PIERRE SAMUEL

Travaux de Rosenlicht sur les groupes algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 145, p. 111-123

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__111_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1957)

TRAVAUX DE ROSENLICHT SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

par Pierre SAMUEL

Les résultats les plus frappants du mémoire de ROSENLICHT sont les suivants :

(A) Soit G un groupe algébrique. Il existe un sous-groupe connexe invariant D de G tel que G/D soit un groupe algébrique linéaire et que le noyau de tout homomorphisme de G dans un groupe algébrique linéaire contienne D ("Existence d'un plus grand quotient linéaire").

(B) Soit G un groupe algébrique connexe. Il existe un plus grand sous-groupe linéaire invariant L de G, et G/L est alors une variété abélienne.

Le résultat (B) est le plus profond des deux : il est dû à CHEVALLEY. BARSOTTI et ROSENLICHT l'ont redémontré indépendamment l'un de l'autre.

Les mémoires de Rosenlicht et Barsotti ont une intersection assez importante ; BARSOTTI va plus loin que ROSENLICHT en ce qui concerne les systèmes de facteurs et les phénomènes particuliers à la caractéristique p. Par contre, ROSENLICHT donne des théorèmes de structure plus détaillés, une utile construction de représentations linéaires de groupes algébriques, et, dans la première partie du mémoire, de nombreux résultats fort utiles sur le maniement des groupes algébriques, de leurs quotients et des variétés où ils opèrent.

1. Résultats préliminaires sur les groupes algébriques et les variétés où ils opèrent

Un groupe algébrique G est un "ensemble algébrique" (c'est-à-dire une réunion finie de variétés irréductibles, abstraites ou non) muni d'une structure de groupe (au sens de l'algèbre élémentaire) telle que l'application $(g , g') \rightarrow gg'^{-1}$ de $G \times G$ dans G soit une application rationnelle partout régulière. On dit qu'un corps k est un corps de définition du groupe G si c'est un corps de définition de chacune des composantes de G et du graphe de l'application $(g , g') \rightarrow gg'^{-1}$. Les composantes de G sont alors disjointes : la composante G_0 de l'élément neutre e est un sous-groupe invariant de G. L'élément neutre e est rationnel sur k ; les applications $(g , g') \rightarrow gg'$ et $g \rightarrow g^{-1}$ sont définies sur k et partout régulières ; toutes les composantes de G sont birégulièrement équivalentes. Pour les groupes algébriques les mots "irréductible" et "connexe" (au sens de la topologie de Zariski) sont synonymes.

Etant donnés un groupe algébrique G et une variété V, on dit que G <u>opère sur</u> V (ou que V est un pré-espace de transformation pour G) s'il existe une application rationnelle $(g, v) \to g(v)$ de $G \times V$ dans V telle que, si k est un corps de définition pour tout ce qui précède, et g, g', v des points génériques indépendants sur k, on ait $g(g'(v)) = gg'(v)$, et $k(g, v) = k(g, g(v))$ (cette dernière condition peut s'énoncer en disant que $v \to g(v)$ est "génériquement surjective"). On dit que G opère régulièrement sur V (ou que V est un espace de transformation pour G) s'il existe une application rationnelle $(g, v) \to g(v)$ partout régulière de $G \times V$ dans V telle que $g(g'(v)) = gg'(v)$ (partout) et que $e(v) = v$; l'existence d'inverses montre aussitôt que l'on a $k(g, v) = k(g, g(v))$ pour tous $g \in G$ et $v \in V$; donc G opère sur V. WEIL a démontré la réciproque suivante dans le cas où G est connexe, et ROSENLICHT l'a généralisée au cas non connexe.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> G <u>opère sur</u> V, <u>et si</u> k <u>est un corps de définition pour</u> G, V <u>et</u> $G \times V \to V$, <u>il existe une variété</u> V' <u>birationnellement équivalente à</u> V <u>sur</u> k <u>telle que l'application</u> $G \times V' \to V'$ <u>déduite de</u> $G \times V \to V$ <u>soit partout régulière</u>. <u>Ainsi</u> G <u>opère régulièrement sur</u> V'.

La méthode de WEIL consiste à fabriquer des ouverts de V sur lesquels G opère régulièrement, à les recoller, et à redescendre au corps de base k.

Etant donné un groupe algébrique G opérant sur V, tout élément $g \in G$ définit un K-automorphisme s_g du corps absolu $K(V)$ (K : domaine universel) des fonctions rationnelles sur V au moyen de la formule $(s_g f)(v) = f(g^{-1} v)$ ($f \in K(V)$, $v \in V$), et $g \to s_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des K-automorphismes de $K(V)$. Les fonctions invariantes par tous les s_g forment un sous-corps de $K(V)$; on montre que ce sous-corps est engendré par des fonctions invariantes définies sur k, k désignant un corps de définition de G, V et $G \times V \to V$; le corps des fonctions invariantes est donc de la forme $k(W)$ où W est une variété définie sur k. On voit facilement que $K(V)$ (resp. $k(V)$) est séparable sur $K(W)$ (resp. $k(W)$).

L'inclusion $k(W) \subset k(V)$ définit alors une application rationnelle, séparable, et génériquement surjective o de V dans W ; pour que deux points génériques v, v' de V soient tels que $o(v) = o(v')$, il faut et il suffit qu'ils soient dans la même "orbite" de G sur V. Bien qu'il puisse y avoir des canulars de biunivocité pour les orbites non génériques (même si on arrange V par le théorème 1), on appelle W la <u>variété des</u> G-<u>orbites de</u> V.

En particulier, soient G un groupe algébrique, et H un sous-groupe algébrique (c'est-à-dire fermé) de G ; comme H opère à droite sur G, on peut considérer la variété W des H-orbites de G, variété qui est en correspondance presque biunivoque avec l'espace homogène G/H des classes à gauche gH. Or G opère à gauche sur W (au moyen de $g'(gH) = g'gH$, g et g' étant génériques) ; en remplaçant W par une variété birationnellement équivalente, on peut supposer que G opère régulièrement sur W (théorème 1), ce qui fait de G/H un espace homogène algébrique (en un sens facile à préciser). L'application canonique $G \to G/H$ est, en particulier, partout régulière ; nous avons vu qu'elle est séparable. Si k est un corps de définition de G sur lequel le cycle H (somme des composantes avec coefficient 1) est rationnel, tout ce qu'on vient de construire est défini sur k.

N.B. – La construction qui vient d'être esquissée demande que G soit connexe. Si G n'est pas connexe, on rajoute un petit complément de démonstration, qui ne présente pas de difficulté. Pour simplifier nous omettrons désormais souvent de mentionner les compléments analogues.

Supposons de plus que H soit un sous-groupe invariant de G. Si g, g' sont deux points génériques indépendants de G sur k, et si l'on désigne par u l'application $G \to G/H$, on a $k(u(gg'^{-1})) \subset k(u(g), u(g'))$; en effet, le point $u(gg'^{-1})$ est, pour g' fixe, invariant par tout automorphisme $g \to gh$ $(h \in H)$, d'où, d'après la définition du corps des fonctions sur G/H, $k(u(gg'^{-1})) \subset k(u(g), g')$; de même $k(u(gg'^{-1})) \subset k(g, u(g'))$; enfin,

$$k(g, u(g')) \cap k(u(g), g') = k(u(g), u(g'))$$

par disjonction linéaire. On a donc défini une application rationnelle F de $(G/H) \times (G/H)$ dans G/H qui coïncide avec la "division" pour les points génériques. En se servant du fait que $G \times (G/H) \to G/H$ est partout régulière, et de la formule $u(g_1 g/g'^{-1}) = g_1 . u(gg'^{-1})$, on voit que F est régulière toutes les fois que son second argument est générique ; comme $F(a, b) = F(F(a, c), F(b, c))$ avec c générique sur $k(a, b)$, on en conclut que F est partout régulière. D'où

THÉORÈME 2. – Etant donnés un groupe algébrique G défini sur k et un sous-groupe invariant fermé H de G tel que le cycle H soit rationnel sur k, il existe un groupe algébrique G/H défini sur k et un homomorphisme rationnel séparable u défini sur k de G sur G/H admettant H pour noyau.

On a ainsi obtenu une construction algébrique des groupes quotients ; la première construction publiée est due à NAKANO, mais celui-ci devait agrandir k ; c'est

WEIL qui est parvenu à redescendre à k . Le fait que les fonctions rationnelles sur G/H ne sont autres que les fonctions rationnelles sur V qui sont invariantes par H montre qu'on a la *propriété universelle* suivante : Pour tout homomorphisme rationnel v de G dans un groupe algébrique G' dont le noyau contient H , il existe un homomorphisme rationnel $v' : G/H \to G'$ tel que $v = v' \circ u$.

REMARQUE. – Un homomorphisme rationnel d'un groupe algébrique G dans un autre G' est partout régulier ; ROSENLICHT a même montré qu'une application rationnelle v de G dans G' , telle que $v(xy) = v(x)\, v(y)$ pour deux points génériques indépendants x , y de G , est partout régulière et est un homomorphisme. Donc la propriété universelle caractérise G/H à un isomorphisme birégulier près.

La propriété universelle de G/H montre facilement que, si H et N sont des sous-groupes invariants fermés du groupe algébrique G tels que $N \subset H$, alors l'application canonique de G/H sur $(G/N)/(H/N)$ est un isomorphisme birégulier (diagramme
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & G/N \arrow[r] & (G/N)/(H/N) \arrow[dl, shift left] \\ & G/H \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd}$$
) . Le "second théorème d'isomorphismes" ne marche pas tout à fait aussi bien : si H et N sont des sous-groupes fermés de G et si N est invariant dans G , alors HN est un sous-groupe fermé ; comme $H \to HN \to HN/N$ est rationnel et que son noyau est $H \cap N$, la bijection canonique de $H/(H \cap N)$ sur HN/N est une application rationnelle, mais elle n'est en général pas birationnelle.

Comme cette application est biunivoque, $k(H/(H \cap N))$ est une extension p-radicielle de $k(HN/N)$. On montre que son degré q est égal à l'ordre d'inséparabilité $[k(H \times N) : k(HN)]_i$, et aussi que l'on a $H.N = q(H \cap N)$ (où $H.N$ désigne le produit d'intersection des cycles H et N , et où, comme ci-dessus, on identifie tout sous-groupe fermé de G au cycle de ses composantes. *Exemple* : $G = K^2$ (plan additif), N est l'axe $OX(Y = 0)$ et H est $(Y = X^p)$; ici $H/(H \cap N) = H$ et l'application rationnelle $H/(H \cap N) \to HN/N$ est $(x , x^p) \to x^p$.

Comme le second théorème d'isomorphismes s'emploie souvent dans les deux sens (par exemple dans le lemme de Zassenhaus ci-dessous), on est amené à introduire la notion *d'isogénie* p-*radicielle*. Plus généralement on dit que deux groupes algébriques (connexes pour simplifier) G_1 et G_2 sont *isogènes* (resp. *séparablement isogènes*, p-*radiciellement isogènes*) s'il existe un groupe algébrique G et des homomorphismes rationnels surjectifs $G \to G_1$, $G \to G_2$ tels que $K(G)$ soit de degré fini (resp. séparable et de degré fini resp. p-radiciel et de degré fini) sur $K(G_1)$ et $K(G_2)$.

Si G_1 et G_2 sont des variétés abéliennes isogènes (au sens de cet exposé) il existe, d'après le théorème de complète réductibilité, un homomorphisme rationnel de G_1 sur G, donc, en composant, de G_1 sur G_2. La notion d'isogènie définie ici coïncide donc, dans le cas des variétés abéliennes, avec celle définie dans le livre de WEIL.

La relation d'isogènie (resp. d'isogènie séparable, d'isogènie p-radicielle) est une <u>relation d'équivalence</u> ; il suffit en effet, d'en démontrer la transitivité si on a des homomorphismes rationnels surjectifs $G \to G_1$, $u : G \to G_2$, $v : G' \to G_2$ et $G' \to G_3$, on considère le sous-groupe G'' de $G \times G'$ formé des (x, y) tels que $u(x) = v(y)$: on a alors des homomorphismes rationnels surjectifs de G'' sur G_1, G_2 et G_3. Si deux groupes G_1 et G_2 sont isogènes (resp. ...), il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-groupes fermés connexes de G_1 et celui de G_2 telle que deux sous-groupes correspondants H_1 et H_2 soient isogènes (resp. ...) : si $u : G \to G_1$ et $v : G \to G_2$ sont les homomorphismes surjectifs définissant l'isogènie, on dira que H_1 et H_2 se correspondent s'ils sont les images par u et v d'un même sous-groupe fermé connexe de G ; cette correspondance est biunivoque et surjective puisque tout sous-groupe fermé connexe H_1 de G_1 est l'image par u d'un et d'un seul sous-groupe fermé connexe de G, à savoir la composante connexe de $u^{-1}(H_1)$. Si H_1 est invariant dans G_1, on voit aisément que le sous-groupe correspondant H_2 de G_2 est invariant, et que G_1/H_L et G_2/H_2 sont isogènes (resp. ...), l'isogènie passe aussi aux produits.

L'analogue algébrique du théorème de Jordan-Hölder-Schreider est alors le suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> G <u>est un groupe algébrique, deux suites de composition de</u> G <u>formées de sous-groupes fermés admettent des raffinements dont les quotients successifs sont deux à deux</u> p-<u>radiciellement isogènes</u>.

En effet, si (G_i) et (H_j) sont les suites données, on intercale les sous-groupes $G_i(G_{i-1} \cap H_j)$ entre G_i et G_{i-1}, et, comme dans la démonstration classique, on est ramené à la démonstration du lemme de Zassenhaus. Soient $H_1 \supset N_1$, $H_2 \supset N_2$ des sous-groupes fermés de G, avec N_i invariant dans H_i $(i = 1, 2)$; il suffit de montrer que $N_1(H_1 \cap H_2)/N_1(H_1 \cap N_2)$ et $N_2(H_2 \cap H_1)/N_2(H_2 \cap N_1)$ (qui sont isomorphes en tant que groupes) sont p-radiciellement isogènes ; or $H_1 \cap H_2 \to N_1(H_1 \cap H_2) \to N_1(H_1 \cap H_2)/N_1(H_1 \cap N_2)$ est un homomorphisme rationnel dont le noyau est

$$(H_1 \cap H_2) \cap (N_1(H_1 \cap N_2)) = (H_1 \cap N_2)(H_2 \cap N_1) \quad ;$$

d'où un homomorphisme rationnel biunivoque de $(H_1 \cap H_2)/(H_1 \cap N_2)(H_2 \cap N_1)$ sur $N_1(H_1 \cap H_2)/N_1(H_1 \cap N_2)$, et, par raison de symétrie, du même groupe sur $N_2(H_1 \cap H_2)/N_2(H_2 \cap N_1)$.

C. Q. F. D.

2. Propriétés des groupes résolubles.

On note G_a et G_m le groupe additif et le groupe multiplicatif du domaine universel ; ce sont des groupes algébriques de dimension 1, d'ailleurs les seuls à être incomplets. On voit facilement (par exemple en regardant leurs points d'ordre fini) que G_a et G_m ne sont pas isogènes ; donc tout groupe algébrique qui est isogène à G_a (resp. G_m) lui est isomorphe, puisqu'il est de dimension 1 et incomplet.

On dit qu'un groupe algébrique G est résoluble s'il admet une suite de composition (G_i) (formée de sous-groupes fermés) dont les quotients sont isomorphes à G_a , G_m ou à des groupes abéliens finis. Lorsque G est connexe, l'on peut supposer que tous ces quotients sont isomorphes à G_a ou G_m (si le second terme G_1 de la suite n'est pas connexe, on le remplace par sa composante connexe G_1' , qui est un sous-groupe invariant puisque G est connexe ; alors G/G_1' , qui est isogène à G/G_1 est isomorphe à G_a ou G_m ; et on continue). Si G est résoluble, et connexe, on dit qu'un corps k est un corps de résolubilité de G s'il existe une suite de composition (G_i) formée de sous-groupes connexes fermés de G et des homomorphismes séparables h_i de G_i sur G_a ou G_m de noyau G_{i+1} tels que G , les G_i et les h_i soient définis sur k .

Exemples classiques de groupes algébriques résolubles.

1° Le groupe des matrices triangulaires inversibles.

2° Tout groupe algébrique commutatif de matrices.

Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe invariant fermé de G ; pour que G soit résoluble, il faut et il suffit que H et G/H le soient. Tout groupe isogène à un groupe résoluble est résoluble.

THÉORÈME 4. - *Soient G un groupe résoluble connexe, V une variété où G opère régulièrement, u l'application canonique de V dans la variété W de ses G-orbites. Il existe alors une section rationnelle $v : W \to V$ (c'est-à-dire une application rationnelle $v : W \to V$ telle que $v \circ u = 1$). Si k est un corps de résolubilité de G et un corps de définition de V et $G \times V \to V$, on peut choisir v définie sur k .*

Si V est un espace homogène sur G (auquel cas W se réduit à un point) notre assertion revient à dire qu'il existe sur V un point rationnel sur k. La démonstration se fait alors en trois étapes :

1° V homogène, $G = G_a$ ou G_m. - Alors V est une courbe unicursale non singulière incomplète, donc birégulièrement équivalente sur k à une conique C moins un ou deux points P', P''. Si (x) est un point générique de C sur k, il existe une représentation paramétrique $r : D \to C$ (D : droite projective) définie sur $k(x)$ telle que $P' = r(\infty)$ (et $P'' = r(0)$ lorsque le groupe est G_m) ; donc P' (ou P', P''), qui est algébrique sur k et rationnel sur $k(x)$ est rationnel sur k ; d'où au moins 3 points rationnels sur C (puisque D a au moins 3 éléments), et au moins un sur V.

2° V homogène, G résoluble connexe quelconque. - On récurre sur $\dim G$. Soit G_1 un sous-groupe de codimension 1, tel que G/G_1 soit isomorphe (sur k) à G_a ou G_m. Soit V' la variété des G_1-orbites de G ; comme G/G_1 opère sur V', on peut supposer qu'il y opère régulièrement (théorème 1), et V' est ainsi un espace homogène sur G/G_1. D'après (1), V' admet donc un point x' rationnel sur k. L'image réciproque S de x' par $V \to V'$ est un cycle réduit à une variété, et celle-ci est donc définie sur k. Comme S est un espace homogène sur G_1, S contient par récurrence un point rationnel sur k.

3° Cas général. - Soit x un point générique de W sur k. Le cycle $u^{-1}(x)$ est une sous-variété V_1 de V, sur laquelle G opère régulièrement et transitivement ; un ouvert de V_1 est donc un espace homogène sur G. Comme V_1 est définie sur $k(x)$, elle contient un point y rationnel sur $k(x)$. La section v est alors définie par $v(x) = y$.

N.B. - Noter que v n'est pas partout définie.

CONSÉQUENCES.

a. Si G est un groupe connexe et H un sous-groupe résoluble connexe, alors G est birationnellement équivalent à $H \times (G/H)$. Il suffit en effet de faire opérer H à droite sur G.

b. Tout groupe résoluble connexe G est une variété unicursale. Ceci s'obtient par applications répétées de (a). Si k est un corps de résolubilité pour G, $k(G)$ est une extension pure de k.

3. Construction de représentations linéaires.

Soit V une variété non singulière sur laquelle opère régulièrement un groupe algébrique G, et soit k un corps de définition de G, V et $G \times V \to V$. Pour toute fonction f sur $V (f \in K(V)$, K désignant le domaine universel) et tout $g \in G$, nous noterons $s_g f$ la "translatée" de f par $g ((s_g f)(x) = f(g^{-1}, x))$

THÉORÈME 5. - Si f est partout finie sur V, il existe un sous-espace S défini sur k et de dimension finie de $K(V)$ contenant f et invariant par G (c'est-à-dire $s_g(S) = S$ pour tout $g \in G$).

Comme f est combinaison linéaire à coefficients dans K de fonctions partout finies sur V et définies sur k, on peut supposer f définie sur k. Prenons un point générique g de G sur k, et écrivons $s_g f = \sum_{i=1}^{N} c_i(g) u_i$, où les u_i sont dans $k(V)$ et partout finies et où les $c_i(g)$ sont dans $k(g)$ et linéairement indépendantes sur k. Par automorphisme on a $s_{g'} f = \sum_{i=1}^{N} c_i(g') u_i$ pour tout point générique g' de G sur k. Si $g_1, \ldots, g_N$ sont N points génériques indépendants de G sur k, on voit aisément que $\det(c_i(g_j)) \neq 0$, donc l'espace vectoriel S (sur K) engendré par les u_i est aussi engendré par N translatées génériques indépendantes quelconques de f. Il en résulte que S est globalement invariant par toute translation générique, donc par tous les $s_{g''}$ $(g'' \in G)$, puisque tout élément de G est produit de deux éléments génériques

C. Q. F. D.

On a ainsi un homomorphisme rationnel r défini sur k de G dans le groupe algébrique des transformations linéaires inversibles de S. Si $k(S) = k(V)$ et si G opère fidèlement sur V (en un sens algébro-géométrique à préciser), alors la "représentation" r est un isomorphisme (birégulier) de G sur $r(G)$.

4. Propriétés des groupes linéaires.

On appelle groupe linéaire tout groupe algébrique qui est birégulièrement isomorphe à groupe algébrique de matrices. Tout sous-groupe fermé d'un groupe linéaire tout produit de groupes linéaires sont des groupes linéaires. Les groupes G_m (évident) et G_a (par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) sont linéaires.

LEMME 1. - Si la composante connexe G_o de G est linéaire, G est linéaire.

En effet G opère fidèlement sur le produit V de toutes ses composantes G_i. D'autre part, comme $k(G_o)$ est engendré par un système fini de fonctions partout finies, il en est de même des $k(G_i)$, donc de $k(V)$. On applique alors le n° 3.

LEMME 2. - _Si_ G _admet un homomorphisme rationnel_ u _sur un groupe linéaire_ H _de même dimension,_ G _est linéaire._

On a $k(H) \subset k(G)$. On prend des fonctions $f_i \in k(H)$ engendrant $k(H)$ et partout finies sur H ; elles sont alors partout finies sur G. On leur adjoint des fonctions $f'_j \in k(G)$, engendrant G, et entières sur $k[(f_i)]$; elles sont partout finies sur G (car G est non singulier, donc normal). On applique le n° 3 avec $V = G$.

LEMME 3. - _Si_ G _est connexe et si_ C _est son centre,_ G/C _est linéaire._

Soit $\mathfrak{o} \subset K(G)$ l'anneau local de l'élément neutre e dans G, et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Pour $g \in G$, on définit un automorphisme i_g de $K(G)$ par $(i_g f)(x) = f(g^{-1} xg)$; l'application $g \to i_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de $K(G)$, et son noyau est C ; l'anneau $\mathfrak{o}$ et les idéaux $\mathfrak{m}^q$ sont globalement invariants par tout i_g ; on peut alors faire opérer G/C dans l'espace vectoriel $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^q$ (qui est de dimension finie sur K), et c'est fidèle pour q grand.

THÉORÈME 6. - _Il existe, dans_ G, _un sous-groupe invariant connexe_ D _tel que_ G/D _soit linéaire et que le noyau de tout homomorphisme rationnel de_ G _dans un groupe linéaire contienne_ D ; _si_ G _est connexe,_ D _est contenu dans le centre_ C _de_ G.

Si D_1 est le noyau d'un homomorphisme $G \to$ groupe linéaire, G/D_1 est linéaire (lemme 2). Si G/D_1 et G/D_2 sont linéaires, $G/(D_1 \cap D_2)$ est linéaire puisque $D_1 \cap D_2$ est le noyau de $G \to (G/D_1) \times (G/D_2)$; d'où un plus petit sous-groupe D tel que G/D soit linéaire. Le centre C contient D d'après le lemme 3.

LEMME 4. - _Si le groupe connexe_ G _contient un sous-groupe fermé invariant_ H _isomorphe à_ G_a _ou_ G_m _et si_ G/H _est linéaire,_ G _est linéaire._

Soit $u : G \to G/H$ et soit $v : G/H \to G$ une section rationnelle (théorème 4); on a $u(v(x)) = x$ pour $x \in G/H$ et $vu(g)g^{-1} \in H$ pour $g \in G$. Notons c la fonction coordonnée usuelle sur H, identifié à G_a ou G_m. Si W est le fermé de G/H où la section v n'est pas définie, la fonction rationnelle $g \to c(vu(g)g^{-1})$ sur G est partout définie en dehors de $u^{-1}(W)$. Comme G/H est linéaire, on peut trouver une fonction rationnelle d sur G/H qui soit suffisamment nulle sur W pour que la fonction $f(g) = d(u(g)).c(vu(g)g^{-1})$ soit partout finie sur G . Le n° 3 (appliqué au cas où G opère à gauche sur soi-même) donne ainsi une représentation linéaire r de G sur un groupe linéaire G' : pour $h \in H$, $h \neq e$ et $g \in G$, on a

$$(s_h f)(g) = f(h^{-1} g) = d(u(h^{-1} g))\ c(vu(h^{-1} g)\ g^{-1} h) = d(u(g))\ c(vu(g)\ g^{-1} h)$$

$$= d(u(g))\ c(vu(g)\ g^{-1})\ c(h) \quad \text{(dans le cas } H = G_m \text{ , calcul analogue pour } H = G_a) = f(g)\ c(h) \neq f(g) \ ;$$

donc l'intersection de H et du noyau de r se réduit à e . On a donc un monomorphisme rationnel de G dans le groupe linéaire $(G/H) \times G'$, et G est linéaire par le lemme 2.

5. Le théorème de Chevalley.

On va faire maintenant intervenir les variétés abéliennes. Rappelons que ce sont les groupes algébriques complets, qu'elles sont commutatives, et qu'elles jouissent de tas de belles propriétés (cf. le livre de WEIL, ou l'exposé de NÉRON [4]).

LEMME 5. - Tout homomorphisme rationnel u d'une variété abélienne A dans un groupe linéaire connexe L (resp. de L dans A) est constant.

En effet $u(A)$ est un groupe linéaire complet, donc réduit à e . Dans le sens $u : L \to A$, on procède par récurrence sur $\dim L$. Si L est commutatif, il est résoluble, (cf. n° 2), donc est une variété unicursale (conséquence b) du théorème 4), d'où $u(L) = \{e\}$ (cf. WEIL ou NÉRON). Sinon l'on prend un point générique g de L , et la composante connexe N de son normalisateur N_g ; comme $N \neq L$, on a $u(N) = \{e\}$ d'après l'hypothèse de récurrence ; comme $g \in N_g$, il en résulte que $u(g)$ est un point d'ordre fini de A ; donc tout point de $u(L)$ est d'ordre fini, ce qui implique $u(L) = \{e\}$ puisque $u(L)$ est connexe, et qu'une variété abélienne non triviale contient des points d'ordre infini.

On déduit du lemme 5 et du lemme 3 que toute sous-variété abélienne A d'un groupe algébrique G est contenue dans le centre de V . De plus ROSENLICHT démontre la généralisation suivante du théorème de complète réductibilité de Poincaré-Weil ; il existe un sous-groupe fermé connexe G_1 de G tel que $G = G_1 A$ et que $G_1 \cap A$ soit un groupe fini (démonstration inspirée de celle de WEIL).

LEMME 6. - Tout groupe algébrique non complet G admet un sous-groupe linéaire de dimension > 0.

Nous nous contenterons d'esquisser la démonstration de ce lemme, qui est assez délicate. Si $\dim G = 1$, G est G_a ou G_m, donc linéaire. On récurre alors sur $\dim G$. On peut supposer G connexe. D'après le lemme de Chow il existe une variété projective V, une application birationnelle $w : V \to G$ et un fermé F de V tels que w soit partout régulière sur $V - F$, que $w(V - F) \cong G$ et que $w^{-1}(G) = V - F$ (démonstration en considérant G comme obtenu par racollement de morceaux $V_i - F_i$ en nombre fini, avec les V_i projectives, et en prenant pour V le "joint" des V_i dans $\prod_i V_i$). Par transformation monoïdale on peut supposer que $\dim(F) = \dim(G) - 1$. Le groupe G opère (non régulièrement) sur V, et l'astuce est de la faire opérer sur la "frontière" $F(11)$. En effet on montre que, en remplaçant éventuellement V par une variété birationnellement équivalente convenable qui la "domine", l'application $G \times V \to V$ déduite de $G \times G \to G$ est définie au point $(g ; x)$ où g et x sont des points génériques indépendants (sur un corps k) de G et d'une composante de dimension maximum de F ; comme l'image $g.x$ de (g , x) par $G \times V \to V$ ne peut être dans $V - F$, le lieu W de $g.x$ sur k est une sous-variété de dimension $\dim(G) - 1$ de F : le groupe G opère sur W au moyen de $g'(g.x) = (g'g).x$, g' désignant un point générique de G sur $k(g , x)$. On considère alors un point y de W et le sous-groupe H_y de G laissant y invariant ; comme $\dim(W) < \dim(G)$, on a $\dim(H_y) > 0$. Supposons $H_y \neq G$; alors on a gagné, d'après l'hypothèse de récurrence si H_y est incomplet, et d'après le théorème de complète réductibilité si H_y est complet.

Reste le cas où $H_y = G$ pour tout y dans W. On prend alors un point z suffisamment général sur W pour qu'il soit simple sur V (ce qui est loisible car on peut supposer V normale, donc W simple sur V) et que $g.z$ soit défini (donc égal à z) pour g générique sur G ; comme tout point de G est produit de deux points génériques, $g.z$ est défini et égal à z pour tout g dans G. Donc, pour tout g dans G, l'automorphisme s_g de $K(G) = K(V)$ laisse l'anneau local $\mathfrak{o}$ de z sur V globalement invariant, ainsi que toutes les puissances de son idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme dans le lemme 3 (n° 4) on obtient une représentation linéaire de G dans $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^q$ laquelle est fidèle pour q assez grand

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7 (CHEVALLEY). - Soit G un groupe algébrique connexe. La famille des sous-groupes linéaires connexes de G admet un plus grand élément L, L est invariant, et G/L est une variété abélienne.

D'après le lemme 5, il suffit de montrer l'existence d'un sous-groupe linéaire connexe invariant L tel que G/L soit une variété abélienne. On récurre sur $\dim(G)$.

a. Si le centre C de G est complet, sa composante connexe C_o est abélienne et il existe un sous-groupe connexe H tel que $C_o H = G$ et que $C_o \cap H$ soit fini (théorème de complète réductibilité). Comme le centre de H est fini, H est linéaire (lemmes 2 et 3). Comme on a un homomorphisme rationnel surjectif de $C_o/(C_o \cap H)$ (qui est une variété abélienne) sur $C_o H/H \simeq G/H$, G/H est une variété abélienne, et on a gagné.

b. Si C est incomplet, il admet un sous-groupe linéaire C' de dimension >0 (lemme 6). Comme C' est commutatif, il est résoluble, et admet un sous-groupe H isomorphe à G_a ou G_m . Par récurrence G/H admet un sous-groupe linéaire invariant L/H tel que $(G/H)/(L/H) - G/L$ soit une variété abélienne. Enfin L est linéaire d'après le lemme 4.

C. Q. F. D.

CONSÉQUENCES.

1° Soit H un sous-groupe fermé du groupe algébrique G . Pour que G soit linéaire, il faut et il suffit que H et G/H le soient.

2° Toute image d'un groupe linéaire par un homomorphisme rationnel est un groupe linéaire.

3° Tout groupe isogène à un groupe linéaire est linéaire.

4° Tout groupe algébrique résoluble est linéaire (utiliser 1)

REMARQUES.

1° Avec les notations du théorème 7, G/L est le "plus grand quotient abélien" de G ; il est donc isomorphe à la variété d'Albanese de G .

2° Nous avons vu (théorème 6) que G admet aussi un "plus grand quotient linéaire" G/D . Mais le sous-groupe D , bien que contenu dans le centre de G , n'est pas en général une variété abélienne. ROSENLICHT donne comme contre-exemple la jacobienne généralisée G d'une courbe elliptique à point de retroussement ; alors G a un seul sous-groupe fermé connexe non trivial H , qui est isomorphe à G_a , et pour lequel G/H est la jacobienne ordinaire de la courbe ; ici $L = H$ et $D = G$. Dans le cas général on voit assez facilement que $G = LD$, que tout homomorphisme rationnel de D dans un groupe linéaire est trivial, et que D ne contient qu'un nombre fini d'éléments d'ordre fini donné.

3° Tout groupe algébrique G contient aussi une plus grande sous-variété abélienne A (nécessairement contenue dans le centre). Le contre-exemple ci-dessus montre que G/A n'est pas nécessairement linéaire. ROSENLICHT étudie les groupes tels que $G = LA$, qui ne sont autres que les groupes isogènes au produit d'une variété abélienne par un groupe linéaire. Pour que $G = LA$, il faut et il suffit que L et A soient de dimensions complémentaires. Si $(L \cap D)_0$ désigne la composante connexe de $L \cap D$, $G/(L \cap D)_0$ est le plus grand quotient de G qui soit de ce type.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARSOTTI (Iacopo). - Structure theorems for group varieties, Ann. di Mat. pura ed appl., t. 38, 1955, p. 78-119.

[2] CHEVALLEY (Claude). - [Papiers secrets].

[3] NAKANO (Shigeo). - Note on group varieties, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Series A : Math., t. 27, 1952, p. 55-56.

[4] NÉRON (André). - Variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55, n° 104.

[5] ROSENLICHT (Maxwell). - Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 401-443.

[6] WEIL (André). - On algebraic groups of transformations, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 355-391.

[7] WEIL (André). - On algebraic groups and homogeneous spaces, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 493-512.