

H. EL FEKIH

T. HADHRI

**Calcul des charges limites d'une structure  
élastoplastique en contraintes planes**

*M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome  
29, n° 4 (1995), p. 391-419

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1995\\_\\_29\\_4\\_391\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1995__29_4_391_0)

© AFCET, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## CALCUL DES CHARGES LIMITES D'UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE EN CONTRAINTES PLANES (\*)

par H. EL FEKIH <sup>(1)</sup> et T. HADHRI <sup>(1,2)</sup>

Communiqué par R. TEMAM

---

**Résumé** — On présente dans cette étude une nouvelle caractérisation des charges limites d'un solide élastoplastique régi par le modèle de Hencky en contraintes planes. Chacune de ces charges limites apparaîtra comme étant l'inverse de la valeur de l'infimum d'un problème de minimisation convexe non différentiable sur l'espace des champs d'autocontraintes.

Pour le calcul de ces charges limites, on propose une méthode de régularisation qui s'apparente à celle utilisée dans les travaux de FRIAA [7] pour le matériau de Norton-Hoff généralisé.

**Abstract** — In this paper we present a new characterization of the limit loads of an elastoplastic structure governed by a plane stresses Hencky model. Each one of these limit loads amounts to be the infimum value invert of a nondifferentiable minimization problem over the space of self equilibrated stress fields.

To compute these limit loads, we propose a regularization method which seems like the one used for the generalized Norton-Hoff material in the work of FRIAA [7].

### INTRODUCTION

Considérons un solide élastoplastique, homogène, isotrope, occupant un domaine borné de  $IR^3$ . Nous supposons que les chargements externes et le déplacement imposé induisent un état de contraintes planes. Ceci nous amène à considérer un domaine  $\Omega$  borné de  $IR^2$  avec un convexe d'élasticité  $K$  borné [10], [11]. Le domaine  $\Omega$  est donc soumis à des forces surfaciques  $\lambda f$ ,  $\lambda$  étant le paramètre de chargement, et à des efforts linéiques  $\lambda F$  sur une partie  $\Gamma_F$  de sa frontière. Sur l'autre partie  $\Gamma_U$  de la frontière de  $\Omega$ , le déplacement est imposé à  $u_0$ .

---

Manuscrit reçu le 13 avril 1993 et sous forme révisée le 24 novembre 1994

<sup>(1)</sup> Laboratoire de Mathématiques Appliquées, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 1002 Tunis, Tunisie

<sup>(2)</sup> CMAP, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex France

---

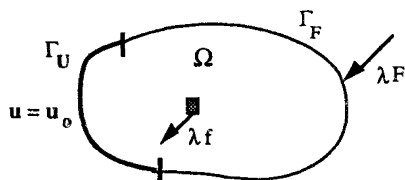


Figure 1.

Nous présentons dans la première partie de cette étude le problème de Hencky auquel on s'intéresse et nous rappelons quelques résultats d'existence le concernant, en particulier, celui se rapportant au problème aux déplacements dans  $BD(\Omega)$ . Nous donnons également une première caractérisation des charges limites  $\bar{\lambda}$  et  $\underline{\lambda}$ , donnée par Temam [16], Demengel [5], et Ben Dhia-Hadhri dans [3].

Dans la deuxième partie, nous donnons une nouvelle caractérisation des charges limites  $\bar{\lambda}$  et  $\underline{\lambda}$ , au moyen d'un problème de minimisation convexe.

Nous donnons dans la troisième partie, une méthode de régularisation pour le calcul de  $\bar{\lambda}$  et  $\underline{\lambda}$ , qui consiste essentiellement à remplacer la norme  $L^\infty$ , qui intervient dans l'expression de la nouvelle caractérisation de  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$ , par la norme  $L^q$  et à faire tendre  $q$  vers l'infini.

## 1. FORMULATION ET ÉTUDE DU PROBLÈME DE HENCKY EN CONTRAINTES PLANES

### 1.1. Problème aux limites

Nous considérons un solide élastoplastique, homogène, isotrope, occupant un domaine borné et régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le solide est soumis à des forces surfaciques  $\lambda f$  agissant sur  $\Omega$ , et à des efforts linéiques  $\lambda F$  sur  $\Gamma_F$ , où  $\lambda$  est un réel appelé paramètre de chargement. Sur  $\Gamma_U$  le déplacement est imposé.

En notant  $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$ , nous supposons que :

$$\bar{\Gamma}_U \cup \bar{\Gamma}_F = \Gamma = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset.$$

La loi rhéologique que nous adoptons, pour modéliser le comportement élastoplastique, est de type Hencky.

Le problème aux limites que nous considérons consiste à trouver un champ de déplacements  $u$  et un champ de contraintes  $\sigma$  qui vérifient les équations (1.1),..., (1.4) suivantes :

$$\begin{cases}
 (1.1) & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{y,j} + \lambda f_i = 0 \\ \sigma_{y,j} \nu_j = \lambda F_i \\ u = u_0 \\ \sigma(x) = P_K(A^{-1} \varepsilon(u(x))) \end{array} \right. \\
 (1.2) & \left. \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2 \\ \text{sur } \Gamma_F, \quad i = 1, 2 \\ \text{sur } \Gamma_U \\ [dx] p.p. \end{array} \right\} \quad (PL)
 \end{cases}$$

Dans les équations (1.1) et (1.2) et dans toute la suite de ce travail nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés qui prennent alors leurs valeurs dans  $\{1, 2\}$ . L'équation (1.4) qui relie le tenseur des contraintes  $\sigma$  au tenseur des déformations  $\varepsilon(u)$  est la loi de comportement de Hencky. Dans (1.1), ..., (1.4) nous avons noté :

$K$  : le convexe d'élasticité défini par :

$$K = \{ \tau \in IR^4_{sym} ; G(\tau) \leq 0 \},$$

où  $G$  désigne une fonction convexe, vérifiant la condition de qualification  $G(0) < 0$ , et où :

$$IR^4_{sym} = \{ \tau = (\tau_{ij}) \in IR^4 ; \tau_{ij} = \tau_{ji}, 1 \leq i, j \leq 2 \}$$

$\nu_j$  : la  $j$ -ième composante de la normale unitaire  $\nu$  extérieure à  $\Omega$ ,

$\cdot, j$  : la dérivée partielle par rapport à  $x_j$ ,

$A$  : l'opérateur d'élasticité, supposé être un automorphisme symétrique de  $IR^4$ , où les coefficients  $A_{ijkl}$  sont fonctions d'un module d'Young et du coefficient de Poisson du matériau étudié. En outre,  $A$  vérifie :

$$\exists C_0 > 0, \exists C_1 > 0 ; \forall \tau \in IR^4_{sym}, C_0 |\tau|^2 \leq \|\tau\|_A^2 \leq C_1 |\tau|^2$$

où :

$||$  : désigne la norme dans  $IR^4, |\tau|^2 = \sum_{i,j=1}^2 |\tau_{ij}|^2$

$\| \|_A$  : désigne la norme relative au produit scalaire défini par :

$$(1.5) \quad \langle \sigma, \tau \rangle_A = A \sigma \cdot \tau = A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl}, \quad \text{pour } \sigma, \tau \in IR^4_{sym}.$$

(1.6)  $P_K$  : la projection sur  $K$  relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  défini par (1.5)

(1.7)  $\varepsilon(u)$  : le tenseur des déformations linéarisé défini par ses composantes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Nous supposons dans toute la suite que

(1 8)  $K$  est un convexe fermé borné de  $IR_{sym}^4$ , contenant zéro dans son intérieur

$$(1 9) \quad f \in (L^2(\Omega))^2, \quad F \in (L^\infty(\Gamma_F))^2$$

(1 10)  $u_0$  est la restriction à  $\Gamma_U$  de la trace  $\Gamma$  d'un élément de  $(H^1(\Omega))^2$  que nous notons aussi  $u_0$

## 1.2. Problème aux contraintes et problème aux déplacements

La formulation variationnelle classique du problème aux limites (PL) est donnée par [13]

$$(1 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, u) \in H(\text{div}, \Omega) \cap K_{ad} \times U_{ad} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) \, dx = \lambda L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad} \\ \int_{\Omega} \{A\sigma \cdot (\tau - \sigma) - \varepsilon(u) \cdot (\tau - \sigma)\} \, dx \geq 0 \quad \forall \tau \in K_{ad} \end{array} \right.$$

où

$$(1 12) \quad H(\text{div}, \Omega) = \{\tau \in L^2(\Omega, IR_{sym}^4), \text{div } \tau \in (L^2(\Omega))^2\}$$

$L^2(\Omega, IR_{sym}^4) = \{\tau : \Omega \rightarrow IR_{sym}^4, |\tau| \in L^2(\Omega)\}$  muni de la norme classique notée  $\|\eta\|_{L^2(\Omega, IR_{sym}^4)}$

$$(1 13) \quad U_{ad} = \{v \in (H^1(\Omega))^2, v = u_0 \text{ sur } \Gamma_U\}$$

(1 14)  $\lambda L$  est la forme linéaire qui définit le travail des forces extérieures appliquées au solide considéré La forme  $L$  est donnée par

$$(1 15) \quad \begin{aligned} L(v) &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot v \, d\Gamma \\ K_{ad} &= \{\tau \in L^2(\Omega, IR_{sym}^4), \tau(x) \in K \text{ [dx] p p } x \in \Omega\} \\ &= \text{convexe des contraintes plastiquement admissibles} \end{aligned}$$

Il découle de l'hypothèse (1 8) et du fait que  $\Omega$  est borné, que

(1 16)  $K_{ad}$  est un convexe fermé borné de  $L^2(\Omega, IR_{sym}^4)$  et borné dans  $L^\infty(\Omega, IR_{sym}^4)$

Le problème aux contraintes relatif au problème (PL) est :

$$(1.17) \quad \inf_{\tau \in S_{ad}(\lambda) \cap K_{ad}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\tau\|_A^2 dx - \int_{\Gamma_U} (\tau\nu)u_0 d\Gamma \right\} \quad (PC)$$

où :

$$(1.18) \quad S_{ad}(\lambda) = \{ \tau \in L^2(\Omega ; IR^4_{sym}) ; \tau \text{ vérifie (1.1) et (1.2)} \}$$

= ensemble des contraintes statiquement admissibles .

Sous les hypothèses de régularité (1.9) et (1.10) prises sur les forces surfaciques, les efforts linéïques et la condition aux limites sur  $\Gamma_U$ , et si  $K_{ad} \cap S_{ad}(\lambda)$  est non vide, alors le problème aux contraintes (PC) admet une solution unique  $\sigma \in K_{ad} \cap S_{ad}(\lambda)$  [13].

Le problème aux déplacements consiste à minimiser, sur  $U_{ad}$ , la fonctionnelle énergie potentielle du système. Il s'écrit :

$$(1.19) \quad \begin{cases} \inf_{v \in U_{ad}} J_{\lambda}(v) \\ J_{\lambda}(v) = \int_{\Omega} \bar{\varphi}(\varepsilon(v)) dx - \lambda L(v) \end{cases} \quad (P)$$

avec :

$$(1.20) \quad \bar{\varphi}(\varepsilon(v)) = \langle A^{-1} \varepsilon(v), P_K(A^{-1} \varepsilon(v)) \rangle_A - \frac{1}{2} \|P_K(A^{-1} \varepsilon(v))\|_A^2$$

Les problèmes (P) et (PC) sont duaux et on a le

THÉORÈME 1.1 [16] :

*Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\text{Inf}(P) > -\infty$
- (ii)  $S_{ad}(\lambda) \cap K_{ad} \neq \emptyset$
- (iii)  $\text{Inf}(P) = \text{Inf}(PC)$ . ■

En revanche, on ne peut pas établir l'existence d'une solution  $u \in U_{ad}$  pour le problème aux déplacements (P) [15], [16].

### 1.3. Formulation du problème aux déplacements dans BD ( $\Omega$ )

#### 1.3.1. Choix du cadre fonctionnel

Contrairement à la théorie de l'élasticité linéaire classique, les discontinuités des contraintes et des déplacements sont physiquement admissibles. Le tenseur des déformations  $\varepsilon(u)$  peut alors présenter des masses de Dirac réparties sur les surfaces de discontinuités de  $u$ , c'est-à-dire des mesures bornées sur  $\Omega$ .

Le cadre fonctionnel adapté au problème aux déplacements ( $P$ ) est celui des fonctions à déformations mesures bornées, c'est-à-dire  $BD(\Omega)$  [15], [16] :

$$(1.21) \quad BD(\Omega) = \{v \in (L^1(\Omega))^2, \varepsilon_{ij}(v) \in M_1(\Omega), 1 \leq i, j \leq 2\}$$

où  $M_1(\Omega)$  est l'espace des mesures bornées sur  $\Omega$ , défini comme étant le dual topologique de  $C_0(\Omega)$  muni de la norme de la convergence uniforme.

On définit sur  $BD(\Omega)$  la norme suivante :

$$(1.22) \quad \|v\|_{BD(\Omega)} = \|v\|_{(L^1(\Omega))^2} + \sum_{i,j=1}^2 \|\varepsilon_{ij}(v)\|_{M_1(\Omega)}$$

avec :

$$(1.23) \quad \|\mu\|_{M_1(\Omega)} = \text{Sup} \{ \langle \mu, \psi \rangle, \psi \in C_0(\Omega) ; |\psi(x)| \leq 1 \forall x \in \Omega \}$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $C_0(\Omega)$  et son dual  $M_1(\Omega)$ .

L'espace  $BD(\Omega)$  muni de la norme (1.22) est un espace de Banach. On démontre [12] que  $BD(\Omega)$  est le dual topologique d'un Banach, et que sa topologie faible \* peut être définie par la convergence définie ci-dessous :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} &v_m \xrightarrow{*} v \text{ dans } BD(\Omega) \text{ faible*} \\ &\text{ssi} \\ &\begin{cases} v_m \rightarrow v & \text{dans } (L^1(\Omega))^2 \text{ fort} \\ \varepsilon_{ij}(v_m) \xrightarrow{*} \varepsilon_{ij}(v) & \text{dans } M_1(\Omega) \text{ faible*}, 1 \leq i, j \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

avec :

$$(1.25) \quad \begin{cases} \mu_m \xrightarrow{*} \mu & \text{dans } M_1(\Omega) \text{ faible*} \\ \forall \psi \in C_0(\Omega), \langle \mu_m, \psi \rangle \rightarrow \langle \mu, \psi \rangle \end{cases}$$

### 1.3.2. Problème aux déplacements généralisé

Pour étendre la fonctionnelle  $J_\lambda$ , définie par (1.19), à  $BD(\Omega)$ , nous utilisons les résultats de Temam [16], Hadhri [8] et [11], et Demengel [5] qui permettent, en particulier, de définir la fonction de mesure  $\varphi(\varepsilon(u))$  associée à la fonctionnelle  $\bar{\varphi}$  définie par (1.20).

Une première généralisation du problème (P), donné par (1.19), est : [10], [16]

$$(1.26) \quad \begin{cases} \text{Inf} \{ J_\lambda(v) ; v \in BD(\Omega), v = u_0 \text{ sur } \Gamma_U \} \\ J_\lambda(v) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(v)) - \lambda L(v) \end{cases}$$

où :  $\int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(v))$  désigne la masse totale de la mesure bornée  $\varphi(\varepsilon(v))$ .

Les théorèmes d'injection et de trace dans  $BD(\Omega)$ , [15] et [16] permettent de définir la forme linéaire  $L(v)$  pour  $v \in BD(\Omega)$ .

Pour  $\lambda$  assez petit, on peut, d'une part, montrer [3] que toute suite minimisante  $u_n$  du problème (1.26) admet une sous suite (encore notée  $u_n$ ) qui converge faiblement vers un élément  $u$  de  $BD(\Omega)$  au sens suivant :

$$(1.27) \quad \begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{dans } (L^1(\Omega))^2 \text{ fort} \\ u_n \rightharpoonup u & \text{dans } (L^2(\Omega))^2 \text{ faible} \\ \varepsilon_{ij}(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \varepsilon_{ij}(u) & \text{dans } M_1(\Omega) \text{ faible}^*, 1 \leq i, j \leq 2 \end{cases}$$

et d'autre part, que la fonctionnelle  $J_\lambda$  est s.c.i pour la topologie (1.27). Mais, ceci ne permet pas de prouver un résultat d'existence pour le problème d'optimisation (1.26), puisque l'opérateur trace défini de  $BD(\Omega)$  dans  $(L^1(\Gamma))^2$  n'est pas continu pour la topologie faible de  $BD(\Omega)$  définie par (1.27). Et par suite une limite au sens faible d'une suite minimisante qui vérifie  $u_n = u_0$  sur  $\Gamma_U$ , ne vérifie pas toujours la condition aux limites imposée sur  $\Gamma_U$ .

De plus, des expériences mécaniques montrent que le champ de déplacements à l'équilibre peut ne pas vérifier la condition aux limites imposées.

Pour remédier à cette difficulté, Temam [16], Hadhri [9] et Ben Dhia [3] ont introduit le problème aux déplacements relaxé qui apparaîtra comme une seconde généralisation du problème aux déplacements (1.19). Ce problème est donné par :

$$(1.28) \quad \begin{cases} \text{Inf } \{ \bar{J}_\lambda(v) ; v \in BD(\Omega) \} \\ \bar{J}_\lambda(v) = J_\lambda(v) + \int_{\Gamma_U} \bar{\varphi}_\infty(\mathcal{F}(u_0 - v)) d\Gamma \end{cases} \quad \text{(PG)}$$

où :  $J_\lambda(v)$  est définie par (1.26),

(1.29)  $\bar{\varphi}_\infty(\tau) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t\tau)}{t}$  est la partie principale de la fonction  $\bar{\varphi}$  définie par (1.20),

(1.30)  $\mathcal{F}(p)$ , pour  $p \in (L^1(\Gamma))^2$ , est le tenseur symétrique défini par ses composantes :

$$\mathcal{F}_{ij}(p) = \frac{1}{2}(p_i v_j + p_j v_i) \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$



Notons que le problème (PG) donné par (1.28) dérive du problème (1.26) en relaxant la condition aux limites :  $u = u_0$  sur  $\Gamma_U$ , et en rajoutant à l'énergie potentielle  $J_\lambda$  un terme de relaxation :  $\int_{\Gamma_U} \bar{\varphi}_\infty(\mathcal{F}(u_0 - v)) d\Gamma$ .

Deux justifications de la relaxation de la condition aux limites sur le déplacement ont été données :

La première, mathématique, par Temam [16], consiste à montrer que : i) lorsque les problèmes relaxé (PG), donné par (1.28), et initial (P), donné par (1.19) et (1.13), sont formulés dans un espace fonctionnel où les déformations sont des fonctions intégrables, alors ils admettent le même problème dual, qui est le problème aux contraintes (PC) donné par (1.17) et (1.18), et la même valeur de l'infimum. ii) le problème relaxé (PG) formulé dans un espace fonctionnel où les déformations sont  $L^1(\Omega)$ , et le problème relaxé (PG) formulé dans  $BD(\Omega)$ , admettent le même infimum.

La deuxième justification, mécanique, est donnée par Hadhri [9] et Ben Dhia [3], et consiste à considérer un domaine  $\Omega_1$  « plus grand que  $\Omega$  » vérifiant  $\Omega_1 = \Omega \cup \Gamma_U \cup (\Omega_1 \setminus \bar{\Omega})$ , et à imposer le champ de déplacement  $u_0$  dans la partie  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$ . Le problème, consiste alors à minimiser l'énergie potentielle du système  $\Omega_1$ . Ils utilisent par la suite les résultats sur les fonctions convexes de mesure établis par Temam [16] et Hadhri [8] pour retrouver le problème relaxé (1.28).

### 1.3.3. Rappels de quelques résultats d'existence

Nous commençons cette section par définir à la proposition 1.1 [3], deux charges limites  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  telles que pour tout  $\lambda \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  la fonctionnelle énergie  $\bar{J}_\lambda(v)$  définie par (1.26) et (1.28) est bornée inférieurement. On montre aussi, que pour ces valeurs du paramètre de chargement  $\lambda$ , la fonctionnelle  $\bar{J}_\lambda(v)$  est s.c.i pour la topologie faible de  $BD(\Omega)$  définie par (1.27). Cette propriété permet de montrer un résultat d'existence pour le problème aux déplacements généralisé (PG) qui sera donné dans le théorème 1.2 [3].

PROPOSITION 1.1 [3] :

Soient  $f \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $F \in (L^\infty(\Gamma_F))^2$ ,  $u_0 \in (L^1(\Gamma_U))^2$ . On définit l'ensemble  $A$  par (1.14), (1.26), (1.28), (1.29), (1.30) et

$$(1.31) \quad A = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}_\lambda(u) > -\infty \right\}.$$

Alors  $A$  est un intervalle contenant zéro dans son intérieur :

$$(1.32) \quad \text{Sup } A = \bar{\lambda} > 0 \quad \text{Inf } A = \underline{\lambda} < 0.$$

De plus, pour  $\lambda \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  la fonctionnelle  $\bar{J}_\lambda$  est s.c.i pour la convergence faible définie sur  $BD(\Omega)$  par (1.27). ■

THÉORÈME 1.2 [3] :

Pour  $f \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $F \in (L^\infty(\Gamma_F))^2$ ,  $u_0 \in (L^1(\Gamma_U))^2$  et  $\lambda \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$ , où  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  sont définies à la proposition 1.1, le problème aux déplacements généralisé (PG), donné par (1.28), avec (1.14), (1.26), (1.28), (1.29) et (1.30), admet au moins une solution. ■

Nous terminons la première partie de cette étude, par le

THÉORÈME 1.3 [2] :

LES PROBLÈMES (1.19) et (1.28) ((P) et (PG) respectivement) vérifient :

$$(1.33) \quad \text{Inf}(P) = \text{Inf}(PG) . \quad \blacksquare$$

## 2. NOUVELLE CARACTÉRISATION DES CHARGES LIMITES D'UNE STRUCTURE DE HENCKY EN CONTRAINTES PLANES

Nous nous intéressons dans cette section au calcul des charges limites  $\bar{\lambda}$  et  $\underline{\lambda}$  définies à la proposition 1.1. Pour cela, nous donnons une nouvelle caractérisation de ces charges limites.

Chacune de ces caractérisations est donnée par un problème de minimisation qui fait intervenir la jauge d'un convexe, dont la définition et quelques propriétés sont données au paragraphe 2.1. Nous donnons dans le théorème 2.1 la nouvelle caractérisation de la charge limite  $\bar{\lambda}$ , et dans la proposition 2.3 celle de la charge limite  $\underline{\lambda}$ , comme étant l'inverse de la valeur de l'infimum d'un problème de minimisation convexe.

### 2.1. Rappels sur la fonction jauge d'un convexe [14]

Dans ce paragraphe,  $C$  désignera un convexe d'un espace de Hilbert  $E$ , contenant zéro.

DÉFINITION 2.1 :

On appelle jauge de  $C$  et on note  $j_C$  la fonction, convexe sous additive positivement homogène de degré 1, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  définie sur  $E$  par :

$$(2.1) \quad j_C(x) = \text{Inf}\{\alpha \geq 0, x \in \alpha C\} . \quad \blacksquare$$

LEMME 2.1 :

Soit  $C$  un convexe de  $E$ , fermé et contenant l'origine. Alors on a :

- (i) pour tout  $x \in E$ , si  $0 < j_C(x) < +\infty$  alors  $x \in j_C(x) C$
- (ii) soient  $x \in E$  et  $r$  un réel positif non nul, on a :

$$(2.2) \quad j_C(x) \leq r \Leftrightarrow x \in rC$$

- (iii)  $j_C$  est semi continue inférieurement

- (iv) si  $C$  est de plus borné, alors pour  $x \in E$  on a :  
 si  $j_C(x) < +\infty$  alors  $x \in j_C(x) C$   
 (v)  $j_C(x) = \text{Inf} \{ \alpha > 0, x \in \alpha C \}$ . ■

## 2.2. Nouvelle caractérisation de la charge limite

Nous utilisons dans cette section :

— l'espace de Hilbert :

$$(2.3) \quad Y = \{ \eta \in L^2(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) ; \text{div } \eta \in (L^2(\Omega))^2 \}$$

muni de la norme

$$(2.4) \quad \| \eta \|_Y = \| \eta \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)} + \| \text{div } \eta \|_{(L^2(\Omega))^2},$$

et le sous-espace  $V$  défini par :

$$(2.5) \quad V = \{ \eta \in Y ; \text{div } \eta = 0 \text{ dans } \Omega, \eta \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_F \}$$

qui est fermé dans  $Y$  (voir par exemple [9]) et donc un Hilbert lorsqu'on le munit de la norme induite par celle de  $Y$  :

$$(2.6) \quad \| \eta \|_V = \| \eta \|_Y = \| \eta \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)}, \quad \text{pour } \eta \in V$$

— la fonction jauge  $j_K$  du convexe  $K$ , définie par (2.1), où  $K$  est le convexe d'élasticité vérifiant :

(2.7)  $K$  est un convexe fermé borné de  $\mathbb{R}_{\text{sym}}^4$  contenant zéro dans son intérieur

— la solution  $\sigma^e$  du problème élastique :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\sigma^e, u^e) \in Y \times U_{\text{ad}} & \\ \text{div } \sigma^e + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma^e \nu = F & \text{sur } \Gamma_F \\ u^e = u_0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma^e = A^{-1} \varepsilon(u^e) & \\ \varepsilon_{ij}(u^e) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^e + u_{j,i}^e), & 1 \leq i, j \leq 2 \end{array} \right.$$

où :  $U_{\text{ad}}$  est donné par (1.13)

(2.9) les données  $f, F$  et  $u_0$  vérifient les hypothèses (1.9) et (1.10), et sont telles que :

$$(2.10) \quad \sigma^e \in L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$$

Lorsque  $f \in (L^p(\Omega))^2, F \in (W^{1-(1/p), p}(\Gamma))^2, p \in ]1, +\infty[, \Gamma = \Gamma_F$  et  $\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} F d\Gamma = 0$ , on peut vérifier d'après Christiansen [4] que :

$$\sigma^e \in (W^{1,p}(\Omega))^4$$

Lorsque  $p > 2$  et puisque  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$ , on obtient alors (2.10).

Nous donnons à présent la nouvelle caractérisation de la charge limite  $\bar{\lambda}$  :

THÉORÈME 2.1 : *Sous les hypothèses (2.7) (2.9) et (2.10) la charge limite  $\bar{\lambda}$  définie à la proposition 1.1 est donnée par :*

$$(2.11) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

où :

$$(2.12) \quad V_\infty = V \cap L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$$

$\sigma^e$  est la solution du problème élastique (2.8), et  $j_K$  est la jauge du convexe  $K$ .

De plus la charge limite  $\bar{\lambda}$  est indépendante du déplacement imposé  $u_0$  sur  $\Gamma_U$ , et des caractéristiques élastiques du matériau considéré, i.e. de l'opérateur d'élasticité  $A$ . ■

Avant de démontrer ce théorème, nous donnons quelques résultats préliminaires :

### 2.3. Résultats préliminaires

Soit  $H$  la fonctionnelle à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  définie sur  $V$  par :

$$(2.13) \quad H(\eta) = \|j_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et intervenant dans (2.11).

LEMME 2.2 : Soit  $K_{ad}$  le convexe des contraintes plastiquement admissibles défini par

$$(2.14) \quad K_{ad} = \{ \tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{sym}); \tau(x) \in K [dx] \text{ p.p. } x \in \Omega \}.$$

Alors sous l'hypothèse (2.10) la fonctionnelle  $H$ , donnée par (2.13), s'écrit, pour  $\eta \in V$ , sous la forme :

$$(2.15) \quad H(\eta) = j_{K_{ad}}(\sigma^e - \eta)$$

où  $j_{K_{ad}}$  est la fonction jauge du convexe  $K_{ad}$ .

Démonstration :

Soit  $\eta \in V$ . On a :

$$H(\eta) = \|j_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Puisque la fonction jauge prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , on a :

$$H(\eta) = \text{Inf} \{ c > 0 ; j_K((\sigma^e - \eta)(x)) \leq c [dx] \text{ p.p. } x \in \Omega \}.$$

Comme  $K$  et  $K_{ad}$  sont fermés dans  $\mathbb{R}^4_{sym}$  et  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{sym})$  respectivement, alors en utilisant la propriété (ii) d'une fonction jauge d'un convexe, donnée au lemme 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} H(\eta) &= \text{Inf} \{ c > 0 ; (\sigma^e - \eta)(x) \in cK [dx] \text{ p.p. } x \in \Omega \} \\ &= \text{Inf} \{ c > 0 ; (\sigma^e - \eta) \in cK_{ad} \} = j_{K_{ad}}(\sigma^e - \eta), \end{aligned}$$

ce qui prouve (2.15). ■

PROPOSITION 2.1 : Sous les hypothèses (2.7) et (2.10), la fonctionnelle  $H$  définie par (2.13) vérifie :

- (i)  $H$  est convexe et semi continue inférieurement sur  $V$
- (ii)  $\lim_{\|\eta\|_V \rightarrow +\infty} H(\eta) = +\infty$
- (iii) si  $(f, F) \neq (0, 0)$ , alors  $\forall \eta \in V, H(\eta) > 0$ .

Démonstration :

(i) La convexité de  $H$  découle du lemme 2.2 et de la convexité de  $j_{K_{ad}}$ . Montrons que  $H$  est s.c.i :  $K_{ad}$  étant un fermé de  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{sym})$ , alors  $j_{K_{ad}}$  est s.c.i sur  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{sym})$ . Et par suite  $H$  est s.c.i sur  $V$  comme étant la composée d'une fonction s.c.i sur  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{sym})$  et d'une fonction continue sur  $V$  (la fonction qui à  $\eta$  associe  $\sigma^e - \eta$ ).

(ii) Soit  $\eta_n$  une suite d'éléments de  $V$  vérifiant :

$$(2.16) \quad \|\eta_n\|_V \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(\eta_n) \neq +\infty$  Alors il existe une constante  $c > 0$  et une sous suite  $\eta_{n_k}$  de  $\eta_n$  telles que  $H(\eta_{n_k}) \leq c$  Il s'en suit, d'après le lemme 2 1 et le lemme 2 2, que  $\sigma^e - \eta_{n_k} \in cK_{ad}$ , et par conséquent, en utilisant (1 16), le lemme 2 1 et (2 15), on obtient

$$\|\sigma^e - \eta_{n_k}\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^4)} \leq A,$$

où  $A$  est une constante positive

Ainsi la sous suite  $\eta_{n_k}$  est bornée dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^4)$  Ce qui, grâce à (2 6) et (2 10), contredit (2 16) Et par suite (11) est vérifiée

(11) Soit  $(f, F) \neq (0, 0)$  Pour  $\eta$  dans  $V$  défini par (2 5) et grâce à (2 8) et à la propriété (iv) du lemme 2 1, on ne peut jamais avoir

$$(2 17) \quad \sigma^e - \eta = 0$$

Ainsi  $H(\eta)$  est  $> 0$  ■

**THEOREME 2 2** *Sous les hypothèses (2 7) et (2 10) le problème de minimisation*

$$(2 18) \quad \inf_{\eta \in V} \|J_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}$$

*admet au moins une solution*

*Démonstration*

Le résultat est une conséquence directe de la proposition 2 1 et d'un théorème classique d'analyse fonctionnelle [1] ■

**PROPOSITION 2 2** *Sous les hypothèses du théorème 2 2, les solutions du problème de minimisation (2 18) sont dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^4)$ , et on a*

$$(2 19) \quad \inf_{\eta \in V} H(\eta) = \inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta),$$

où  $V_\infty = V \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^4)$

*Il s'en suit que le problème de minimisation  $\inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)$  admet une solution*

*Démonstration* Montrons d'abord (2 19) On a pour tout  $\eta \in V$

$$(2 20) \quad H(\eta) \begin{cases} < +\infty & \text{si } \eta \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^4) \\ = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, comme  $K$  est borné et contient zéro dans son intérieur, alors il existe deux réels strictement positifs  $r_1$  et  $r_2$  tels que

$$B(0, r_1) \subset K \subset B(0, r_2)$$

où  $B(0, r)$  désigne la boule dans  $\mathbb{R}_{\text{sym}}^4$  de centre 0 et de rayon  $r$ . Et par suite, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^4$  :

$$\frac{1}{r_2}|\tau| \leq J_K(\tau) \leq \frac{1}{r_1}|\tau|$$

( $|\cdot|$  désigne la norme de  $\mathbb{R}^4$ ). Il s'en suit que :

$$(2.21) \quad \frac{1}{r_2} \|\sigma^e - \eta\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)} \leq H(\eta) \leq \frac{1}{r_1} \|\sigma^e - \eta\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)}.$$

Le résultat (2.20) découle alors de (2.10) et (2.21), et par suite (2.19) est vérifiée.

Montrons à présent que les solutions du problème de minimisation (2.18) sont dans  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ . Soit pour cela  $(\eta_n) \in V$  une suite minimisante du problème (2.18) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\eta_n) = \inf_{\eta \in V} H(\eta)$$

$H(\eta_n)$  étant bornée, alors d'après la proposition 2.1, la suite  $\eta_n$  est bornée dans  $V$ . Il existe alors une sous suite  $\eta_{n_k}$  de  $\eta_n$  faiblement convergente dans  $V$

$$(2.22) \quad \eta_{n_k} \rightharpoonup \bar{\eta} \quad \text{dans } V \text{ faible}$$

Comme  $H$  est s.c.i. pour la topologie faible de  $V$ , alors  $\bar{\eta}$  est une solution du problème (2.18). D'après (2.10) et (2.21) la sous suite  $\eta_{n_k}$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , elle admet donc une sous suite, encore notée  $\eta_{n_k}$ , qui converge dans  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$  pour la topologie faible étoile :

$$(2.23) \quad \eta_{n_k} \xrightarrow{*} \bar{\eta} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) \text{ faible } *.$$

Utilisant (2.23) et l'injection continue de  $L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$  dans  $L^1(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , on déduit :

$$(2.24) \quad \eta_{n_k} \xrightarrow{*} \bar{\eta} \quad \text{dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) \text{ faible}$$

Comme  $V$  s'injecte continûment dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , alors d'après (2.22) on obtient

$$(2.25) \quad \eta_{n_k} \rightharpoonup \bar{\eta} \quad \text{dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) \text{ faible}$$

Par conséquent  $\bar{\eta} = \overline{\bar{\eta}}$ . Ainsi les solutions de (2.18) sont des éléments de  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$ . Finalement, d'après ce qui précède, le problème  $\inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)$  admet au moins une solution. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.1.

**2.4. Démonstration du théorème 2.1**

Soient

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)}$$

et  $\bar{\lambda}$  la charge limite définie à la proposition 1.1.

i) Soit  $\lambda$  un réel vérifiant  $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ . Montrons que  $\bar{J}_\lambda$  est minorée sur  $BD(\Omega)$ . Il est clair que  $\bar{J}_0$  est minorée sur  $BD(\Omega)$ , car d'après la proposition 1.1,  $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} < 0 < \bar{\lambda}$ . Supposons donc  $\lambda \neq 0$ :  $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$ . D'après le lemme 2.2 et la proposition 2.2, il existe un élément  $\bar{\eta} \in V_\infty$  tel que  $j_{K_{\text{ad}}}(\sigma^e - \bar{\eta}) \leq \frac{1}{\bar{\lambda}}$ . Utilisant le fait que  $j_{K_{\text{ad}}}$  est positivement homogène de degré 1 et que  $K_{\text{ad}}$  est fermé dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$ , on déduit que :

$$\lambda(\sigma^e - \bar{\eta}) \in K_{\text{ad}}.$$

En utilisant (1.18), (2.5) et (2.8), on a  $\lambda(\sigma^e - \bar{\eta}) \in S_{\text{ad}}(\lambda)$ . Ainsi  $S_{\text{ad}}(\lambda) \cap K_{\text{ad}} \neq \emptyset$ , et par suite, d'après le théorème 1.1 et le théorème 1.3, l'énergie potentielle  $\bar{J}_\lambda$  est minorée sur  $BD(\Omega)$ .

Ainsi pour tout  $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ , on a  $\inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}_\lambda(u) > -\infty$ . Il s'en suit, d'après la proposition 1.1, que  $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}$ .

ii) Supposons que  $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}$ . Il existe alors un réel  $\lambda$  vérifiant  $0 < \bar{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$ . On a alors :

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\bar{\lambda}} = \inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)$$

et par suite :

$$(2.27) \quad \frac{1}{\lambda} < j_{K_{\text{ad}}}(\sigma^e - \eta), \quad \forall \eta \in V_\infty.$$

Utilisant le lemme 2.1 et (2.27), on obtient :

$$(2.28) \quad \lambda(\sigma^e - \eta) \notin K_{\text{ad}}, \quad \forall \eta \in V_\infty.$$



Par ailleurs, comme  $\lambda < \bar{\lambda}$  alors  $\bar{J}_\lambda$  est minorée sur  $BD(\Omega)$ . Il existe alors, d'après le théorème 1.1 et le théorème 1.3, un élément  $\sigma \in S_{\text{ad}}(\lambda) \cap K_{\text{ad}}$ . Soit alors  $\bar{\eta} = \sigma^e - \frac{1}{\lambda}\sigma$ . Il est facile de vérifier, d'après (1.16), (1.18), (2.8) et (2.10), que  $\bar{\eta} \in V_\infty$ . En outre, il est clair que  $\lambda(\sigma^e - \bar{\eta}) \in K_{\text{ad}}$ . Ce qui contredit (2.28).

Ainsi la charge limite  $\bar{\lambda}$  définie à la proposition 1.1 est égale à  $\bar{\lambda}$ ; c'est-à-dire que :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)}.$$

iii) Montrons que  $\bar{\lambda}$  est indépendante du déplacement imposé  $u_0$ .

Soient  $\sigma_1^e$  et  $\sigma_0^e$  les solutions des problèmes élastiques (2.29) et (2.30) suivants :

$$(2.29) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma_1^e, u_1^e) \in Y \times U_{\text{ad}} \\ \text{div } \sigma_1^e = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_1^e \nu = 0 & \text{sur } \Gamma_F \\ u_1^e = u_0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_1^e = A^{-1} \varepsilon(u_1^e). \end{cases}$$

$$(2.30) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma_0^e, u_0^e) \in Y \times H_0^1(\Omega)^2 \\ \text{div } \sigma_0^e + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_0^e \nu = F & \text{sur } \Gamma_F \\ u_0^e = 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_0^e = A^{-1} \varepsilon(u_0^e). \end{cases}$$

La solution  $\sigma^e$  du problème (2.8) est alors donnée par :

$$(2.31) \quad \begin{cases} \sigma^e = \sigma_1^e + \sigma_0^e = A^{-1} \varepsilon(u^e) \\ u^e = u_1^e + u_0^e. \end{cases}$$

En rapprochant (2.29) et (2.30) de (2.8), on voit que sous les hypothèses (2.9) et (2.10), les solutions élastiques  $\sigma_0^e$  et  $\sigma_1^e$  sont dans  $L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ . Et par suite, en reportant (2.31) dans (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_1^e + \sigma_0^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}} \\ &= \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_0^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}} , \end{aligned}$$

puisque  $\sigma_1^e \in V_\infty$ . La dernière expression de  $\bar{\lambda}$  est indépendante de  $u_0$ , et par conséquent la charge limite  $\bar{\lambda}$  est indépendante du déplacement imposé  $u_0$ .

Pour finir, montrons que  $\bar{\lambda}$  est indépendante de l'opérateur d'élasticité  $A$ . Soient  $\sigma_1^e$  et  $\sigma_2^e$  les solutions du problème d'élasticité (2.8) pour  $A = A_1$  et  $A = A_2$  respectivement, où  $A$  est l'opérateur d'élasticité. On a :

$$\begin{aligned} \inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_1^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} &= \\ &= \inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_2^e - (\sigma_2^e - \sigma_1^e + \eta))(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

or  $\sigma_2^e - \sigma_1^e \in V_\infty$ , puisque d'une part on a, grâce à l'hypothèse (2.10),  $\sigma_i^e$  ( $i = 1, 2$ ) est dans  $L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , et d'autre part, en vertu de (2.8), on a  $\text{div}(\sigma_2^e - \sigma_1^e) = 0$  dans  $\Omega$ , et  $(\sigma_2^e - \sigma_1^e) \nu = 0$  sur  $\Gamma_F$ . Et par suite on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_1^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}} \\ &= \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma_2^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le théorème 2.1 peut être complété par la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 2.3 : *Sous l'hypothèse (2.7), on a :*

(i) *La charge limite  $\underline{\lambda}$ , définie à la proposition 1.1, est donnée par :*

$$(2.32) \quad \underline{\lambda} = \frac{-1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \|j_K((\sigma^{-e} - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

où  $\sigma^{-e}$  est la solution du problème élastique suivant :

$$(2.33) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma^{-e} + (-f) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma^{-e} \nu = -F & \text{sur } \Gamma_F \\ \bar{u}^{-e} = 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma^{-e} = A^{-1} \varepsilon(u^{-e}) \\ \varepsilon_{ij}(u^{-e}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{-e} + u_{j,i}^{-e}), \quad 1 \leq i, j \leq 2 \end{cases}$$

et est supposée vérifier l'analogue de l'hypothèse (2.10) :

$$(2.34) \quad \sigma^{-e} \in L^\infty(\Omega; IR_{\text{sym}}^4).$$

(ii) L'intervalle  $\lambda$  défini à la proposition 1.1, est l'intervalle fermé :

$$\lambda = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$$

où  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  sont les charges limites définies à la proposition 1.1.

En particulier les énergies potentielles  $\bar{J}_{\underline{\lambda}}$  et  $\bar{J}_{\bar{\lambda}}$ , définies par (1.28), sont minorées sur  $BD(\Omega)$ .

*Démonstration :*

i) Considérons le problème de Hencky suivant :

$$(2.35) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma' + \lambda(-f) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma' \nu = \lambda(-F) & \text{sur } \Gamma_F \\ u' = u_0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma'(x) = P_K(A^{-1} \varepsilon(u'(x))) \quad [dx] p \cdot p. \end{cases}$$

Le problème aux déplacements généralisé, correspondant à (2.35), est donné par :

$$(2.36) \quad \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}'_{\lambda}(u)$$

où :

$$(2.37) \quad \bar{J}'_{\lambda}(u) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon(u)) - \int_{\Gamma_U} \bar{\varphi}_{\infty}(\mathcal{F}(u_0 - u)) d\Gamma - \lambda L'(u)$$

$$(2.38) \quad L'(u) = \int_{\Omega} (-f) \cdot u dx + \int_{\Gamma_F} (-F) \cdot u d\Gamma.$$

En vertu de la proposition 1.1, l'ensemble  $A'$ , défini par :

$$(2.39) \quad A' = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}'_{\lambda}(u) > -\infty \right\}$$

est un intervalle contenant zéro dans son intérieur :

$$(2.40) \quad \text{Inf } A' = \underline{\lambda}'$$

$$(2.41) \quad \text{Sup } A' = \bar{\lambda}'.$$

Sous l'hypothèse (2.9), la solution  $\sigma^{-e}$  du problème élastique (2.33) appartient à  $L^{\infty}(\Omega ; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$ . Utilisant alors le théorème 2.1, on obtient :

$$(2.42) \quad \bar{\lambda}' = \frac{1}{\inf_{\eta \in V_{\infty}} \|j_K((\sigma^{-e} - \eta)(\cdot))\|_{L^{\infty}(\Omega)}}.$$

Par ailleurs, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(2.43) \quad \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}'_{-\lambda}(u) > -\infty \Leftrightarrow \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}_{\lambda}(u) > -\infty$$

où  $\bar{J}_{\lambda}$  et  $\bar{J}'_{-\lambda}$  sont définies par (1.28) et (2.37) respectivement. Il s'en suit que l'intervalle  $A$  définie à la proposition 1.1, et correspondant à l'énergie potentielle  $\bar{J}_{\lambda}$ , vérifie :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}_{\lambda}(u) > -\infty \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \inf_{u \in BD(\Omega)} \bar{J}'_{-\lambda}(u) > -\infty \right\} \\ &= -A'. \end{aligned}$$

Et par suite, d'après (2.42), la charge limite  $\underline{\lambda}$  définie à la proposition 1.1 est donnée par :

$$\underline{\lambda} = \text{Inf } A = - \text{Sup } A' = \frac{-1}{\inf_{\eta \in V_{\infty}} \|j_K((\sigma^{-e} - \eta)(\cdot))\|_{L^{\infty}(\Omega)}}.$$

ii) La nouvelle caractérisation de la charge limite  $\bar{\lambda}$ , donnée par le théorème 2.1, nous permet de montrer que l'énergie potentielle  $\bar{J}_{\lambda}$  est minorée sur  $BD(\Omega)$  (cf. la partie i) de la démonstration du théorème 2.1), c'est-à-dire que  $\bar{\lambda} \in A$ .

Les mêmes développements détaillés ci-dessus (§ 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4), permettent aussi de prouver que l'énergie potentielle  $\bar{J}_{\underline{\lambda}}$  est minorée sur  $BD(\Omega)$ , et donc  $\underline{\lambda} \in A$ .

Par ailleurs, on a, d'après la proposition 1.1 :

$$]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[ \subset A \subset [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}],$$

et par conséquent  $A = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ . ■

### 3. CALCUL DES CHARGES LIMITES PAR UNE MÉTHODE DE RÉGULARISATION

Dans la section précédente, nous avons donné deux expressions explicites des charges limites  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  d'une structure élastoplastique régie par le modèle de Hencky en contraintes planes.

Notons  $H$  la fonctionnelle convexe définie par :

$$(3.1) \quad H(\eta) = \|j_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)}$$

qui intervient dans l'expression (2.11) de la charge limite  $\bar{\lambda}$ .

La fonctionnelle  $H$  définie par (3.1) n'est pas différentiable. Ceci est dû à la présence de la norme  $\| \cdot \|_{L^\infty}$  dans son expression. Or les algorithmes classiques d'optimisation nécessitent la régularité de la fonctionnelle à optimiser. C'est pour cette raison que nous proposons de régulariser la fonctionnelle  $H$  en remplaçant la norme  $L^\infty$  par la norme  $L^q$ , l'espace  $V_\infty$  par l'espace  $V_q$  qui sera défini par (3.4), et en faisant tendre  $q$  vers l'infini. Cette méthode de régularisation s'apparente à celle utilisée dans les travaux de FRIAA [7] pour le matériau de Norton-Hoff généralisé.

#### 3.1. Régularisation du problème

Nous définissons, pour  $q \in [2, +\infty[$ , la fonctionnelle suivante, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$(3.2) \quad H_q(\eta) = \frac{1}{(\text{mes}(\Omega))^{1/q}} \|j_K((\sigma^e - \eta)(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}, \quad \eta \in L^q(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$$

où

$$\text{mes}(\Omega) = \int_{\Omega} dx.$$

Rappelons que l'on se place sous les hypothèses (2.7), (2.9) et que la solution élastique  $\sigma^e$  du problème (2.8) vérifie :

$$(3.3) \quad \sigma^e \in L^\infty(\Omega ; IR_{\text{sym}}^4)$$

et par suite, grâce à (2.7),  $H_q$  est finie sur  $L^q(\Omega ; IR_{\text{sym}}^4)$ .

Nous considérons, pour  $q \geq 2$ , l'espace de Banach  $V_q$  défini par .

$$(3.4) \quad V_q = V \cap L^q(\Omega , IR_{\text{sym}}^4)$$

muni de la norme induite par celle de  $L^q(\Omega ; IR_{\text{sym}}^4)$

$$(3.5) \quad \| \cdot \|_{V_q} = \| \cdot \|_{L^q(\Omega , IR_{\text{sym}}^4)}$$

$\| \cdot \|_{L^q(\Omega , IR_{\text{sym}}^4)}$  étant la norme classique de  $L^\infty(\Omega , IR_{\text{sym}}^4)$ ,

et la suite de problèmes de minimisation régularisés suivants :

$$(3.6) \quad \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta)$$

où  $H_q$  est la fonctionnelle définie par (3.2).

Avant de préciser le sens de la régularisation, qui sera donné au § 3.3, nous donnons quelques résultats nécessaires à cette étude.

### 3.2. Résultats préliminaires

Pour montrer l'existence de solutions des problèmes de minimisation (3.6), nous énonçons la

**PROPOSITION 3.1 :** *Soit  $q \geq 2$ . Sous les hypothèses (2.7) et (3.3), la fonctionnelle  $H_q$  est convexe et lipschitzienne, donc continue, sur  $L^q(\Omega ; IR_{\text{sym}}^4)$ . De plus, elle vérifie .*

$$(3.7) \quad \lim_{\|\eta\|_{V_q} \rightarrow +\infty} H_q(\eta) = +\infty$$

*Démonstration :* Soit  $q \geq 2$ .

1) La convexité de  $H_q$  découle de la convexité et la positivité de la fonction jauge  $J_K$  et de la convexité de la norme  $\| \cdot \|_{L^q(\Omega)}$ .

Montrons que  $H_q$  est lipschitzienne sur  $L^q(\Omega ; IR_{\text{sym}}^4)$  :

Utilisant la sous-additivité de  $J_K$ , et le fait que le convexe  $K$  contient l'origine dans son intérieur, on obtient :

$$(3.8) \quad \forall \tau, \xi \in IR_{\text{sym}}^4 \quad |J_K(\tau) - J_K(\xi)| \leq \alpha |\tau - \xi|_{IR_{\text{sym}}^4},$$

où  $\alpha$  est une constante positive, et  $\|\cdot\|_{IR_{\text{sym}}^4}$  est la norme de  $IR_{\text{sym}}^4$ .

Il s'en suit grâce à (3.2) et (3.5) que  $H_q$  est lipschitzienne et donc continue sur  $L^q(\Omega; IR_{\text{sym}}^4)$ .

ii) Soit  $\eta_n$  une suite d'éléments de  $V_q$  vérifiant :

$$(3.9) \quad \|\eta_n\|_{V_q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_q(\eta_n) \neq +\infty$ . Il existe alors une constante  $A > 0$  et une sous suite  $\eta_{n_k}$  de  $\eta_n$  telles que :

$$\frac{1}{(\text{mes}(\Omega))^{1/q}} \|j_k((\sigma^e - \eta_{n_k})(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \leq A,$$

et par suite, puisque  $K$  est borné dans  $IR_{\text{sym}}^4$ , on a :

$$(3.10) \quad \|\sigma^e - \eta_{n_k}\|_{L^q(\Omega; IR_{\text{sym}}^4)} \leq C(\text{mes}(\Omega))^{1/q}$$

où  $C$  est une constante positive.

On en déduit, grâce à (3.3) que :

$$\|\eta_{n_k}\|_{V_q} \leq C' \quad \text{où } C' \text{ est une constante positive.}$$

Ce qui contredit (3.9). Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_q(\eta_n) = +\infty$ . ■

**THÉORÈME 3.1 :** Soit  $q \geq 2$ . Sous les hypothèses (2.7) et (3.3), le problème de minimisation :

$$(3.11) \quad \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta),$$

admet au moins une solution. On notera  $\bar{\eta}_q$  l'une des solutions.

*Démonstration :*

i) Soit  $\eta_n$  une suite minimisante pour le problème (3.11) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_q(\eta_n) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta)$$

$H_q(\eta_n)$  étant bornée dans  $IR_+$ , alors d'après la proposition 3.1,  $\eta_n$  est bornée dans  $V_q$  et par suite, d'après (3.5), elle est bornée dans  $L^q(\Omega; IR_{\text{sym}}^4)$ . Il existe alors une sous suite  $\eta_{n_k}$  de  $\eta_n$  faiblement convergente dans  $L^q(\Omega; IR_{\text{sym}}^4)$  :

$$(3.12) \quad \eta_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} \bar{\eta}_q \quad \text{dans } L^q(\Omega; IR_{\text{sym}}^4) \text{ faible.}$$

Par ailleurs, comme  $H_q$  est convexe et continue sur  $L^q(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , alors elle est faiblement s.c.i. sur  $L^q(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , et par suite, grâce à (3.12), on obtient :

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \text{Inf } H_q(\eta_{n_k}) \geq H_q(\bar{\eta}_q).$$

Pour que  $\bar{\eta}_q$  soit solution de (3.11), il reste à montrer que  $\bar{\eta}_q \in V$ .

ii) Soit  $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^2$ ; en utilisant (3.12) et la définition de la dérivation au sens des distributions, on obtient :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\eta_{n_k}) \cdot \varphi \, dx \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \text{div}(\bar{\eta}_q) \cdot \varphi \, dx$$

et comme  $\text{div } \eta_{n_k} = 0$  dans  $\Omega$ , alors  $\text{div } \bar{\eta}_q = 0$ .

La propriété  $q \geq 2$  et le fait que  $\Omega$  est borné permettent alors d'affirmer que  $\eta_{n_k}$  converge faiblement dans  $Y$  vers  $\bar{\eta}_q$ . L'espace  $V$  étant un convexe fermé de  $Y$  et donc faiblement fermé dans  $Y$ , il en découle que  $\bar{\eta}_q \in V$ . ■

### 3.3. Résultats de convergence

Considérons la suite réelle  $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  définie par :

$$(3.13) \quad \bar{\lambda}_q = \frac{1}{\text{Inf}_{\eta \in V_q} H_q(\eta)}, \quad q \geq 2.$$

Nous allons montrer dans cette section la convergence de cette suite de réels  $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  vers la charge limite  $\bar{\lambda}$ , donnée d'après le théorème 2.1 par :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\text{Inf}_{\eta \in V_\infty} H(\eta)},$$

où  $H$  est la fonctionnelle convexe définie par (3.1), et  $V_\infty$  l'espace donné par (2.12).

Et nous montrons, en particulier, que la suite des solutions  $(\bar{\eta}_q)_{q \geq 2}$  des problèmes de minimisation (3.11) admet des sous-suites qui convergent, suivant une certaine topologie, qu'on précisera au théorème 3.2, vers une solution du problème :

$$(3.14) \quad \text{Inf}_{\eta \in V_\infty} H(\eta).$$



LEMME 3 1 *Sous les hypothèses (2 7) et (3 3), la suite  $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  définie par (3 13) est décroissante, convergente, et sa limite, notée  $\bar{\lambda}$  vérifie*

$$(3 15) \quad \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}_q$$

où  $\bar{\lambda}$  est la charge limite donnée par (2 11)

*Démonstration* Partant de l'inégalité de Holder on obtient

$$(3 16) \quad \| \cdot \|_{L^p(\Omega)} \leq (\text{mes}(\Omega))^{1/p - 1/q} \| \cdot \|_{L^q(\Omega)}, \quad p \leq q$$

d'où l'on tire que

$$(3 17) \quad \begin{cases} \forall \eta \in V_{q+1} & H_q(\eta) \leq H_{q+1}(\eta) \\ \forall \eta \in V_\infty & H_q(\eta) \leq H(\eta) \end{cases}$$

Utilisant (3 17) et le fait que  $V_\infty \subset V_{q+1} \subset V_q$ , il est facile de vérifier que

$$0 < \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_{q+1} \leq \bar{\lambda}_q$$

Il s'en suit que la suite  $\bar{\lambda}_q$  est convergente, et que sa limite  $\bar{\lambda}$  est supérieure à  $\bar{\lambda}$  ■

Avant de montrer au théorème 3 2 que  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}$ , nous donnons la

PROPOSITION 3 2 *Sous les hypothèses (2 7) et (3 3), la suite  $(\bar{\eta}_q)_{q \geq 2}$  des solutions  $\bar{\eta}_q$  des problèmes de minimisation (3 11), données par le théorème 3 1*

$$(3 18) \quad H_q(\bar{\eta}_q) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta), \quad q \geq 2$$

vérifie

$$(3 19) \quad \begin{cases} \exists R > 0 \text{ tel que } \forall q \geq 2, \text{ on a} \\ \|\bar{\eta}_q\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})} \leq \rho_q \\ \text{où } \rho_q = \frac{R \text{mes}(\Omega)^{1/q}}{\bar{\lambda}_q} + \|\sigma^e\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})} \end{cases}$$

En outre, il existe un élément  $\bar{\eta} \in V_\infty$  tel que pour tout  $n > 1$ ,  $\bar{\eta}$  est limite dans  $L^n(\Omega, \mathbb{R}^4_{\text{sym}})$  faible d'une sous-suite  $(\eta'_q)_{q \geq n}$  de la suite  $(\eta_q)_{q \geq 2}$  et

$$(3 20) \quad \|\bar{\eta}\|_{L^n(\Omega; \mathbb{R}^4_{\text{sym}})} \leq \rho,$$

où  $\rho = \frac{R}{\bar{\lambda}} + \|\sigma^e\|_{L^\infty(\Omega; IR^4_{sym})}$  est la limite de  $\rho_q$ ;  $\bar{\lambda}$  étant donné par le lemme 3.1.

*Démonstration :*

i) Nous rappelons le résultat suivant qui est un cas particulier d'un lemme donné dans Friaâ ([7], p. 130) :

LEMME 3.2 : [7] Soient deux suites  $(h_q)_{q \geq 2}$  et  $(\alpha_q)_{q \geq 2}$ , vérifiant :

(1)  $\forall q \geq 2, \alpha_q \in IR$  et  $\alpha_q \rightarrow \alpha$  quand  $q \rightarrow +\infty$

(2)  $\forall q \geq 2, h_q \in L^q(\Omega; IR^4_{sym})$  et  $\|h_q\|_{L^q(\Omega; IR^4_{sym})} \leq \alpha_q$ .

Il existe alors  $h \in L^\infty(\Omega; IR^4_{sym})$  tel que  $\forall n > 1, h$  est limite dans  $L^n(\Omega; IR^4_{sym})$  faible d'une sous-suite  $(h_{q'})_{q' \geq n}$  de la suite  $(h_q)_{q \geq 2}$ , de plus

$$(3.21) \quad \|h\|_{L^\infty(\Omega; IR^4_{sym})} \leq \alpha.$$

ii) On a pour tout  $q \geq 2, \bar{\eta}_q \in V_{q'}$ . Comme  $K$  est borné dans  $IR^4_{sym}$ , alors il existe un réel  $R > 0$  tel que  $K \subset B(0, R)$ , où  $B(0, R)$  est la boule dans  $IR^4_{sym}$  de centre 0 et de rayon  $R$ . Ainsi la jauge de  $K$  vérifie :  $J_K(\cdot) \geq \frac{1}{R} |\cdot|_{IR^4_{sym}}$ . Et par suite, grâce à (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\|\bar{\eta}_q\|_{L^q(\Omega; IR^4_{sym})} \leq R(\text{mes}(\Omega))^{1/q} H_q(\bar{\eta}_q) + \|\sigma^e\|_{L^q(\Omega; IR^4_{sym})}.$$

Il s'en suit, grâce à (3.13) et (3.18), que :

$$\|\bar{\eta}_q\|_{L^q(\Omega; IR^4_{sym})} \leq \rho_q$$

où :

$$\rho_q = \frac{R(\text{mes}(\Omega))^{1/q}}{\bar{\lambda}_q} + \|\sigma^e\|_{L^q(\Omega; IR^4_{sym})}.$$

Ainsi (3.19) est vérifiée.

Par ailleurs, comme  $\Omega$  est borné, alors en vertu de (3.3) et du lemme 3.1, la suite  $\rho_q$  est convergente. Sa limite, notée  $\rho$ , est donnée par :

$$(3.22) \quad \rho = \lim_{q \rightarrow +\infty} \rho_q = \frac{R}{\bar{\lambda}} + \|\sigma^e\|_{L^\infty(\Omega; IR^4_{sym})}.$$

iii) Grâce à la deuxième partie de la démonstration et au lemme 3.2, il existe un élément  $\bar{\eta}$  dans  $L^\infty(\Omega; IR^4_{sym})$  tel que, pour tout  $n > 1$ , on a :

$$(3.23) \quad \bar{\eta}_{q'} \xrightarrow{q' \rightarrow +\infty} \bar{\eta} \text{ dans } L^n(\Omega; IR^4_{sym}) \text{ faible,}$$

où :

$$(3.24) \quad (\bar{\eta}_{q'})_{q' \geq n} \text{ est une sous-suite de la suite } (\bar{\eta}_q)_{q \geq 2}.$$

En outre on a

$$(3.25) \quad \|\bar{\eta}\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)} \leq \rho.$$

iv) Il reste à montrer que  $\bar{\eta} \in V_\infty$ . On sait déjà que  $\bar{\eta} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ , la suite de la démonstration est analogue à la partie ii) de la démonstration du théorème 3.1. ■

**THÉORÈME 3.2 :** *Sous les hypothèses (2.7) et (3.3), on a les résultats suivants :*

i) Soient  $\bar{\lambda}$  la charge limite donnée par (2.11) et  $\bar{\lambda}_q$  la suite de réels définie par (3.13), alors on a :

$$\bar{\lambda} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}_q.$$

ii) En outre, l'élément  $\bar{\eta} \in V_\infty$  défini à la proposition 3.2, est une solution du problème de minimisation (3.14), c'est-à-dire que :

$$(3.26) \quad H(\bar{\eta}) = \inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta).$$

*Démonstration :*

i) On sait déjà, d'après le lemme 3.1, que :

$$(3.27) \quad \bar{\lambda} \leq \bar{\bar{\lambda}} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}_q.$$

Montrons que  $\bar{\lambda} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ . Soit  $(\bar{\eta}_q)_{q \geq 2}$  la suite de solutions des problèmes de minimisation (3.11), données par le théorème 3.1 :

$$(3.28) \quad H_q(\bar{\eta}_q) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta) = \frac{1}{\bar{\lambda}_q}.$$

Alors, d'après la proposition 3.2, il existe  $\bar{\eta} \in V_\infty$ , tel que pour tout  $n > 1$ , il existe une sous-suite  $(\bar{\eta}_{q'})_{q' \geq n}$  de  $(\bar{\eta}_q)_{q \geq 2}$  faiblement convergente vers  $\bar{\eta}$  dans  $L^n(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4)$ . Et par suite, sous l'hypothèse (3.3), on obtient :

$$(3.29) \quad \sigma^\varepsilon - \bar{\eta}_{q'} \xrightarrow{q' \rightarrow +\infty} \sigma^\varepsilon - \bar{\eta} \text{ dans } L^n(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) \text{ faible.}$$

Par ailleurs, d'après (3.8), la fonctionnelle convexe :

$$\begin{aligned} L^n(\Omega ; \mathbb{R}_{\text{sym}}^4) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \tau &\rightarrow \|j_K(\tau(\cdot))\|_{L^n(\Omega)} \end{aligned}$$

est continue, et par suite, elle est faiblement s.c.i.. Il s'en suit, en utilisant (3.29), que :

$$\liminf_{q' \rightarrow +\infty} \|j_K((\sigma^e - \bar{\eta}_{q'}) (\cdot))\|_{L^n(\Omega)} \geq \|j_K((\sigma^e - \bar{\eta}) (\cdot))\|_{L^n(\Omega)}.$$

En outre, grâce à (3.17), et puisque  $q' \geq n$ , on obtient en utilisant (3.2), (3.13) et (3.30) :

$$(3.31) \quad (\text{mes}(\Omega))^{1/n} \liminf_{q' \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_{q'}} \geq \|j_K((\sigma^e - \bar{\eta}) (\cdot))\|_{L^n(\Omega)}.$$

Utilisant le lemme 3.1, on obtient pour tout  $n > 1$  :

$$(\text{mes}(\Omega))^{1/n} \frac{1}{\lambda} \geq \|j_K((\sigma^e - \bar{\eta}) (\cdot))\|_{L^n(\Omega)}.$$

Faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient, d'après (2.7), (3.1), (3.3), et le théorème 2.1 :

$$(3.32) \quad \frac{1}{\bar{\lambda}} \geq \|j_K((\sigma^e - \bar{\eta}) (\cdot))\|_{L^\infty(\Omega)} = H(\bar{\eta}) \geq \frac{1}{\lambda}$$

puisque  $\bar{\eta} \in V_\infty$ . Ainsi  $\bar{\lambda} \geq \bar{\bar{\lambda}}$ . Finalement  $\bar{\lambda} = \bar{\bar{\lambda}}$ .

ii) Il découle de (3.32) et de l'égalité de  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\bar{\lambda}}$  que  $H(\bar{\eta}) = 1 / \bar{\lambda}$ . D'après la proposition 3.2,  $\bar{\eta} \in V_\infty$ . Ainsi grâce à (3.1) et au théorème 2.1,  $\bar{\eta}$  est solution de (3.14). ■

Les mêmes développements détaillés ci-dessus (§ 3.1, § 3.2 et § 3.3) permettent aussi de prouver le résultat suivant, concernant la charge limite  $\underline{\lambda}$ , donnée à la proposition 2.3 par (2.32).

PROPOSITION 3.3 : Soit  $(\underline{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  la suite réelle définie par :

$$\underline{\lambda}_q = \frac{-1}{\inf_{\eta \in V_q} \{ (\text{mes}(\Omega))^{-1/q} \|j_K((\sigma^e - \eta) (\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \}}$$

où  $\sigma^{-e}$  est la solution du problème élastique (2.8), en remplaçant les chargements externes  $f$  et  $F$  par  $-f$  et  $-F$  respectivement.

Alors sous les hypothèses (2.7) et (2.34), la suite  $(\underline{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  est convergente, et sa limite est donnée par :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \underline{\lambda}_q = \underline{\lambda}$$

où la charge limite  $\underline{\lambda}$  est donnée par (2.32). ■

#### 4. CONCLUSION

Le théorème 2.1 (resp. la proposition 2.3) donne une nouvelle caractérisation de la charge limite  $\bar{\lambda}$  (respectivement  $\underline{\lambda}$ ) qui se prête mieux à l'approximation numérique que la caractérisation donnée à la proposition 1.1.

Cette nouvelle caractérisation de la charge limite  $\bar{\lambda}$  (respectivement  $\underline{\lambda}$ ), donnée par (2.11) (respectivement (2.32)) au théorème 2.1 (resp. à la proposition 2.3), consiste à résoudre un problème de minimisation convexe. Le fait que la fonctionnelle à minimiser n'est pas différentiable (ceci est dû à la présence de la norme  $L^\infty$  dans son expression) nous a amené à la régulariser en remplaçant la norme  $L^\infty$  par la norme  $L^q$ , qui est numériquement plus facile à calculer, différentiable, sauf en zéro, et admet des dérivées directionnelles en tout point.

La fonctionnelle  $H_q$  donnée par (3.2) est plus régulière que la fonctionnelle  $H$  donnée par (3.1) qui intervient dans l'expression de  $\bar{\lambda}$ , bien que sa régularité dépende de celle de la fonction jauge du convexe d'élasticité  $K$ .

En particulier, dans le cas où le convexe  $K$  est le convexe de Von-Mises, la fonctionnelle  $H_q$  est différentiable en tout point de  $V_q$  défini par (3.4) et (2.5), puisque  $\sigma^e - \eta \neq 0$  pour  $\eta \in V_q$ , car d'après (2.8)  $\sigma^e \notin V_q$  dès que le chargement  $(f, F) \neq (0, 0)$ .

Ainsi le calcul de la charge limite  $\bar{\lambda}$  (respectivement  $\underline{\lambda}$ ) se ramène à calculer la limite de la suite monotone de réels  $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  définie par (3.13) (respectivement  $(\underline{\lambda}_q)_{q \geq 2}$  définie par (3.33)), où chaque terme  $\bar{\lambda}_q$  (respectivement  $\underline{\lambda}_q$ ) est donné par un problème de minimisation convexe.

Un algorithme numérique pour calculer  $\bar{\lambda}$  (respectivement  $\underline{\lambda}$ ), en utilisant l'approximation  $\bar{\lambda}_q \approx \bar{\lambda}$  (respectivement  $\underline{\lambda}_q \approx \underline{\lambda}$ ) pour  $q$  assez grand, a été mis en œuvre. Les premiers résultats numériques obtenus sont prometteurs.

#### RÉFÉRENCES

- [1] H. BREZIS, 1983, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Ed. Masson, Paris.

- [2] H. BEN DHIA, 1987, *Etude mathématique et approximation par une méthode d'éléments finis discontinus d'un problème de Hencky*, Thèse de Doctorat, Paris 6.
- [3] H. BEN DHIA, T. HADHRI, 1989, Existence result and discontinuous finite element discretization for a plane stresses Hencky problem, in *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, **11**, pp. 169-184.
- [4] E. CHRISTIANSEN, 1986, On the collapse solution in limit analysis, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **91**, n° 2, pp. 119-135.
- [5] F. DEMENGEL, 1986, *Fonctions convexes de mesure et problèmes variationnels. Applications en mécanique non linéaire (élasticité, plasticité)*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris sud, Orsay.
- [6] H. EL FEKIH, T. HADHRI, 1993, *Une méthode de régularisation pour calculer les charges limites d'une structure élastoplastique*, R.I. n° 275, CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [7] A. FRIAA, 1979, *La loi de Norton-hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6.
- [8] T. HADHRI, 1985, Fonction convexe d'une mesure, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **301**, Série I, n° 13, pp. 687-690.
- [9] T. HADHRI, 1985, Etude dans  $HB \times BD$  d'un modèle de plaques élastoplastiques comportant une non-linéarité géométrique, *RAIRO*, **19**, n° 2, pp. 235-283.
- [10] T. HADHRI, 1986, *Présentation et analyse mathématique et numérique de quelques modèles pour des structures élastoplastiques homogènes ou hétérogènes*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6.
- [11] T. HADHRI, 1986, *Convex function of a measure and application to a problem of nonhomogeneous elastoplastic material*, R.I. n° 140, CMAP, Ecole Polytechnique.
- [12] H. MATTIES, G. STRANG E. CHRISTIANSEN, 1979, The saddle point of a differential program, dans *Energy methods in finite element analysis*, R. GLOWINSKI, E. RODIN, O. C. ZIENKIEWICZ Ed., John Wiley, New-York.
- [13] B. MERCIER, 1977, *Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de plasticité*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6.
- [14] L. SCHWARTZ, 1978, *Analyse hilbertienne*, Ed. Herman, Paris.
- [15] P. SUQUET, 1978, Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la plasticité, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **286**, Série A, pp. 1129-1132.
- [16] R. TEMAM, 1983, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Ed. Gauthier-Villars, Paris.
- [17] R. TEMAM, G. STRANG, 1980, Duality and relaxation in the variational problems of plasticity. *J. Mécanique*, **19**, pp. 493-527.
- [18] R. TEMAM, 1982, Approximation de fonctions convexes sur un espace de mesures et applications, *Cand. Math. Bull.*, **25**, 1982.