JAAK PEETRE

Relations entre deux méthodes d'interpolation

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 49-53
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1966__29__49_0>

RELATIONS ENTRE DEUX MÉTHODES D'INTERPOLATION

par JAAK PEETRE

Dans ces dernières années des constructions générales d'*espaces d'interpolation* ont été données par plusieurs auteurs (cf. par exemple [2], [3], [4], [5], [6]). Comme ces auteurs sont souvent partis de points de vue très différents, ils sont aussi arrivés à des espaces d'interpolation tout différents et une question d'une importance manifeste est donc d'éclaircir le rapport entre toutes ces diverses méthodes d'interpolation. Dans la présente note nous nous proposons d'étudier de ce point de vue deux de ces méthodes : d'une part, la méthode dite des moyennes [5], [6], et d'autre part la méthode de Gagliardo [1].

1. Rappel.

Soient A_0 et A_1 des espaces de Banach tous les deux contenus dans un espace vectoriel topologique *séparé* $\mathcal{A}$, les injections de A_0 et A_1 dans $\mathcal{A}$ étant continues.

a) Définition des espaces de moyennes (cf. [5], [6]).

Soient $\xi_0>0$, $\xi_1<0$, $1\leq p_0$, $p_1\leq\infty$.

Désignons alors par [1] $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ l'espace des éléments $a\in\mathcal{A}$ tels qu'il existe, x désignant une variable réelle, $-\infty<x<\infty$, une fonction $v_0(x)$ mesurable à valeurs dans A_0, et une fonction $v_1(x)$ mesurable à valeurs dans A_1 telles que

$$a=v_0(x)+v_1(x)$$

pour presque tout x et telles que

$$(1)\qquad e^{x\xi_0}v_0(x)\in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{x\xi_1}v_1(x)\in L^{p_1}(A_1) \quad (^2).$$

Posons

$$(2)\qquad F_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}(a)=\inf_{v_0(x), v_1(x)}\max(||e^{x\xi_0}v_0(x)||_{L^{p_0}(A_0)}, ||e^{x\xi_1}v_1(x)||_{L^{p_1}(A_1)}) \quad (^3)$$

On sait que $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ est un espace vectoriel.

On sait aussi que $F_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}(a)$ est une norme dans $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ qui en fait un espace de Banach.

---

(1) Dans [5], [6] on a utilisé $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$.

(2) $L^p(A)$, où $1\leq p\leq\infty$ et A un espace de Banach quelconque, désigne l'espace des fonctions mesurables $u(x)$ à valeurs dans A, de puissance p-ième intégrable. Modification habituelle pour $p=\infty$.

(3) $||u||_{L^p(A)}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}||u(x)||_A^p\,dx\right)^{1/p}$.

A côté de ξ_0, ξ_1, p_0, p_1 nous allons utiliser les deux paramètres θ et p définis par :

(3) $$0=(1-\theta)\xi_0+\theta\xi_1, \quad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

On a : $0<\theta<1$, $1\leqq p\leqq\infty$.

On sait que $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ ne dépend effectivement que de θ, p_0, p_1; comme nous allons voir tout à l'heure, dans plusieurs cas particuliers, il ne dépend que de θ, p.

b) Définition des espaces de Gagliardo (cf. [2]).

Soient $0\leqq m_0, m_1, m_0', m_1'<\infty$, $m_0'+m_1'=1$, $m_0+m_0'>0$, $m_1+m_1'>0$.

Notons alors $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m_0', m_1'}$ l'espace des éléments $a\in\mathscr{A}$ tels qu'il existe, y désignant une variable réelle, $-\infty<y<\infty$, une fonction $w_0(y)$ absolument continue à valeurs dans A_0 avec $\lim\limits_{y\to\infty}||w_0(y)||_{A_0}=0$, et une fonction $w_1(y)$ absolument continue à valeurs dans A_1 avec $\lim\limits_{y\to-\infty}||w_1(y)||_{A_1}=0$ telles que

$$a=w_0(y)+w_1(y)$$

pour tout y et telles que

(4) $$\left[\int_{-\infty}^{\infty}||w_0(y)||_{A_0}^{m_0}||w_1(y)||_{A_1}^{m_1}||w_0'(y)||_{A_0}^{m_0'}||w_1'(y)||_{A_1}^{m_1'}dy\right]^{\frac{1}{m_0+m_1+1}}<\infty$$

$\left(\text{où } w_0'(y)=\dfrac{dw_0(y)}{dy},\ w_1'(y)=\dfrac{dw_1(y)}{dy}\right)$.

Posons

(5) $$\Phi_{m_0, m_1, m_0', m_1'}(a)=\inf_{w_0(y), w_1(y)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}||w_0(y)||_{A_0}^{m_0}||w_1(y)||_{A_1}^{m_1}||w_0'(y)||_{A_0}^{m_0'}||w_1'(y)||_{A_1}^{m_1'}dy\right]^{\frac{1}{m_0+m_1+1}}$$

Contrairement au cas *a)*, on ne sait pas même si en général $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m_0', m_1'}$ est un espace vectoriel. Il en est ainsi au moins dans plusieurs cas particuliers et alors $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m_0', m_1'}$ est toujours un espace de Banach d'une façon naturelle, avec une norme équivalente à $\Phi_{m_0, m_1, m_0', m_1'}(a)$ (cf. [2]).

A côté de m_0, m_1, m_0', m_1' nous allons utiliser les deux paramètres δ et ρ définis par :

(6) $$m_0+m_0'=\rho(1-\delta), \qquad m_1+m_1'=\rho\delta$$

On a : $0<\delta<1$, $1\leq\rho<\infty$.

Remarque. — Introduisons aussi les deux paramètres suivants :

$$\rho_0=1+\frac{m_0}{m_0'}, \qquad \rho_1=1+\frac{m_1}{m_1'}$$

qui, il nous semble, jouent un rôle analogue à celui de p_0 et p_1 dans le cas *a*.

Lorsqu'on fait $\rho\to\infty$, la relation (4) devient, formellement :

(7) $$\sup_y||w_0(y)||_{A_0}^{1-\delta}\,||w_1(y)||_{A_1}^{\delta}<\infty$$

Dans ce qui suit, on va interpréter $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m_0', m_1'}$ pour $\rho=\infty$ dans ce sens.

2. Comparaison de $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ **et de** $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m'_0, m'_1}$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

Théorème. — On a :

$$[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1} \subset (A_0, A_1)_{m_0, m_1, m'_0, m'_1} \qquad \textit{pour } p=\rho,\ \theta=\delta, \tag{8}$$

θ, p étant définis par (3) *et δ, ρ étant définis par* (6). *Pour $p=\rho=1$ et pour $p=\rho=\infty$ on a égalité $=$ au lieu d'inclusion $\subset$ dans* (8).

Démonstration. — Pour simplifier la notation nous allons ci-dessous supprimer les indices dans les symboles pour les espaces en écrivant donc simplement $[A_0, A_1]$ et (A_0, A_1).

(i) $[A_0, A_1] \subset (A_0, A_1)$ pour $p=\rho$, $\theta=\delta$.

Soit $a \in [A_0, A_1]$ et soient $v_0(x)$ et $v_1(x)$ comme dans la définition de cet espace. En remplaçant $v_0(x)$ et $v_1(x)$ par $\varphi(x)*v_0(x)$ et $\varphi(x)*v_1(x)$, où $\varphi(x)$ est une fonction une fois continûment différentiable à support compact, à valeurs scalaires, avec $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$, et $*$ désigne la convolution, on voit sans peine qu'on peut supposer que joint à (2) on a :

$$e^{\xi_0 x} v'_0(x) \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{x\xi_1} v'_1(x) \in L^{p_1}(A_1). \tag{9}$$

En prenant $y=x$, $w_0(y)=v_0(x)$, $w_1(y)=v_1(x)$ et utilisant (1), (9), on obtient alors grâce à l'inégalité de Hölder la relation (4); en effet, on notera que l'intégrande peut s'écrire

$$(\|w_0(y)\|_{A_0}^{p_0})^{\frac{m_0}{p_0}}(\|w_1(y)\|_{A_1}^{p_1})^{\frac{m_1}{p_1}}(\|w'_1(y)\|_{A_0}^{p_0})^{\frac{m'_0}{p_0}}(\|w'_1(y)\|_{A_1}^{p_1})^{\frac{m'_1}{p_1}}$$

où

$$\frac{m_0}{p_0}+\frac{m_1}{p_1}+\frac{m'_0}{p_0}+\frac{m'_1}{p_1}=\frac{\rho(1-\delta)}{p_0}+\frac{\rho\delta}{p_1}=\frac{p(1-\theta)}{p_0}+\frac{p\theta}{p_1}=1.$$

Donc on a $a \in (A_0, A_1)$.

(ii) $[A_0, A_1] \supset (A_0, A_1)$ pour $p=\rho=1$, $\theta=\delta$.

Soit $a \in (A_0, A_1)$ et soient $w_0(y)$ et $w_1(y)$ comme dans la définition de cet espace. Vue l'hypothèse $\rho=1$ la relation (4) devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|w'_0(y)\|_{A_0}^{1-\delta}\|w'_1(y)\|_{A_1}^{\delta}dy<\infty. \tag{9}$$

Définissons maintenant $x=\alpha(y)$ par la formule :

$$e^{x\xi_0}\|w'_0(y)\|_{A_0}=e^{x\xi_1}\|w'_1(y)\|_{A_1}=\|w'_0(y)\|_{A_0}^{1-\delta}\|w'_1(y)\|_{A_1}^{\delta}. \tag{10}$$

Il est clair que $\alpha(y)$ est une fonction mesurable de y.

Définissons ensuite $u(x)$ par la formule

$$u(x)=\int_{E_n} w(y)dy=-\int_{E_n} w'_0(y)dy \qquad \text{pour } n\le x<n+1,$$

l'intégration étant prise sur l'ensemble E_n des y tels que $n\le\alpha(y)<n+1$. Comme

$$a=\int_{-\infty}^{\infty} w'_1(y)dy=-\int_{-\infty}^{\infty} w'_0(y)dy,$$

on obtient :

(11) $$a=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,dx.$$

De plus on voit facilement que

(12) $$e^{x\xi_0}u(x)\in L^1(A_0),\qquad e^{x\xi_1}u(x)\in L^1(A_1)\ ;$$

en effet, on a, par exemple, vu (9) et (10) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}||e^{x\xi_0}u(x)||_{A_0}dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1}||e^{x\xi_0}u(x)||_{A_0}dx\leqq e^{\xi_0}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{E_n}||e^{\alpha(y)\xi_0}w_0(y)||_{A_0}dy\leqq$$
$$\leqq e^{\xi_0}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{E_n}||w_0'(y)||_{A_0}^{1-\delta}||w_1'(y)||_{A_1}^{\delta}dy=e^{\xi_0}\int_{-\infty}^{\infty}||w_0'(y)||_{A_0}^{1-\delta}||w_1'(y)||_{A_1}^{\delta}dy<\infty.$$

Mais (11) et (12) entraînent $a\in[A_0, A_1]$; il suffit de prendre $v_0(x)=\int_x^{\infty}u(x_1)dx_1$, $v_1(x)=\int_{-\infty}^{x}u(x_1)dx_1$ (cf. [5], [6]).

(iii) $[A_0, A_1]\supset(A_0, A_1)$ pour $p=\rho=\infty$, $\theta=\delta$.

Soit $a\in(A_0, A_1)$ et soient $w_0(y)$ et $w_1(y)$ comme dans la définition de cet espace. Définissons $x=\beta(y)$ par la formule

(13) $$e^{x\xi_0}||w_0(y)||_{A_0}=e^{x\xi_1}||w_1(y)||_{A_1}=||w_0(y)||_{A_0}^{1-\delta}||w_1(y)||_{A_1}^{\delta}.$$

Il est clair que $\beta(y)$ est une fonction continue de y, avec $\lim_{y\to\infty}\beta(y)=\infty$ et $\lim_{y\to-\infty}\beta(y)=-\infty$. Il existe alors une fonction mesurable $\gamma(x)$ telle que

$$\beta(\gamma(x))=x \qquad \text{pour tout } x.$$

(On peut prendre par exemple $\gamma(x)=\inf\{x\,|\,x=\beta(y)\}$, qui est croissante et donc mesurable.) Définissons ensuite $v_0(x)$ et $v_1(x)$ par les formules

$$v_0(x)=w_0(\gamma(x)),\qquad v_1(x)=w_1(\gamma(x)).$$

Alors $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont des fonctions mesurables avec $a=v_0(x)+v_1(x)$, et (1) résulte aussitôt de (7) et de (13); en effet, on a, par exemple,

$$\sup_x||e^{x\xi_0}v_0(x)||_{A_0}=\sup_x||e^{x\xi_0}w_0(\gamma(x))||_{A_0}\leqq\sup_y||e^{\beta(y)\xi_0}w_0(y)||_{A_0}=\sup_y||w_0(y)||_{A_0}^{1-\delta}||w_1(y)||_{A_0}^{\delta}.$$

Donc $a\in[A_0, A_1]$.

Remarque. — On notera que ce théorème nous donne une liaison entre d'un côté les résultats de [5], [6], et d'un autre côté les résultats de [3].

3. Question ouverte.

On se demande, naturellement, si l'on a égalité, dans le théorème, même dans le cas où $p=\rho\neq 1$ et $\neq\infty$. Nous ne savons pas s'il en est ainsi en général. En tout cas, il en est ainsi dans plusieurs cas particuliers; nous nous bornons à en discuter un seul ci-dessous. Notons aussi que la question générale est liée à la question de savoir si $[A_0, A_1]_{\xi_0,\xi_1,p_0,p_1}$ ne dépend effectivement que de θ, p ([4]). Comme nous allons voir c'est ainsi dans le cas de notre exemple.

4. Un exemple.

Notation. — Étant donnée une mesure positive μ sur un espace localement compact X, nous désignons par L^P, où $1 \leq P \leq \infty$, les espaces de Lebesgue pour μ.

Il résulte de [2] que

$$(L^{P_0}, L^{P_1})_{m_0, m_1, m'_0, m'_1} = L^P$$

pour $\frac{1}{P} = \frac{1-\delta}{P_0} + \frac{\delta}{P_1}$, $P = \rho$.

Donc, en utilisant notre théorème on trouve

$$[L^{P_0}, L^{P_1}]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1} \subset L^P$$

pour $\frac{1}{P} = \frac{1-\theta}{P_0} + \frac{\theta}{P_1}$, $P = p$. En utilisant ensuite le théorème de dualité de Lions (cf. [4], [5], [6]) on obtient

$$[L^{P_0}, L^{P_1}]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1} = (L^{P_0}, L^{P_1})_{m_0, m_1, m'_0, m'_1}$$

pour $\frac{1}{P} = \frac{1-\theta}{P_0} + \frac{\theta}{P_1} = \frac{1-\delta}{P_0} + \frac{\delta}{P_1}$, $P = p = \rho$, $\theta = \delta$.

Des considérations analogues peuvent être développées dans le cas des autres exemples envisagés dans [2].

Novembre 1962.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Arduini, Sull'equivalenzia di certi funzionali della teoria dell'interpolazione tra spazi di Banach, *Ricerche Mat.*, *9* (1962), 51-60.

[2] E. Gagliardo, Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, *Ricerche Mat.*, *9* (1960), 58-81.

[3] E. Gagliardo, Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali, *Ricerche Mat.*, *10* (1961), 244-281.

[4] J.-L. Lions, Sur les espaces d'interpolation; dualité, *Math. Scand.*, *9* (1961), 147-177.

[5] J.-L. Lions et J. Peetre, Propriétés d'espaces d'interpolation, *C.R. Acad. Sci. Paris*, *253* (1961), 1747-1749.

[6] J.-L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, *19* (1964), 5-68.

NOTE AJOUTÉE LE 31 JANVIER 1965

Cet article fut rédigé en novembre 1962 mais par des circonstances hors de notre contrôle la publication en a été retardée jusqu'ici. Remarquons que le problème d'équivalence des espaces $[A_0, A_1]_{\xi_0, \xi_1, p_0, p_1}$ et $(A_0, A_1)_{m_0, m_1, m'_0, m'_1}$ a été récemment résolu complètement par M. Tord Holmstedt; voir son article à paraître prochainement. La question posée au n° 3 a également trouvé une réponse affirmative; voir notre note aux *C.R. Acad. Sci. Paris*, *256* (1963), 54-55, ainsi que notre article aux *Ricerche Mat.*, *12* (1963), 248-261.

Manuscrit reçu le 1er février 1965.

(4) Il résulte d'Arduini [1] que les espaces de Gagliardo ne dépendent effectivement que de δ, ρ. Mais, comme celui-ci part d'une définition légèrement différente de celle utilisée dans cette note et aussi dans [2], le rapport entre ses résultats et les nôtres n'est pas clair.