hw\| \geqslant \|u\|$ pour toute $w \in \mathcal{C} \cap H$, réelle, nulle sur $\omega_1$, $\geq 0$ sur $\omega_0$.

On peut démontrer en outre que $\int d\mu^- \leq \int d\mu^+$ (cela résulte d'un "principe de positivité des masses").

Pour déterminer effectivement certains espaces de Dirichlet, on aura besoin d'une classe remarquable de fonctions, dont on va énoncer les propriétés essentielles.

## 6. Fonctions du type (N).

Soit $G$ un groupe abélien localement compact.

DÉFINITION 5. - Une fonction $\lambda$ continue sur $G$, à valeurs complexes, est dite du type (N) si, pour tout système de $n$ points $x_i \in G$, la forme hermitienne :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\lambda(x_i) + \overline{\lambda(x_j)} - \lambda(x_i - x_j)] \rho_i \bar{\rho}_j$$

est positive $(n = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots)$

La plupart des propriétés des fonctions du type (N) se déduisent du lemme suivant, de démonstration facile : pour qu'une fonction $\lambda$ continue sur $G$ soit du type (N), il faut et il suffit que $\lambda(0)$ soit réel $\geqslant 0$ et que

$\exp(-\alpha\lambda(x))$ soit de type positif pour tout $\alpha$ réel $\geqslant 0$.

Un autre énoncé du lemme précédent est : pour que la fonction $\varphi(\alpha, x)$, continue sur $R^+ \times G$, soit la fonction caractéristique d'une loi de probabilité indéfiniment divisible, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\lambda$ du type (N) nulle à l'origine telle que $\varphi(\alpha, x) = \exp(-\alpha\lambda(x))$.

LEMME 6. - Pour que $\lambda$ continue sur $G$ soit de type (N), il faut et il suffit qu'il existe un nombre $C \geqslant 0$ et une suite de fonctions $\varphi_n$ continues de type positif, tels que :

$$\lambda(x) = C + \lim_{n\to\infty} (\varphi_n(0) - \varphi_n(x))$$

la limite étant uniforme sur tout compact de $G$.

C'est évidemment suffisant, et c'est nécessaire d'après le lemme précédent, il suffit de prendre $C = \lambda(0)$ et $\varphi_n(x) = n \exp \dfrac{\lambda(0) - \lambda(x)}{n}$.

Voici deux corollaires faciles du lemme 6.

COROLLAIRE 1. - Si $\lambda$ est du type (N) et réelle, il en est de même de $\lambda^\alpha$, quel que soit $\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

COROLLAIRE 2. - Si $\lambda$ est du type (N) et si $1/\lambda$ est sommable sur tout compact, cette dernière fonction de type positif.

Cas du groupe $R^n$. - Toute fonction $\lambda$ du type (N) sur $R^n$ est à croissance lente à l'infini ; d'une manière plus précise : $\lambda(x) = O(|x|^2)$, conséquence facile de la relation $|\lambda(2x)| \leqslant 4|\lambda(x)|$, qui résulte immédiatement de la définition 5.

EXEMPLE de telles fonctions. - $|x|^2$ (évident), et par suite (corollaire 1 du lemme 6) : $|x|^\alpha$ pour tout $\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$.

Du lemme 6 et du théorème de Bochner, on peut déduire un théorème de représentation des fonctions du type (N) sur $R^n$ ; on l'énoncera dans le cas d'une fonction du type (N) réelle (seul cas qui sera utilisé ; dans le cas général, la formule est un peu plus compliquée), une telle fonction $\lambda$ admet une représentation et une seule de la forme :

$$\lambda(x) = C + Q(x) + \int (1 - \cos 2\pi xy)\, d\sigma(y) \tag{1}$$

où $C$ est une constante $\geqslant 0$, $Q$ une forme quadratique positive des coordonnées de $x$, et $\sigma$ une mesure $\geq 0$ dans $R^n - \{0\}$, symétrique par rapport à l'origine, telle que

$$\int \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\, d\sigma(y) < \infty$$

Inversement toute fonction définie par une relation telle que (1) est du type (N) et réelle (et par suite symétrique).

7. Espaces de Dirichlet spéciaux.

On se donne un groupe abélien $G$ localement compact ; on note $dx$ la mesure de Haar.

DÉFINITION 6. - Un espace de Dirichlet spécial sur $G$ est un espace hilbertien complet de fonction définies sur $G$, satisfaisant aux axiomes (a), (b), (c) de la définition 3 (avec $\xi = dx$) et en outre à :

(d) Si $u$ est un élément de $H$ et $x \in G$, la translatée de $u$ par $x$ est un élément $U_x u$ de $H$, et l'application $x \rightarrow U_x$ est une représentation unitaire de $G$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Autrement dit, $||U_x u|| = ||u||$, $U_{x-y} = U_x U_y^*$ et l'application $x \rightarrow U_x$ est fortement continue.

A toute mesure de Radon $\mu$ sur $G$, de variation totale finie, correspond évidemment un opérateur linéaire borné $U_\mu$ sur $H$, défini par

$$(U_\mu u, v) = \int (U_x u, v)\, d\mu(x) \qquad (u, v \in H)$$

satisfaisant à $||U_\mu|| \leq \int d|\mu|$, $U_{\mu * \check{\nu}} = U_\mu * U_\nu^*$, etc. L'élément $U_\mu u \in H$ est représenté par le produit de composition ordinaire $u * \mu$ (évident, au moins si $\mu$ est à support compact).

Voici une expression remarquable de la norme dans $H$ :

PROPOSITION 3. - Si $H$ est un espace de Dirichlet spécial sur $G$, il existe une fonction $\lambda$ réelle du type (N) définie sur le groupe dual $\hat{G}$, dont l'inverse $1/\lambda$ est sommable sur tout compact de $\hat{G}$, telle que, pour tout $u \in \mathcal{C} \cap H$, on ait :

$$||u||^2 = \int |\hat{u}(\hat{x})|^2 \lambda(\hat{x})\, d\hat{x} \tag{2}$$

Démonstration sommaire. – Soit $\alpha$ un voisinage ouvert borné de $0$ dans $G$ ; posons $\omega_1 = \alpha$, $\omega_0 = \complement(\overline{2\alpha})$ ; soit $u_\alpha$ le potentiel réel associé à $\omega_0$ et $\omega_1$ par le lemme 5 ; soit $\mu_\alpha = \sigma_\alpha - \tau_\alpha$ sa mesure associée ($\sigma_\alpha \geq 0$ portée par $\alpha$, $\tau_\alpha \geq 0$ portée par $\complement(\overline{2\alpha})$). Soit $f \in C$ ; on a, $\beta$ étant un second voisinage ouvert borné de $0$,

$$(u_\alpha * f, u_\beta) = (u_\alpha, u_\beta * \tilde{f})$$

d'où ($u_\alpha * f$ étant dans $C$) :

$$\int (u_\alpha * f)\, d\mu_\beta = \int (u_\beta * \check{f})\, d\mu_\alpha$$

$$u_\alpha * \tilde{\mu}_\beta = \tilde{u}_\beta * \mu_\alpha$$

En prenant $\beta$ assez "grand", on retrouve le fait déjà signalé que $\int d\mu_\alpha \geq 0$ (cas particulier du principe de positivité des masses).

On peut transformer par Fourier ($u_\alpha$ étant à support compact et $\mu_\alpha$ de variation totale finie) ; posons

$$\frac{\hat{\mu}_\alpha(\hat{x})}{\hat{u}_\alpha(\hat{x})} = \frac{\overline{\hat{\mu}_\beta(x)}}{\overline{\hat{u}_\beta(\hat{x})}} = \lambda(\hat{x})$$

$\lambda(\hat{x})$ est défini pour tout $\hat{x}$ car, pour $\alpha \to 0$, $\hat{u}_\alpha / \hat{u}_\alpha(0)$ tend vers 1 uniformément sur tout compact de $\hat{G}$. En faisant $\alpha = \beta$ on voit que $\lambda$ est réelle.

En outre on a, uniformément sur tout compact :

$$\lambda(x) = \lim \frac{\hat{\sigma}_\alpha(0) - \hat{\tau}_\alpha(\hat{x})}{\hat{u}_\alpha(0)}$$

et comme $\hat{\tau}_\alpha$ est de type positif et $\hat{\tau}_\alpha(0) \leq \hat{\sigma}_\alpha(0)$. $\lambda$ est bien une fonction réelle du type (N) (lemme 6).

Normalisons $u_\alpha$ en posant $v_\alpha = u_\alpha / \int u_\alpha\, dx$ ; soit $\nu_\alpha = \mu_\alpha / \int u_\alpha\, dx$ la mesure associée ; si $u \in C \cap H$ on a :

$$\|u * v_\alpha\|^2 = (u * v_\alpha, u * v_\alpha) = (v_\alpha * u * \tilde{u}, v_\alpha) = \int v_\alpha * u * \tilde{u}\, d\nu_\alpha$$

$$= \int \hat{v}_\alpha\, |\hat{u}|^2\, \hat{\nu}_\alpha\, d\hat{x} = \int |\hat{u}|^2\, |\hat{v}_\alpha|^2\, \lambda\, d\hat{x}$$

mais comme $|\hat{v}_\alpha| \leq 1$ tend uniformément vers 1 sur tout compact pour $\alpha \to 0$, on peut passer à la limite, et on obtient (2).

Il resterait à démontrer que $1/\lambda$ est sommable sur tout compact de $G$, ce qui se déduirait immédiatement de la formule

$$\|u_f\|^2 = \int \frac{|\hat{f}(\hat{x})|^2}{\lambda(\hat{x})} \, d\hat{x} \; ,$$

valable pour toute $f$ mesurable bornée à support compact (voir la démonstration du lemme 4 pour la définition de $u_f$). On ne donnera pas le détail de la démonstration de cette formule.

On va étudier la réciproque de la proposition 3 ; on se bornera au cas du groupe $R^n$, les démonstrations étant alors plus simples.

8. Espaces de Dirichlet spéciaux sur $R^n$.

THÉORÈME 3. - Tout espace de Dirichlet spécial sur $R^n$ est constitué par les transformées de Fourier des fonctions de carré sommable par rapport à une fonction $\lambda$ réelle du type (N) ; cette fonction $\lambda$ peut être choisie arbitrairement pourvu que $1/\lambda$ soit sommable sur tout compact.

On a déjà vu qu'à tout espace de Dirichlet $H$, on peut associer une $\lambda$ réelle du type (N), telle que (2) soit vérifiée pour toute $u \in C \cap H$ (proposition 3) il faudrait encore montrer que toute $u \in H$ est tempérée et satisfait à (2) ; cela résulte de ce que, $C \cap H$ étant dense dans $H$, on peut identifier $H$ à l'espace $H_\lambda$ qu'on va construire.

Soit maintenant $\lambda$ réelle du type (N), avec $1/\lambda$ sommable sur tout compact ; les fonctions $\hat{u} \in L^2(\lambda)$ sont tempérées, car

$$\left| \int \frac{|\hat{u}(\hat{x})|}{(1+|x|^2)^p} \, d\hat{x} \right|^2 \leq \int |\hat{u}|^2 \lambda \, d\hat{x} \int \frac{d\hat{x}}{\lambda(1+|x|^2)^{2p}}$$

et comme $1/\lambda$ est $\geq 0$ et de type positif (corollaire 2 du lemme 6) donc tempérée, il existe $p > 0$ tel que le second membre soit $< \infty$.

On notera $H_\lambda$ l'espace hilbertien constitué par les distributions $u$ dont les transformées de Fourier sont dans $L^2(\lambda)$ (on verra que ce sont des fonctions) ; l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini est contenu dans $H_\lambda$, car $\lambda(\hat{x}) = O(|\hat{x}|^2)$ pour $\hat{x} \to \infty$ ; on voit facilement que l'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact est dense dans $H_\lambda$.

On achèvera grâce au lemme suivant : si $u \in \mathcal{D}$ et si $T$ est une contraction normale du plan complexe, on a $Tu \in H$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$.

En effet, posons $\lambda_k(\hat{x}) = \lambda(0) + k(1 - \exp(((\lambda(0) - \lambda(\hat{x}))/k))$ : on vérifie aisément la formule :

$$\int |\hat{u}(\hat{x})|^2 \lambda_k(\hat{x})\, d\hat{x} = C \int |u(x)|^2\, dx + \frac{1}{2} \iint |u(x+y) - u(x)|^2\, d\sigma_k(y)\, dx\,,$$

où $C = \lambda_k(0) = \lambda(0)$ et $\sigma_k \geq 0$ (de masse totale finie) sont la constante et la mesure associées par la représentation (1) à la fonction $\lambda_k$ qui est du type (N) et bornée (il s'agit là d'un cas très élémentaire, valable pour tout groupe abélien) ; d'où immédiatement, en posant $v = Tu$ :

$$\int |\hat{v}|^2\, \lambda_k\, d\hat{x} \leq \int |\hat{u}|^2\, \lambda_k\, d\hat{x}\,,$$

d'où le résultat, car $\lambda_k$ converge vers $\lambda$ en croissant.

On en déduit que les éléments $u \in H_\lambda$ sont des fonctions, et qu'on a, pour tout compact $K$ de $R^n$, $\|u\|_{L^1(K)} \leq A(K)\, \|u\|$ ; à cet effet, il suffit de prouver qu'on a une telle relation pour les $u \in \mathcal{D}$ ; or on a pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, en posant $v = |u|$ (contraction de $u$) :

$$\left|\int |u|\, \bar{\varphi}\, dx\right|^2 = \left|\int \hat{v}\, \bar{\hat{\varphi}}\, d\hat{x}\right|^2 \leq \int |\hat{v}|^2\, \lambda\, d\hat{x} \int \frac{|\hat{\varphi}|^2}{\lambda}\, d\hat{x} \leq \|u\|^2 \int \frac{|\hat{\varphi}|^2}{\lambda}\, d\hat{x}$$

d'où le résultat (choisir $\varphi \geq 0$ sur $R^n$, $\varphi \geq 1$ sur $K$).

On vient de voir que l'espace $H_\lambda$ satisfait à l'axiome (a) ; (b) est vérifié, puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $H_\lambda$ ; on a montré (c) dans le cas où $u$ est dans $\mathcal{D}$, et on obtient le cas général en observant que si $u \in \mathcal{D}$ converge fortement dans $H_\lambda$, $Tu$ converge faiblement dans $H_\lambda$ ; enfin (d) est immédiat ; le théorème 3 est donc établi.

Autre expression de la norme. – En utilisant la représentation (1) de $\lambda$, on montre facilement que, pour toute $u \in \mathcal{D}$, on a :

$$\|u\|^2 = C \int |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}\, dx + \frac{1}{2} \iint |u(x+y) - u(x)|^2\, d\sigma(y)\, dx$$

les $a_{ij}$ étant égaux (au facteur $4\pi^2$ près) aux coefficients de la forme quadratique $Q$, et les $x_j$ étant les coordonnées de $x$.

Pour $\lambda = |\hat{x}|^2$, $(n \geq 3)$, on retrouve la norme classique de Dirichlet.

Noyau associé à un espace de Dirichlet spécial. - On appellera noyau associé à l'espace de Dirichlet $H_\lambda$ la mesure $N \geqslant 0$, transformée de Fourier de la fonction de type positif $1/\lambda$. On vérifie que pour toute fonction $f$ bornée à support compact, le "potentiel" $u_f$ (considéré au lemme 4) est égal au produit de composition $N * f$.

PROPOSITION 4. - Les noyaux associés aux espaces de Dirichlet spéciaux sur $R^n$ sont les éléments de $(K_s)$ (voir n° 4).

En effet un tel noyau $N$ est dans $(K_s)$ car il est symétrique (puisque réel et de type positif), il tend vers 0 à l'infini (car, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, $K * \varphi$ a pour transformée de Fourier la fonction sommable $\hat{\varphi}/\lambda$ ; donc il tend vers 0 à l'infini), enfin c'est une limite de noyaux élémentaires, à savoir les transformées de Fourier des fonctions $1/\lambda_k$ considérées dans la démonstration du théorème 3. Inversement tout noyau élémentaire est associé à l'espace de Dirichlet $H_\lambda$, avec $\lambda = a(1 - \hat{\sigma})$ ; tout noyau de $(K_s)$ est donc associé à un espace de Dirichlet car on a $N = N_r * \alpha_r$ (avec les notations de la démonstration du théorème 2) d'où par Fourier $\hat{N} = \hat{\alpha}_r/\lambda_r$, où $\lambda_r$ est la fonction du type (N) associée au noyau élémentaire $N_r$, d'où le résultat en faisant $r \to 0$,

REMARQUE. - A tout noyau $N \in (K_s)$ on peut associer une famille de noyaux $N_\alpha \in (K_s)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ satisfaisant à $N_1 = N$, $N_0 = \delta$, $N_\alpha * N_\beta = N_{\alpha+\beta}$ pour $\alpha + \beta \leqslant 1$.

Cette généralisation de la formule de composition de M. Riesz (cas des noyaux d'ordre $\alpha$) s'obtient immédiatement (proposition 4 et corollaire 1 du lemme 6).

EXEMPLES. - $\lambda = |x|^\alpha$ est du type (N) pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ ; mais $1/\lambda$ n'est pas sommable sur tout compact si $\alpha = 2$, $n = 2$, ou si $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $n = 1$ ; ces cas mis à part, $1/\lambda$ est le transformé de Fourier d'un noyau de $(K_s)$, à savoir (à un facteur près) $|x|^{\alpha-n}$ (noyau d'ordre $\alpha$ de Riesz-Frostman, noyau newtonien si $\alpha = 2$). Pour que le noyau $N$ soit continu, il faut et il suffit que $1/\lambda$ soit sommable; ceci ne peut se produire que si $n = 1$ (d'après $\lambda(\mathfrak{x}) = O(|\mathfrak{x}|^2)$ ; exemple de tel noyau : $\exp(- a|x|)$.

## BIBLIOGRAPHIE

Pour la théorie newtonnienne, voir les articles de H. CARTAN, notamment :

CARTAN (H.). - Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, N. S., t. 22, 1946, p. 221-280 ;

le résultat appelé ici principe de domination est utilisé par CARTAN sous le nom de principe du maximum ; on n'a pas cru devoir conserver cette terminologie.

Pour le théorème de dualité et applications, voir :

CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 764-767.

les noyaux élémentaires ont été considérés par DENY :

DENY (Jacques). - Familles fondamentales, Noyaux associés, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 73-101 ;

le théorème 2 et diverses généralisations feront l'objet d'un travail CHOQUET-DENY en préparation ; le fait que tout noyau de $(K_s)$ est de type positif a été montré par NINOMIYA :

NINOMIYA (Nobuyuki). - Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel, J. Inst. of Polyt. Osaka, Series A, t. 5, 1954, p. 97-100.

moyennant quelques hypothèses de régularité.

Les "fonctions du type (N) " se rencontrent un peu partout dans la littérature, sous forme plus ou moins explicite (pour les lois de probabilité indéfiniment divisibles, voir KOLMOGOROV et surtout LEVY ; références dans le livre récent de BOCHNER

BOCHNER (Salomon). - Harmonic analysis and the theory of probability. - Berkeley, University of California Press, 1955 (Calif. Monogr. math. Sc.) ;

voir aussi les travaux de SCHOENBERG et von NEUMANN pour les relations avec la théorie des espaces métriques). BEURLING, qui les appelle "definite negative functions" en a dégagé systématiquement les propriétés (il y fait allusion dans certains de ses travaux sur l'analyse harmonique).

La définition et les propriétés principales des espaces de Dirichlet sont dues à BEURLING ; aucune publication n'existe sur ce sujet ; un travail BEURLING-DENY est en préparation.

## ADDITIF

A l'époque où cet exposé a été fait, commençait à paraître l'important travail de G. HUNT :

HUNT (G. A.). - Markov processes and potentials, I, II, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et 316-369 ; III, t. 2, 1958, p. 151-213.

HUNT introduit des points de vue très originaux dans l'étude des aspects linéaires de la théorie du potentiel, et donne des interprétations probabilistes simples des principes fondamentaux.

La première partie du travail BEURLING-DENY est parue :

BEURLING (A.) et DENY (J.). - Espaces de Dirichlet, I : le cas élémentaire, Act. Math., t. 99, 1958, p. 203-224.

Un résumé de la théorie générale vient de paraître :

BEURLING (A.) and DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. nat. Acad. of Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 208-215.

[Avril 1959]