

V. LODS

**Formulation mixte d'un problème de jonctions
de poutres adaptée à la résolution d'un
problème d'optimisation**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 26, n° 4 (1992), p. 523-553

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_4_523_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



FORMULATION MIXTE D'UN PROBLÈME DE JONCTIONS DE POUTRES ADAPTÉE A LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION (*)

V. LODS (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — En utilisant une formulation mixte, on peut calculer la dérivée exacte d'une fonctionnelle coût j , dépendant régulièrement du déplacement d'un assemblage de deux poutres minces, reliées par une charnière rigide, la variable de conception étant l'angle ϕ entre les deux poutres. A l'aide d'un code éléments finis considéré comme une boîte noire, on calcule une approximation, dite gradient continu discrétisé, de la dérivée de j . On démontre l'égalité du gradient continu discrétisé avec le gradient discret, c'est-à-dire le gradient de la fonctionnelle approchée, calculé par les ingénieurs, pour un schéma éléments finis particulier, mais très usuel. Les résultats numériques sont proches de la solution analytique, calculée dans un cas particulier.

Abstract. A mixed formulation for a model of junctions of beams adapted to the resolution of an optimization problem. — By writing a mixed formulation for a model of junctions of beams with a rigid hinge, we can calculate the derivative of costs, which are regular functions of the displacement. The design variable is the angle ϕ between the two beams. With a finite element code, used as a black box, we calculate an approximation of the derivative of the cost, called discretized continuous gradient, which, for a particular code in common use, is equal to the discrete gradient, used by ingeneers. Numerical results are good approximations of the analytical solution, calculated in a particular case.

INTRODUCTION

L'objet de cet article se situe dans le cadre général de l'optimisation de formes, utilisant les techniques classiques de contrôle optimal. Il s'agit de minimiser une fonctionnelle coût, dépendant de U , où U est la solution d'une équation aux dérivées partielles, dont les coefficients sont fonction de la variable de conception.

(*) Reçu en décembre 1990.

(1) Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France.

On envisage d'utiliser des méthodes de descente. Pour cela, on doit faire un calcul numérique de la différentielle du coût. Pour approcher cette différentielle, deux méthodes sont susceptibles de fournir de bons résultats :

La première méthode est utilisée par les ingénieurs. Les équations d'état et la fonctionnelle sont d'abord discrétisées. On calcule ensuite le gradient de la fonctionnelle du problème discret correspondant. Ce gradient est dit « gradient discret ». Cette méthode utilise des notions mathématiques simples.

La deuxième méthode a été élaborée par les mathématiciens. On calcule d'abord la différentielle exacte du problème, qui fait intervenir l'état direct, l'état adjoint et la géométrie. On en déduit ensuite une approximation de la différentielle exacte, approximation dite « gradient continu discrétisé ».

L'avantage de cette méthode, détaillée dans [6], est d'éviter d'avoir à réécrire le logiciel du calcul du gradient si on change de discrétisations. Par contre, les résultats classiques de convergence des algorithmes de descente ne sont établis que pour des directions de descente égales au gradient de la fonctionnelle approchée, ce qui n'est pas assuré a priori dans la technique du gradient continu discrétisé et qui l'est pour le gradient discret.

Cependant, lorsque le « gradient continu discrétisé » et le « gradient discret » sont égaux, le gradient continu discrétisé conserve ses avantages et, de plus, on est assuré de la convergence de l'algorithme d'optimisation. Mais, si les deux méthodes donnent des résultats différents, il faudra choisir entre les deux techniques. On s'intéressera donc à l'égalité entre le gradient discret et le gradient continu discrétisé obtenu à l'aide des mêmes schémas que ceux utilisés dans la méthode discrète.

On traite ici le cas particulier d'un assemblage de deux poutres, considérées comme des structures minces et étudiées sous le modèle de Koiter. Les deux poutres sont reliées par une charnière rigide et font entre elles un angle ϕ , qui est la variable de conception. Soumises à un chargement, un déplacement apparaît. Ce déplacement, qui dépend de ϕ , vérifie une équation variationnelle elliptique. L'espace des fonctions tests associé à cette équation dépend de la variable de conception, nous ne pouvons donc pas appliquer directement les résultats classiques de contrôle optimal. Il faudra contourner cette difficulté. Par contre, numériquement ce problème d'optimisation peut se résoudre naturellement en utilisant une méthode d'éléments finis car le vecteur de degré de liberté appartient à \mathbb{R}^n , espace indépendant de ϕ .

Nous allons d'abord ici étudier le problème de minimisation continu. Afin d'utiliser les techniques classiques de contrôle optimal, nous écrivons l'équation d'équilibre précédente sous la forme d'un problème variationnel associé à un espace indépendant de ϕ , ce qui permet d'étudier la variation du déplacement en ϕ dans cet espace. La formulation variationnelle à laquelle on aboutit est de type mixte. Le théorème des fonctions implicites

assure alors des résultats de régularité sur le déplacement, desquels découle l'existence d'un minimum, ainsi que la possibilité d'utiliser un algorithme de gradient.

Nous allons ensuite nous servir d'un schéma éléments finis particulier mais très usuel pour calculer le gradient discret et le gradient continu discrétisé. Ce schéma éléments finis étant conforme en déplacements, nous démontrons l'égalité entre le gradient continu discrétisé et le gradient discret. Ici, le gradient continu discrétisé présente l'avantage d'être très simple à implémenter.

Enfin, pour valider nos tests numériques, nous explicitons la solution exacte dans un cas test.

Dans le premier paragraphe, nous rappelons d'abord l'équation d'équilibre d'un assemblage de deux poutres liées par une charnière rigide. Comme l'espace des fonctions tests associé à cette équation dépend de ϕ , nous écrivons cette équation sous la forme d'un problème mixte bien adapté, c'est-à-dire sous la forme d'un système de deux équations variationnelles posées sur des espaces indépendants de ϕ . Nous établissons alors l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions le problème de minimisation continu et nous déterminons en particulier l'expression de la dérivée exacte de la fonctionnelle coût j .

Dans le troisième paragraphe, nous détaillons le code éléments finis, qui nous fournit une approximation du déplacement des deux poutres.

Dans les paragraphes quatre et cinq, nous calculons le gradient continu discrétisé et nous le comparons au gradient discret.

Dans le paragraphe six, nous déterminons d'abord la solution analytique dans un cas particulier, puis nous présentons nos résultats numériques.

NOTATIONS

1) Si A et B désignent des espaces hilbertiens, alors :

$BL(A, B)$ désigne l'espace des formes bilinéaires continues définies sur $A \times B$.

$L(A, B)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de A vers B .

A^* représente le dual de A .

2) Toute notation soulignée d'un trait $_$ représente un vecteur du plan euclidien, comme par exemple le vecteur force : \underline{f} .

Le produit scalaire euclidien et la norme associée dans le plan sont notées $\langle \underline{E}, \underline{v} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ et $\|\underline{E}\|_{\mathbb{R}^2}$, de même dans l'espace en remplaçant le plan \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^3 .

3) On introduit les intervalles $I = [0, l]$ et $\tilde{I} = [l, L]$ de \mathbb{R} et on pose :

$$\mathbf{V} = \left\{ v = (v_1, v_2) \in H^1(I) \times H^2(I), v_1(0) = v_2(0) = \frac{dv_2}{ds}(0) = 0 \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left\{ \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in H^1(\tilde{I}) \times H^2(\tilde{I}), \tilde{v}_1(L) = \tilde{v}_2(L) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(L) = 0 \right\}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \times \tilde{\mathbf{V}}.$$

On désigne par les lettres $V = (v, \tilde{v})$, U , W les éléments de \mathbf{v} .

Le produit scalaire sur \mathbf{v} est noté \langle , \rangle et la norme associée $\| \cdot \|$.

4) Soit (a_i) une subdivision régulière de m points de I de pas h . On note :

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{h1} \times \mathbf{V}_{h2}$$

où : \mathbf{V}_{h1} est l'ensemble des fonctions v_{h1} telles que :

- 1) $v_{h1} \in C^0(I)$.
- 2) La restriction de v_{h1} à $[a_i, a_{i+1}]$ appartient à $P_1([a_i, a_{i+1}])$, pour $i = 0, \dots, m-1$.
- 3) v_{h1} est définie par ses valeurs aux nœuds a_i , $i = 0, \dots, m$.
- 4) $v_{h1}(0) = 0$.

et \mathbf{V}_{h2} est l'ensemble des fonctions v_{h2} telles que :

- 1) $v_{h2} \in C^1(I)$.
- 2) La restriction de v_{h2} à $[a_i, a_{i+1}]$ appartient à $P_3([a_i, a_{i+1}])$.
- 3) v_{h2} est définie par ses valeurs et par les valeurs de sa dérivée première aux nœuds a_i , pour $i = 0, \dots, m$.
- 4) $v_{h2}(0) = \frac{dv_{h2}}{ds}(0) = 0$.

De même, on définit $\tilde{\mathbf{V}}_h = \tilde{\mathbf{V}}_{h1} \times \tilde{\mathbf{V}}_{h2}$ inclus dans $\tilde{\mathbf{V}}$.

$$5) \mathbf{v}_h = \mathbf{V}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

On désigne par les lettres $V_h = (v_h, \tilde{v}_h)$, U_h , W_h les éléments de \mathbf{v}_h .

6) A tout ϕ et h de \mathbb{R} sont associés les espaces :

ω_ϕ des fonctions $V = (v, \tilde{v})$ de \mathbf{v} , telles que :

$$v_1(l) = \cos(\phi) \tilde{v}_1(l) - \sin(\phi) \tilde{v}_2(l)$$

$$v_2(l) = \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) + \cos(\phi) \tilde{v}_2(l)$$

$$\frac{dv_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l)$$

$$\omega_{h\phi} = \omega_\phi \cap \mathbf{v}_h.$$

7) On introduit l'opérateur :

$$B(\phi) : V \rightarrow \mathbb{R}^3 :$$

$$V \rightarrow B(\phi) V = \begin{bmatrix} v_1(l) - \cos(\phi) \tilde{v}_1(l) + \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) \\ v_2(l) - \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) - \cos(\phi) \tilde{v}_2(l) \\ \frac{dv_2}{ds}(l) - \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l) \end{bmatrix}$$

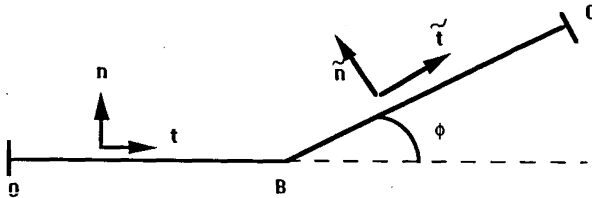
et la forme b associée à $B(\phi)$, c'est-à-dire définie par :

$$b : \mathbb{R} \times \mathbf{v} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, V, \mu) \rightarrow \langle B(\phi) V, \mu \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

1. ÉCRITURE DE LA FORMULATION MIXTE

1.1. Position du problème

Soient deux poutres $[O, B]$ et $[B, C]$ faisant entre elles un angle ϕ , encastées en O et C . Nous les paramétrisons par leurs abscisses curvilignes s et \tilde{s} , s appartient à $I = [0, l]$ et \tilde{s} à $\tilde{I} = [l, L]$ où l est la longueur de la poutre $[O, B]$, \tilde{l} de la poutre $[B, C]$, et $L = l + \tilde{l}$.



Chaque poutre est soumise à des densités linéiques de charge, qui engendrent une déformation du système. Les vecteurs déplacements de chacune des deux poutres sont notés respectivement $\underline{u}(s)$ et $\tilde{\underline{u}}(\tilde{s})$. Le vecteur $\underline{u}(s)$ est repéré par ses composantes $(u_1(s), u_2(s))$ sur la base locale $(\underline{t}, \underline{n})$ associée à la première poutre. De même :

$$\tilde{\underline{u}}(\tilde{s}) = \tilde{u}_1(\tilde{s}) \tilde{\underline{t}} + \tilde{u}_2(\tilde{s}) \tilde{\underline{n}}$$

où $(\tilde{\underline{t}}, \tilde{\underline{n}})$ est la base locale de la seconde poutre, définie par les relations :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{t}} &= \cos(\phi) \underline{t} + \sin(\phi) \underline{n} \\ \tilde{\underline{n}} &= -\sin(\phi) \underline{t} + \cos(\phi) \underline{n}. \end{aligned}$$

Il est connu (cf. [9]) que le système serait en équilibre si les deux poutres étaient indépendantes sans liaison en B . Les composantes $u = (u_1, u_2)$ et $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ des déplacements \underline{u} et $\tilde{\underline{u}}$ appartiendraient respectivement aux espaces \mathbf{V} et $\tilde{\mathbf{V}}$ suivants :

$$\mathbf{V} = \left\{ v = (v_1, v_2) \in H^1(I) \times H^2(I), v_1(0) = v_2(0) = \frac{dv_2}{ds}(0) = 0 \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left\{ \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in H^1(\tilde{I}) \times H^2(\tilde{I}), \tilde{v}_1(L) = \tilde{v}_2(L) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(L) = 0 \right\}.$$

La présence de la charnière rigide en B se traduit par les deux conditions de raccord :

— continuité du vecteur déplacement :

$$\underline{u}(l) = \tilde{\underline{u}}(l)$$

— continuité de la rotation de la normale :

$$\frac{du_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{u}_2}{d\tilde{s}}(l).$$

Pour décrire l'équation d'équilibre, S. Fayolle dans [9] introduit alors le sous-espace ω_ϕ de $\mathbf{v} = \mathbf{V} \times \tilde{\mathbf{V}}$ défini par :

$$\omega_\phi = \left\{ V = (v, \tilde{v}) \in \mathbf{v}, v(l) = \tilde{v}(l), \frac{dv_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l) \right\}.$$

La dépendance en ϕ de cet espace provient de la première condition, qui équivaut, par projection sur $(\underline{l}, \underline{n})$, aux deux relations :

$$v_1(l) = \cos(\phi) \tilde{v}_1(l) - \sin(\phi) \tilde{v}_2(l).$$

$$v_2(l) = \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) + \cos(\phi) \tilde{v}_2(l).$$

L'équation d'équilibre obtenue par S. Fayolle à partir des équations fortes s'écrit :

(1) Trouver $U^\phi \in \omega_\phi$ tel que : $a(U^\phi, V) = l(\phi, V)$ pour tout $V \in \omega_\phi$

où :

— a est la somme des énergies a_1 et a_2 des deux poutres.

— l est la somme des travaux l_1 et l_2 des forces extérieures, qui dépendent de ϕ , agissant sur chacune des deux poutres.

Explicitons a et l :

$$a : \mathbf{v} \times \mathbf{v} \rightarrow \mathbb{R},$$

$a(V, W) = a_1(v, w) + a_2(\tilde{v}, \tilde{w})$ pour $V = (v, \tilde{v})$ et $W = (w, \tilde{w})$ avec :

$$a_1(v, w) = ES \int_I \frac{dv_1}{ds} \frac{dw_1}{ds} ds + EA \int_I \frac{d^2v_2}{ds^2} \frac{d^2w_2}{ds^2} ds$$

où E, S, A désignent le module de Young, la section, le moment d'inertie de la première poutre.

De même pour a_2 en remplaçant v, w, I, E, S, A par $\tilde{v}, \tilde{w}, \dots$

$$l : \mathbf{v} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(\phi, V) = l_1(\phi, v) + l_2(\phi, \tilde{v})$$

avec :

$$l_1(\phi, v) = \int_I (f_1(\phi) v_1 + f_2(\phi) v_2) ds$$

où $f_1(\phi)$ et $f_2(\phi)$ désignent les composantes de la densité linéique de charge de la poutre $[O, B]$ sur la base locale $(\underline{t}, \underline{n})$.

De même sur la deuxième poutre en remplaçant v, I, f_1, f_2 par $\tilde{v}, \tilde{I}, \dots$

On pourrait par exemple considérer le travail du poids propre des poutres ou de la charge de neige. Le cas des charges ponctuelles n'est pas traité ici. On suppose dans la suite que :

$$(f_1(\phi), f_2(\phi)) \in L^2(I) \text{ et } (\tilde{f}_1(\phi), \tilde{f}_2(\phi)) \in L^2(\tilde{I}), \text{ pour tout } \phi \text{ de } \mathbb{R}.$$

Il a alors été établi dans [9] l'ellipticité de la forme bilinéaire a , continue et symétrique, sur ω_ϕ . Par suite, le problème (1) possède une solution unique. Ceci est encore valable si une seule poutre est encastree, l'autre étant libre ou en appui simple.

Notons que dans le cas de deux poutres de propriétés mécaniques identiques et pour $\phi = 0$, l'équation (1) correspond à l'équation d'une poutre de longueur L encastree à ses deux extrémités.

Cette formulation variationnelle « classique » ne permet pas d'étudier directement la variation du déplacement en fonction de ϕ , comme le fait B. Rousselet dans [10]. En effet, on ne peut pas dériver par rapport à ϕ l'équation d'équilibre (1) car l'espace des fonctions tests dépend de cette variable de conception. Dans le paragraphe suivant, nous recherchons donc une formulation où l'espace test est indépendant de ϕ . La formulation à laquelle on arrive sera une formulation mixte.

1.2. Écriture de la formulation mixte

Nous choisissons naturellement comme espace test indépendant de ϕ l'espace $\mathbf{v} = \mathbf{V} \times \tilde{\mathbf{V}}$ et nous caractérisons ω_ϕ en tant que noyau de

l'opérateur traduisant les conditions de liaison entre les deux poutres, à savoir :

$$\underline{v}(l) = \underline{\tilde{v}}(l)$$

$$\frac{dv_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l).$$

Par projection sur la base $(\underline{t}, \underline{n})$, ces conditions s'écrivent :

$$v_1(l) = \cos(\phi) \tilde{v}_1(l) - \sin(\phi) \tilde{v}_2(l)$$

$$v_2(l) = \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) + \cos(\phi) \tilde{v}_2(l)$$

$$\frac{dv_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l).$$

Nous introduisons donc l'opérateur :

$$B(\phi) : \mathbf{v} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$V \rightarrow B(\phi)V = \begin{bmatrix} v_1(l) - \cos(\phi) \tilde{v}_1(l) + \sin(\phi) \tilde{v}_2(l) \\ v_2(l) - \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) - \cos(\phi) \tilde{v}_2(l) \\ \frac{dv_2}{ds}(l) - \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l) \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\omega_\phi = \text{Ker } B(\phi)$.

Par des arguments de dualité, nous établissons la proposition :

PROPOSITION 1 : Pour tout U de \mathbf{v} on a :

$$a(U, V) = l(\phi, V) \text{ pour tout } V \text{ de } \omega_\phi \quad (1')$$

si et seulement si il existe λ^ϕ dans \mathbb{R}^3 tel que :

$$\langle B(\phi)V, \lambda^\phi \rangle_{\mathbb{R}^3} = -a(U, V) + l(\phi, V) \text{ pour tout } V \text{ de } \mathbf{v}.$$

Démonstration : A ϕ et U fixés, définissons f dans \mathbf{v}^* et F dans \mathbf{v} par :

$$f(V) = -a(U, V) + l(\phi, V) = \langle F, V \rangle \quad \forall V \in \mathbf{v}.$$

L'équation (1') est écrite sous les deux formes équivalentes :

$$\text{Ker } B(\phi) \subset \text{Ker } f \quad \text{ou} \quad (\text{Ker } f)^\perp \subset (\text{Ker } B(\phi))^\perp$$

or :

$$(\text{Ker } f)^\perp = (\text{Vect } F)^\perp = \overline{\text{Vect } F}$$

où $\text{Vect } F$ désigne l'espace engendré par F , et

$$(\text{Ker } B(\phi))^\perp = \overline{R(B(\phi)^*)}, \quad (\text{cf. [2]}).$$

Les deux espaces $\text{Vect } F$ et $R(B(\phi)^*)$ étant fermés car de dimension finie, l'inclusion précédente équivaut à l'appartenance de F à $R(B(\phi)^*)$, c'est-à-dire à l'existence de λ^ϕ dans \mathbb{R}^3 tel que :

$$B(\phi)^* \lambda^\phi = F \quad \text{c.à.d.} \quad \langle B(\phi)^* \lambda^\phi, V \rangle = \langle F, V \rangle \text{ pour tout } V \text{ de } \mathbf{v}.$$

On a donc démontré le résultat souhaité. \square

Pour homogénéiser les notations, on introduit la forme bilinéaire b associée à $B(\phi)$, c'est-à-dire définie par :

$$\begin{aligned} b : \mathbb{R} \times \mathbf{v} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, V, \mu) &\rightarrow \langle B(\phi) V, \mu \rangle_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

On peut écrire b sous la forme intrinsèque suivante :

$$b(\phi, V, \mu) = \langle v(l) - \tilde{v}(l), \mu \rangle_{\mathbb{R}^2} + \mu_3 \left(\frac{dv_2}{ds}(l) - \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(l) \right)$$

avec $\underline{\mu} = \mu_1 \underline{i} + \mu_2 \underline{j}$.

Finalement, ω_ϕ est le noyau de b , c'est-à-dire :

$$\omega_\phi = \{V \in \mathbf{v} / b(\phi, V, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3\}.$$

De cette caractérisation et de la proposition précédente découle immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1 : *Pour tout U de \mathbf{v} , on a l'équivalence :*

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{l} U \in \omega_\phi \\ a(U, V) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \omega_\phi \end{array} \right] \quad (1) \\ \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^3 &\left/ \begin{array}{l} a(U, V) + b(\phi, V, \lambda) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v} \quad (2) \\ b(\phi, U, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \quad (3) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalement, on va résoudre le problème mixte suivant :

Trouver $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\left[\begin{array}{l} a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v} \quad (2) \\ b(\phi, U^\phi, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \quad (3) \end{array} \right].$$

Du corollaire précédent découle le lien entre l'équation d'équilibre initiale et le problème mixte. Ce lien va nous permettre d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème mixte.

1.3. Existence et unicité de la solution du problème mixte

Établissons d'abord l'existence de la solution du problème mixte et l'unicité du premier élément du couple U^ϕ , en utilisant l'existence et l'unicité, qui sont établies par S. Fayolle, de la solution de l'équation (1) :

$$U^\phi \in \omega_\phi, \quad a(U^\phi, V) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \omega_\phi, \quad (1)$$

LEMME 1 :

1) $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ est solution du système d'équations (2)-(3) :

$$a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v} \quad (2)$$

$$b(\phi, U^\phi, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

si et seulement si U^ϕ et λ^ϕ vérifient les équations :

$$U^\phi \in \omega_\phi$$

$$a(U^\phi, V) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \omega_\phi \quad (1)$$

$$a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v}. \quad (2)$$

2) Il existe une solution $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ du problème mixte (2)-(3) et de plus le vecteur U^ϕ est unique.

Notons que le dernier système est redondant, car l'équation (1) s'obtient en choisissant dans (2) la fonction test V dans ω_ϕ .

Démonstration :

1) L'équivalence souhaitée est une conséquence directe du corollaire précédent.

2) D'après l'équivalence précédente, l'existence de (U^ϕ, λ^ϕ) équivaut d'une part à l'existence de U^ϕ vérifiant (1), existence assurée d'après le résultat de S. Fayolle, d'autre part, U^ϕ étant connu, à l'existence de λ^ϕ solution de (2), existence fournie par la proposition 1. Ainsi le problème mixte possède une solution. En outre, pour tout couple (U^ϕ, λ^ϕ) vérifiant (2)-(3), l'élément U^ϕ est solution de (1), il est donc déterminé de manière unique. \square

Il reste donc uniquement à établir l'unicité de λ^ϕ . On démontre d'abord les lemmes suivants, qui permettront également de justifier l'unicité de la solution discrète. Pour cela, on définit le sous-espace P de \mathbf{v} par :

$$P = \left\{ V = (v, v) \in \mathbf{v} \text{ avec } : v_1 \in P_1(I), v_2 \in P_3(I), \tilde{v} = 0 \text{ sur } \tilde{I} \right\}.$$

LEMME 2 : L'image par $B(\phi)$ de l'espace P est \mathbb{R}^3 .

L'opérateur $B(\phi) : \mathbf{v} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est surjectif.

Démonstration : Notons que l'image par $B(\phi)$ d'un élément V de P est :

$$B(\phi)V = \left\{ \begin{array}{l} v_1(l) \\ v_2(l) \\ \frac{dv_2}{ds}(l) \end{array} \right\}.$$

Le triplet $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ étant donné, définissons v_1 et v_2 sur I par :

$$v_1 \in P_1(I), v_1(0) = 0, v_1(l) = \lambda_1$$

$$v_2 \in P_3(I), v_2(0) = \frac{dv_2}{ds}(l) = 0, v_2(l) = \lambda_2, \frac{dv_2}{ds}(l) = \lambda_3.$$

On a alors :

$$V = (v, 0) \in P \text{ et } B(\phi)V = \lambda, \text{ d'où le résultat.} \quad \square$$

De ce lemme découle :

LEMME 3 : $\forall U \in \mathbf{v}$, il existe au plus un λ tel que :

$$a(U, V) + b(\phi, V, \lambda) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v}.$$

Démonstration : Soient λ_1, λ_2 deux solutions de l'équation ci-dessus. On a :

$$b(\phi, V, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \text{ c.à.d. } \langle B(\phi)V, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad \forall V \in \mathbf{v}.$$

Ainsi, $\lambda_1 - \lambda_2$ appartiennent à $R(B(\phi))^\perp = \{0\}$ car $B(\phi)$ est surjectif. D'où l'unicité de λ . \square

Regroupons alors maintenant les résultats des lemmes 1 et 3. Le lemme 1 assure l'existence de (U^ϕ, λ^ϕ) solution du problème mixte constitué des équations (2)-(3), ainsi que l'unicité de U^ϕ , tandis que le lemme précédent, appliqué à U^ϕ , permet d'obtenir l'unicité de λ^ϕ solution de l'équation :

$$\lambda^\phi \in \mathbb{R}^3 \quad a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v}. \quad (2)$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 2 : *Le problème mixte :*

Trouver $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, U^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

possède une solution unique, qui est aussi la solution unique des deux équations :

$$\begin{cases} U^\phi \in \omega_\phi & a(U^\phi, V) = l(\phi, V) & \forall V \in \omega_\phi & (1) \\ \lambda^\phi \in \mathbb{R}^3 & a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) & \forall V \in \mathbf{v} & (2) \end{cases}$$

Faisons alors la remarque importante suivante, qui permet également de conclure à l'existence et à l'unicité du problème mixte (2)-(3) via le théorème de F. Brezzi (cf. [3]).

Remarque 1 :

1) D'après une caractérisation des opérateurs surjectifs, établie par H. Brezis (cf. théorème 2.19 [2]) à l'aide du théorème de l'application ouverte, la surjectivité de la restriction $B_P(\phi)$ de $B(\phi)$ à l'espace P , démontrée au lemme 2, équivaut à l'existence de $C(\phi) > 0$ telle que :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^3 \quad \|B_P(\phi)^* \mu\| > C(\phi) \times \|\mu\|_{\mathbb{R}^3}.$$

En vertu des égalités :

$$\begin{aligned} B_P(\phi)^* \mu &= \sup \left\{ \frac{\langle B_P(\phi)^* \mu, V \rangle}{\|V\|}, V \in P \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{b(\phi, V, \mu)}{\|V\|}, V \in P \right\} \end{aligned}$$

l'inégalité précédente équivaut à la condition :

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}^3} \sup_{V \in P} \frac{b(\phi, V, \mu)}{\|V\| \|\mu\|_{\mathbb{R}^3}} > 0. \quad (4)$$

A fortiori, b vérifie la condition « inf-sup » sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbf{v}$ c'est-à-dire :

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}^3} \sup_{V \in \mathbf{v}} \frac{b(\phi, V, \mu)}{\|V\| \|\mu\|_{\mathbb{R}^3}} > 0. \quad (5)$$

Ainsi, on aurait pu appliquer directement le théorème de F. Brezzi (cf. [3]), qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte (2)-(3), où les seconds membres des deux équations sont *des formes linéaires continues quelconques*, sous les deux conditions :

— a est elliptique sur

$$\omega_\phi = \{V \in \mathbf{v} \text{ tel que : } b(\phi, V, \mu) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}^3\}.$$

— b vérifie la condition inf-sup (5).

Cette remarque sera utile lors de l'étude de la régularité de la solution (U^ϕ, λ^ϕ) par rapport à la variable de conception.

2) L'écriture du problème mixte pouvait également s'obtenir en écrivant l'équation d'équilibre (1) sous la forme du problème de minimisation :

$$\min \frac{1}{2} a(V, V) - l(\phi, V)$$

sous la contrainte : $V \in \omega_\phi$.

Les équations (2) et (3) correspondent alors aux équations d'Euler du lagrangien défini par :

$$\mathcal{L}(V, \mu) = \frac{1}{2} a(V, V) - l(\phi, V) + b(\phi, V, \mu). \quad \square$$

Intéressons-nous maintenant à l'interprétation mécanique du multiplicateur de lagrange λ^ϕ .

1.4. Interprétation mécanique

L'assemblage de deux poutres est soumis aux forces extérieures réparties \underline{f} et $\tilde{\underline{f}}$, et à des efforts internes, de résultante nulle d'après le principe de l'action et de la réaction, en particulier à la charnière. Ces efforts internes proviennent d'une part de l'action de la première poutre sur la deuxième, qui engendre un vecteur force $\underline{F}(l)$ et un moment de flexion $M(l)$, d'autre part de l'action réciproque correspondant aux efforts $(-\underline{F}(l), -M(l))$. Ces efforts peuvent dépendre de ϕ .

On considère alors les deux sous-systèmes constitués des deux poutres, supposées indépendantes mais soumises à des efforts $(\underline{F}(l), M(l))$ et $(-\underline{F}(l), -M(l))$ respectivement.

Pour la première, le principe des travaux virtuels s'écrit :

trouver $u^\phi \in V$ tel que :

$$a_1(u^\phi, v) = l_1(\phi, v) + \langle \underline{F}(l), \underline{v}(l) \rangle_{\mathbb{R}^2} + M(l) \frac{dv_2}{ds}(l) \quad \forall v \in V. \quad (6)$$

De même sur la deuxième poutre, on a l'équation d'équilibre :

trouver $\tilde{u}^\phi \in \tilde{V}$ tel que :

$$a_2(\tilde{u}^\phi, \tilde{v}) = l_2(\phi, \tilde{v}) - \langle \underline{F}(l), \tilde{v}(l) \rangle_{\mathbb{R}^2} - M(l) \frac{d\tilde{v}_2}{ds}(l) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}. \quad (7)$$

Quels que soient les efforts $\underline{F}(l)$ et $M(l)$ ces deux équations possèdent une solution unique (cf. [9]) car les deux poutres sont encastées à une extrémité.

En outre V et \tilde{V} étant découplées, (6) et (7) équivalent à chercher $U^\phi = (u^\phi, \tilde{u}^\phi) \in \mathcal{V}$ tel que :

$$a(U^\phi, V) = l(\phi, V) + \langle \underline{F}(l), \underline{v}(l) - \tilde{v}(l) \rangle_{\mathbb{R}^2} + \\ + M(l) \left(\frac{dv_2}{ds}(l) - \frac{d\tilde{v}_2}{d\tilde{s}}(1) \right) \quad \forall V = (v, \tilde{v}) \in \mathbf{v}. \quad (8)$$

A priori, la solution de cette équation ne vérifie pas les deux conditions de raccord :

$$\underline{u}(l) = \tilde{\underline{u}}(l) \\ \frac{du_2}{ds}(l) = \frac{d\tilde{u}_2}{d\tilde{s}}(l).$$

Seul le couple d'efforts $\underline{F}(l) = -\lambda^\phi$ et $M(l) = -\lambda_3^\phi$ impose à la solution de l'équation (8) de satisfaire les conditions de raccord, d'après l'existence et l'unicité du système (2)-(3). Ainsi $(\underline{\lambda}^\phi, \lambda_3^\phi)$ et son opposé correspondent aux efforts qu'il faut exercer d'une part sur la poutre $[B, C]$, d'autre part sur la poutre $[O, B]$ à la charnière, pour que les déplacements et les rotations en B soient les mêmes dans les deux poutres.

En conclusion, l'équation d'équilibre initiale a pu être écrite sous la forme d'un problème mixte, où la nouvelle inconnue λ^ϕ a un sens physique. Ces nouvelles équations (2)-(3) sont posées sur des espaces indépendants de la variable de conception, ce qui permet d'étudier maintenant le problème d'optimisation continu.

2. LE PROBLÈME D'OPTIMISATION CONTINU

Il s'agit de minimiser $j(\phi) = J(\phi; U^\phi)$ où $J: \mathbb{R} \times \mathbf{v} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k avec $k > 0$. On pourrait choisir par exemple :

$$J(\phi, V) = \|V\|^2$$

ou bien :

$J(\phi, V) = l(\phi, V)$ si la forme l est assez régulière, ce qui est le cas lorsque cette forme représente le travail du poids des poutres ou de la charge de neige.

En vue d'utiliser un algorithme d'optimisation, on souhaite calculer la dérivée de j . Pour cela, nous étudions la régularité de l'application :

$$\phi \rightarrow (U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$$

en reprenant le raisonnement utilisé par exemple par A. Habbal (cf. [8]).

PROPOSITION 3 : *Supposons l'application : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{v}^*$: $\phi \rightarrow l(\phi, \cdot)$ de classe C^1 .*

Alors l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3 : \phi \rightarrow (U^\phi, \lambda^\phi)$ est C^1 .

De plus, l'élément :

$$\left(\frac{dU^\phi}{d\phi}, \frac{d\lambda^\phi}{d\phi} \right) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$$

est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \left(\frac{dU^\phi}{d\phi}, V \right) + b \left(\phi, V, \frac{d\lambda^\phi}{d\phi} \right) = - \frac{\partial b}{\partial \phi} (\phi, V, \lambda^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi} (\phi, V) \\ \forall V \in \mathbf{v} \quad (9) \\ b \left(\phi, \frac{dU^\phi}{d\phi}, \mu \right) = - \frac{\partial b}{\partial \phi} (\phi, U^\phi, \mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \quad (10) \end{array} \right.$$

Démonstration : On utilise le théorème des fonctions implicites (cf. [4]) en introduisant :

— L'opérateur : $A : \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}$ défini par :

$$a(V, W) = \langle AV, W \rangle \quad \forall V, W \in \mathbf{v}.$$

Cet opérateur est indépendant de ϕ .

— Le vecteur $L(\phi)$ de \mathbf{v} défini par : $l(\phi, V) = \langle L(\phi), V \rangle \quad \forall V \in \mathbf{v}$.
Le problème mixte est équivalent à chercher $Y^\phi = (U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ tel que : $f(\phi ; Y^\phi) = 0$

où :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$$

$$(\phi, V, \mu) \rightarrow f(\phi ; V, \mu) = \left\{ \begin{array}{l} AV + B(\phi)^* \mu - L(\phi) \\ B(\phi) V \end{array} \right\}.$$

Montrons que f est de classe C^1 en étudiant la continuité de ses dérivées partielles.

— L'application f est affine en (V, μ) donc sa dérivée partielle en le couple (V, μ) est continue.

— Étudions la dépendance de f en ϕ . Il est immédiat que l'application :

$$B : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbf{v}, \mathbb{R}^3) : \phi \rightarrow B(\phi)$$

où $L(\mathbf{v}, \mathbb{R}^3)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de \mathbf{v} dans \mathbb{R}^3 , est continûment dérivable et sa dérivée :

$$B' : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbf{v}, \mathbb{R}^3) : \phi \rightarrow B'(\phi)$$

est définie par :

$$B'(\phi) V = \begin{Bmatrix} \sin(\phi) \tilde{v}_1(l) + \cos(\phi) \tilde{v}_2(l) \\ -\cos(\phi) \tilde{v}_1(l) + \sin(\phi) \tilde{v}_2(l) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

On en déduit alors la régularité C^1 de l'opérateur adjoint :

$$B^* : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbf{v}) : \phi \rightarrow B(\phi)^*$$

dont la dérivée est définie par :

$$(B^*)' : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbf{v}) : \phi \rightarrow (B'(\phi))^*.$$

Il reste à étudier l'application $L : \phi \rightarrow L(\phi) \in \mathbf{v}$. Comme, par hypothèse, l'application : $\phi \rightarrow l(\phi, \cdot) \in \mathbf{v}'$ est de classe C^1 , on en déduit par des arguments algébriques simples que l'application L est aussi de classe C^1 et que sa dérivée est le vecteur $L'(\phi)$ de \mathbf{v} défini par :

$$\frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, V) = \langle L'(\phi), V \rangle \text{ pour tout } V \text{ de } \mathbf{v} \text{ et pour tout } \phi \text{ de } \mathbb{R}.$$

Ainsi, f admet une dérivée partielle en ϕ continue, et elle est donc continûment différentiable.

Montrons la bijectivité de $\frac{\partial f}{\partial y}(\phi, Y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\phi, Y) \cdot Z = \begin{bmatrix} AU + B(\phi)^* \lambda \\ B(\phi) U \end{bmatrix} \text{ avec } Z = (U, \lambda) \text{ dans } \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3.$$

Résoudre l'équation : trouver $Z = (U, \lambda) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} AU + B(\phi)^* \lambda = M \\ B(\phi) U = N \end{cases}$$

où (M, N) sont fixés dans $\mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$, revient à résoudre le système :
trouver $(U, \lambda) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a(U, V) + b(\phi, V, \mu) = \langle M, V \rangle & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, U, \mu) = \langle N, \mu \rangle_{\mathbb{R}^3} & \forall \mu \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Ce problème est de type mixte. Le théorème de F. Brezzi ([3]) fournit l'existence et l'unicité de (U, λ) (cf. remarque 1). Par suite la dérivée partielle de f en Y est bijective.

Ainsi, le théorème des fonctions implicites s'applique et l'application : $\phi \rightarrow (U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ est de classe C^1 . On peut alors dériver les équations (2) et (3) initiales. \square

Finalement j est de classe C^1 et admet donc un minimum sur tout compact K de \mathbb{R} . En particulier, j étant 2π -périodique, on pourra choisir $K = [0, 2\pi]$.

Nous allons approcher le minimum de j en utilisant un algorithme de descente, ce qui nécessite le calcul, à chaque itération, d'une direction de descente. Nous choisissons comme direction de descente le gradient continu discrétisé, qui est une approximation de la dérivée exacte de j que nous allons maintenant calculer.

PROPOSITION 4 : En supposant toujours l et J de classe C^1 au moins, $j'(\phi)$ a pour expression :

$$j'(\phi) = -\frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, U^\phi, \eta^\phi) - \frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, P^\phi, \lambda^\phi) + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P^\phi)$$

où l'état direct $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$\begin{cases} a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, U^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (2)$$

et l'état adjoint $(P^\phi, \eta^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ est solution des équations :

$$\begin{cases} a(P^\phi, V) + b(\phi, V, \eta^\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot V & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, P^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (11)$$

En outre,

$$j'(\phi) = \eta_2^\phi u_1^\phi(l) - \eta_1^\phi u_2^\phi(l) + \lambda_2^\phi p_1^\phi(l) - \lambda_1^\phi p_2^\phi(l) + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P^\phi).$$

Démonstration : D'après la définition de j , on a :

$$j'(\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot \frac{dU^\phi}{d\phi} + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, U^\phi).$$

L'équation (11) fournit alors :

$$\frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot \frac{dU^\phi}{d\phi} = a\left(P^\phi, \frac{dU^\phi}{d\phi}\right) + b\left(\phi, \frac{dU^\phi}{d\phi}, \eta^\phi\right).$$

D'après les équations (9) et (10), dans lesquelles on choisit : $V = P^\phi$ et $\mu = \eta^\phi$, on a :

$$\begin{aligned}
 a\left(P^\phi, \frac{dU^\phi}{d\phi}\right) &= -b\left(\phi, P^\phi, \frac{d\lambda^\phi}{d\phi}\right) \frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, P^\phi, \lambda^\phi) - \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P^\phi) \\
 b\left(\phi, \frac{dU^\phi}{d\phi}, \eta^\phi\right) &= \frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, U^\phi, \eta^\phi).
 \end{aligned}$$

L'équation (12) assure :

$$b\left(\phi, P^\phi, \frac{d\lambda^\phi}{d\phi}\right) = 0.$$

On en déduit donc la première expression de $j'(\phi)$. On explicite alors les termes en b . Par définition de b , on a, pour tout V de \mathbf{v} :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, V, \mu) &= \mu_1(\sin(\phi) \tilde{v}_1(l) + \cos(\phi) \tilde{v}_2(l)) + \\
 &\quad + \mu_2(-\cos(\phi) \tilde{v}_1(l) + \sin(\phi) \tilde{v}_2(l)).
 \end{aligned}$$

Pour V appartenant à ω_ϕ , cette dérivée partielle s'écrit :

$$\frac{\partial b}{\partial \phi}(\phi, V, \mu) = \mu_1 v_2(l) - \mu_2 v_1(l).$$

Comme U^ϕ et P^ϕ appartiennent à ω_ϕ , la seconde expression de $j'(\phi)$ est immédiate. \square

Finalement, l'expression de $j'(\phi)$ obtenue est très simple. Il va alors être très facile d'approcher cette dérivée. En effet, il suffit de remplacer dans l'expression de $j'(\phi)$, les fonctions U^ϕ et P^ϕ et les scalaires λ^ϕ , η^ϕ par des approximations calculées à l'aide d'un code éléments finis considéré comme une boîte noire. Nous appellerons l'expression obtenue gradient continu discrétisé.

Notre but étant de comparer le gradient continu discrétisé avec le gradient discret calculé par les ingénieurs, nous devons préciser le code éléments finis utilisé. Ce code a été élaboré sans souci de résoudre un problème d'optimisation. Il nous fournit donc uniquement les degrés de liberté d'une fonction U_h^ϕ approchant le déplacement, et des fonctions de forme permettant de créer une interface d'interpolation.

3. DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT

Nous travaillons ici sur un schéma éléments finis particulier, décrit par exemple par S. Fayolle, permettant le calcul approché de la fonction U^ϕ , solution de l'équation d'équilibre initiale :

Trouver $U^\phi \in \omega_\phi$ tel que :

$$a(U^\phi, V) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \omega_\phi. \quad (1)$$

Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons pas au problème d'optimisation.

Pour discrétiser cette équation d'équilibre, on recouvre les deux poutres par une subdivision régulière de pas h . Ce pas h est choisi indépendant de ϕ , ainsi, la discrétisation n'est pas liée à la variable de conception. Les intervalles I et \tilde{I} sont donc décomposés de la manière suivante :

$$I = \bigcup_{i=0}^{i=m-1} [a_i, a_{i+1}] \quad \text{et} \quad \tilde{I} = \bigcup_{j=m}^{j=N} [\tilde{a}_j, \tilde{a}_{j+1}]$$

avec

$$a_0 = 0, \quad a_m = l, \quad \tilde{a}_m = l, \quad \tilde{a}_{N+1} = L$$

$$a_{i+1} - a_i = \tilde{a}_{j+1} - \tilde{a}_j = h.$$

et N est le nombre total de nœuds, hormis les nœuds extrémaux.

Le principe du schéma éléments finis est le suivant :

— d'une part, on analyse chaque poutre par des éléments (P_1, P_3) , les degrés de liberté en chaque nœud étant les coordonnées tangentielles et normales du déplacement, et la rotation de la normale ;

— d'autre part, on tient compte de la condition de liaison entre les deux poutres, qui est la même que dans le cas continu :

- continuité du vecteur déplacement ;
- continuité de la rotation de la normale.

Écrivons sous forme mathématique ce schéma. A chaque h est donc associé un espace d'éléments finis \mathbf{v}_h , conforme ou encore interne, c'est-à-dire inclus dans l'espace \mathbf{v} . On définira alors l'espace $\omega_{h\phi}$ par :

$$\omega_{h\phi} = \omega_\phi \cap \mathbf{v}_h.$$

Précisons l'espace $\mathbf{v}_h = \mathbf{V}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$.

— Définition de $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{h1} \times \mathbf{V}_{h2}$.

\mathbf{V}_{h1} est l'ensemble des fonctions v_{h1} telles que :

- 1) $v_{h1} \in C^0(I)$.
- 2) La restriction de v_{h1} à $[a_i, a_{i+1}]$ appartient à $P_1([a_i, a_{i+1}])$, pour $i = 0, \dots, m-1$.
- 3) v_{h1} est définie par ses valeurs aux nœuds $a_i, i = 0, \dots, m$.
- 4) $v_{h1}(0) = 0$.

\mathbf{V}_{h2} est l'ensemble des fonctions v_{h2} telles que :

- 1) $v_{h2} \in C^1(I)$.
- 2) La restriction de v_{h2} à $[a_i, a_{i+1}]$ appartient à $P_3([a_i, a_{i+1}])$.

3) v_{h2} est définie par ses valeurs et par les valeurs de sa dérivée aux nœuds a_i , pour $i = 0, \dots, m$.

$$4) v_{h2}(0) = \frac{dv_{h2}}{ds}(0) = 0.$$

Ainsi V_h est inclus dans V .

— De même, on définit $\tilde{V}_h = \tilde{V}_{h1} \times \tilde{V}_{h2}$ inclus dans \tilde{V}_h .

Par suite $\mathbf{v}_h = V_h \times \tilde{V}_h$ est inclus dans \mathbf{v} . On a alors :

$$\omega_{h\phi} = \omega_\phi \cap \mathbf{v}_h = \left\{ W_h \in \mathbf{v}_h \text{ tel que : } \underline{w}_h(l) = \tilde{w}_h(l) \text{ et } \frac{d\underline{w}_{h2}}{ds}(l) = \frac{d\tilde{w}_{h2}}{d\tilde{s}}(l) \right\}.$$

Ainsi, $\dim \omega_{h\phi} = \dim \mathbf{v}_h - 3$. On notera n la dimension de cet espace, qui est donc indépendante de ϕ .

Finalement, pour discrétiser l'équation (1), il suffit de remplacer l'espace ω_ϕ par le sous-espace $\omega_{h\phi}$. En effet, toutes les intégrales sont ici supposées calculées exactement, l'utilisation d'un schéma d'intégration numérique serait une étape ultérieure. Nous obtenons donc l'équation :

$$U_h^\phi \in \omega_{h\phi} \quad a(U_h^\phi, V_h) = l(\phi; V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi}. \quad (13)$$

L'énergie a étant elliptique sur ω_ϕ , elle l'est a fortiori sur $\omega_{h\phi}$ et ainsi l'équation discrétisée possède une solution unique. Le code éléments finis fournit le vecteur de degrés de liberté U_D^ϕ lié à U_h^ϕ par la relation :

$$U_h^\phi = \Pi_h(\phi) U_D^\phi$$

où $\Pi_h(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \omega_{h\phi}$ est l'opérateur d'interpolation.

Cet opérateur dépend de ϕ . En effet, sur chacune des deux poutres, les degrés de liberté sont les composantes, tangentielle et normale, du déplacement, et la rotation de la normale, calculées en chaque nœud, le nœud B étant considéré uniquement comme un nœud de la première poutre. Ainsi, pour calculer les degrés de liberté associés au déplacement de la seconde poutre en B , on utilise les conditions de transmission, qui dépendent de ϕ .

4. CALCUL DU GRADIENT CONTINU DISCRÉTISÉ

L'idée est donc d'approcher directement la dérivée de j , dont nous rappelons ici l'expression :

$$j'(\phi) = \eta_2^\phi u_1^\phi(l) - \eta_1^\phi u_2^\phi(l) + \lambda_2^\phi p_1^\phi(l) - \lambda_1^\phi p_2^\phi(l) + \\ + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P^\phi).$$

où

— l'état direct $(U^\phi, \lambda^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$\begin{cases} a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, U^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2)$$

— et l'état adjoint $(P^\phi, \eta^\phi) \in \mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$ vérifie :

$$\begin{cases} a(P^\phi, V) + b(\phi, V, \eta^\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot V & \forall V \in \mathbf{v} \\ b(\phi, P^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12)$$

Il s'agit donc de calculer des approximations de l'état direct et de l'état adjoint.

4.1. Approximation de l'état direct

Afin de nous servir du code éléments finis précédemment décrit, nous utilisons l'équivalence, établie au lemme 1, entre les équations (2)-(3) et les équations :

Trouver $U^\phi \in \omega_\phi$ tel que :

$$a(U^\phi, V) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \omega_\phi. \quad (1)$$

Trouver $\lambda^\phi \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(U^\phi, V) + b(\phi, V, \lambda^\phi) = l(\phi, V) \quad \forall V \in \mathbf{v} \quad (2)$$

ce qui permet de résoudre (2)-(3) en cascade : on calcule d'abord U^ϕ en résolvant (1), puis λ^ϕ en résolvant (2).

— *Calcul de U^ϕ :*

Le code éléments finis nous fournit le vecteur de degrés de liberté U_D^ϕ , à partir duquel on calcule la fonction $U_h^\phi = \Pi_h(\phi) U_D^\phi$ par interpolation.

— *Calcul de λ^ϕ :*

Dans l'équation (2), intervient U^ϕ , qui n'est pas connue exactement. On l'approche donc par la fonction U_h^ϕ . En remplaçant alors l'espace \mathbf{v} par le sous-espace \mathbf{v}_h , qui a permis de construire $\omega_{h\phi}$, on obtient l'équation discrétisée :

$\lambda_h^\phi \in \mathbb{R}^3$ est tel que :

$$a(U_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \lambda_h^\phi) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h. \quad (15)$$

L'existence et l'unicité de la solution de cette équation seront justifiées lors de la comparaison entre le gradient discret et le gradient continu discrétisé, à la suite de la proposition 5.

4.2. Approximation de l'état adjoint

On utilise la même démarche qu'au paragraphe précédent, en appliquant le lemme 1 aux équations d'état adjoint (11) et (12), qui sont donc équivalentes à :

- chercher $P^\phi \in \omega_\phi$ tel que :

$$a(P^\phi, V) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot V \quad \forall V \in \omega_\phi \quad (16)$$

- chercher $\eta^\phi \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(P^\phi, V) + b(\phi, V, \eta^\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U^\phi) \cdot V \quad \forall V \in \mathbf{v}. \quad (11)$$

— *Calcul de P^ϕ* :

Comme précédemment, on remplace dans (16) naturellement U^ϕ par la fonction U_h^ϕ de $\omega_{h\phi}$, ce qui est licite car $\omega_{h\phi}$ est inclus dans \mathbf{v} . On obtient ainsi l'équation « semi-continue » :

Trouver $\mathcal{P}_h^\phi \in \omega_\phi$ tel que :

$$a(\mathcal{P}_h^\phi, V) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V \quad \forall V \in \omega_\phi. \quad (17)$$

Cette équation se présente sous la même forme que l'équation d'équilibre (1) en \tilde{U}^ϕ . Elle peut donc être traitée par le même code éléments finis, qui nous fournit donc en sortie les degrés de liberté d'une fonction P_h^ϕ , elle-même calculée par interpolation dans $\omega_{h\phi}$. Cette fonction vérifie donc l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation « semi-continue » ω_ϕ par $\omega_{h\phi}$, c'est-à-dire l'équation suivante :

Trouver $P_h^\phi \in \omega_{h\phi}$ tel que :

$$a(P_h^\phi, V_h) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V_h \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi}. \quad (18)$$

— *Calcul de η^ϕ* :

Là encore, U^ϕ et \mathbf{v} sont remplacés dans (11) par U_h^ϕ et \mathbf{v}_h . En outre, P^ϕ étant inconnue, elle est approchée par la fonction P_h^ϕ déjà calculée. On obtient donc l'équation discrétisée :

Chercher $\eta_h^\phi \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(P_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \eta_h^\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V_h \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h. \quad (19)$$

Toutes ces approximations vont nous permettre de calculer une approximation de la dérivée de j .

4.3. Expression du gradient continu discrétisé

En utilisant les approximations précédentes, on obtient le gradient continu discrétisé :

$$[j'(\phi)]_h = \eta_{h2}^\phi u_{h1}^\phi(l) - \eta_{h1}^\phi u_{h2}^\phi(l) + \lambda_{h2}^\phi p_{h1}^\phi(l) - \lambda_{h1}^\phi p_{h2}^\phi(l) + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U_h^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P_h^\phi). \quad (20)$$

Finalement, il est ici très facile de calculer le gradient continu discrétisé, que nous pouvons donc utiliser aisément dans les algorithmes d'optimisation. Dans ces algorithmes, les ingénieurs préfèrent se servir, pour calculer la direction de descente, du gradient discret, que nous allons comparer au gradient continu discrétisé.

5. COMPARAISON ENTRE LE GRADIENT DISCRET ET LE GRADIENT CONTINU DISCRÉTISÉ

5.1. Calcul du gradient discret

Le principe de cette méthode est de discrétiser d'abord l'équation d'équilibre afin de se ramener à l'étude d'une fonctionnelle définie sur \mathbb{R}^n , puis de dériver ensuite cette fonctionnelle.

Avant de calculer cette dérivée, rappelons d'abord l'équation discrétisée :
Trouver $U_h^\phi \in \omega_{h\phi}$ tel que :

$$a(U_h^\phi, V_h) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi}. \quad (13)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme matricielle équivalente :

Trouver $U_D^\phi \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$K_D(\phi) U_D^\phi = F_D(\phi) \quad (14)$$

où :

— $K_D(\phi)$ est la matrice carrée d'ordre n , définie par :

$$\langle K_D(\phi) V_D, W_D \rangle = a(\Pi_h(\phi) V_D, \Pi_h(\phi) W_D) \quad \forall V_D, W_D \in \mathbb{R}^n$$

— $F_D(\phi)$ est le vecteur de \mathbb{R}^n , défini par :

$$\langle F_D(\phi), W_D \rangle = l(\phi, \Pi_h(\phi) W_D) \quad \forall W_D \in \mathbb{R}^n.$$

Rappelons que $\Pi_h(\phi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \omega_{h\phi}$ est l'opérateur d'interpolation, qui dépend de ϕ , comme nous l'avons noté au paragraphe 3. Ceci justifie la dépendance en ϕ de la matrice $K_D(\phi)$ et du vecteur $F_D(\phi)$.

Le vecteur U_D^ϕ est donc le vecteur de degrés de liberté associé U_h^ϕ . En effet, comme l'équation (13) possède une solution unique, il en est de même de l'équation (14), et on a la relation :

$$U_D^\phi = [\Pi_h(\phi)]^{-1} U_h^\phi.$$

Les ingénieurs minimisent alors la fonctionnelle discrète :

$$j_h(\phi) = J(\phi, U_h^\phi)$$

qui est écrite, en fonction des degrés de liberté, sous la forme suivante :

$$j_h(\phi) = J_D(\phi, U_D^\phi), \quad \forall \phi \in \mathbb{R},$$

où J_D est la fonction vectorielle définie par :

$$\begin{aligned} J_D : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} : \\ J_D(\phi, W_D) &= J(\phi, \Pi_h(\phi) W_D). \end{aligned}$$

Pour étudier ce problème de minimisation discret, les ingénieurs utilisent un algorithme de descente, et calculent donc la dérivée de $j_h(\phi)$, dit gradient discret.

5.2. Expression du gradient discret

Le calcul de la dérivée de $j_h(\phi)$ ne présente ici aucune difficulté car l'équation matricielle présente l'avantage d'être posée sur \mathbb{R}^n , espace indépendant de ϕ . Ils introduisent eux aussi un état adjoint, également solution d'une équation matricielle. Nous ne détaillons pas ici cette démarche, car, pour comparer le gradient discret au gradient continu discrétisé, il suffit d'adapter les résultats établis dans le cas continu, afin d'obtenir « une expression sympathique » du gradient discret, qui est la dérivée de la fonctionnelle discrète définie par :

$$j_h(\phi) = J(\phi, U_h^\phi) = J_D(\phi, U_D^\phi)$$

où

$$U_h^\phi \in \omega_{h\phi}, \quad a(U_h^\phi, V_h) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi} \quad (13)$$

avec : $\omega_{h\phi} = \omega_\phi \cap \mathbf{v}_h$.

Pour calculer la dérivée de $j_h(\phi)$, nous raisonnons donc comme dans le cas continu, c'est-à-dire nous allons écrire l'équation discrétisée sous forme

d'un système mixte. Pour cela, nous reprenons point par point la proposition 1, le corollaire 1, et le lemme 1, en remplaçant l'espace \mathbf{v} par le sous-espace \mathbf{v}_h , les démonstrations pouvant être reprises intégralement. Nous obtenons donc le résultat suivant :

PROPOSITION 5 :

1) $U_h^\phi \in \omega_{h\phi}$ est solution de l'équation :

$$a(U_h^\phi, V_h) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi} \quad (13)$$

si et seulement si il existe $\lambda_h^{*\phi} \in \mathbb{R}^3$ tel que U_h^ϕ et $\lambda_h^{*\phi}$ sont solutions du système :

$$\begin{aligned} U_h^\phi &\in \mathbf{v}_h, \lambda_h^{*\phi} \in \mathbb{R}^3 \\ a(U_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \lambda_h^{*\phi}) &= l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h \end{aligned} \quad (21)$$

$$b(\phi, U_h^\phi, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^3. \quad (22)$$

2) Chercher $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi}) \in \mathbf{v}_h \times \mathbb{R}^3$ solutions du système (21)-(22) équivaut à chercher $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi}) \in \mathbf{v}_h \times \mathbb{R}^3$ solution du système ci-dessous :

$$\begin{aligned} U_h^\phi &\in \omega_{h\phi} \\ a(U_h^\phi, V_h) &= l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi} \end{aligned} \quad (13)$$

$$a(U_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \lambda_h^{*\phi}) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h. \quad (21)$$

En outre, le système (21)-(22) possède une solution et U_h^ϕ est unique.

Notons que, dans le cas continu, l'unicité de $\lambda_h^{*\phi}$ découlait de la surjectivité de l'opérateur $B(\phi)$ défini sur l'espace \mathbf{v} , qui elle-même découlait de la surjectivité de la restriction de $B(\phi)$ au sous-espace P de \mathbf{v} . Comme P est inclus dans \mathbf{v}_h , nous en déduisons la surjectivité de la restriction de l'opérateur $B(\phi)$ à l'espace \mathbf{v}_h . Par conséquent, le système (21)-(22) possède une solution unique. Il en est donc de même du système (13)-(15), système équivalent au système (21)-(22), l'équation (15) n'étant autre que l'équation (22).

Remarque 3 : Au lieu de raisonner comme dans le cas continu, nous aurions pu justifier l'existence et l'unicité de $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi})$, solution du problème mixte discret (21)-(22), en utilisant le théorème de F. Brezzi (cf. [3]) ; théorème qui assure en outre la convergence de $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi})$ vers (U^ϕ, λ^ϕ) dans $\mathbf{v} \times \mathbb{R}^3$, (sous des hypothèses de régularité sur U^ϕ). En effet, ce théorème s'applique si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— soit $\mathcal{N}_h = \{W_h \in \mathbf{v}_h, b(\phi, W_h, \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathbb{R}^3\}$, alors a est elliptique sur \mathcal{N}_h avec une constante d'ellipticité indépendante de h , pour h petit ;

— b vérifie la condition « inf sup discrète » :

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}^3} \sup_{V_h \in \mathbf{v}_h} \frac{b(\phi, V_h, \mu)}{\|V_h\|_{\mathbf{v}} \|\mu\|_{\mathbb{R}^3}} > \beta' > 0$$

où β' est indépendante de h , pour h petit.

La première condition est ici immédiate car $\mathcal{N}_h = \omega_{h\phi}$ et a est elliptique sur ω_ϕ , donc uniformément elliptique sur le sous-espace $\omega_{h\phi}$. Quant à la seconde condition, elle découle de l'inclusion de P dans \mathbf{v}_h et de l'inégalité « inf-sup » sur $P \times \mathbb{R}^3$ (cf. remarque 1). \square

Ainsi, $j_h(\phi) = J(\phi, U_h^\phi)$ où $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi})$ est solution d'un problème mixte discret. En appliquant alors le théorème des fonctions implicites et en utilisant des arguments algébriques simples comme dans les propositions 3 et 4, nous obtenons le résultat suivant :

PROPOSITION 6 :

1) En supposant toujours l et J de classe C^1 au moins, alors $j_h(\phi)$ est dérivable et sa dérivée a pour expression :

$$j'_h(\phi) = \eta_{h2}^{*\phi} u_{h1}^\phi(l) - \eta_{h1}^{*\phi} u_{h2}^\phi(l) + \lambda_{h2}^{*\phi} p_{h1}^{*\phi}(l) - \lambda_{h1}^{*\phi} p_{h2}^{*\phi}(l) + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U_h^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P_h^{*\phi})$$

où

— $(U_h^\phi, \lambda_h^{*\phi}) \in \mathbf{v}_h \times \mathbb{R}^3$ est solution du problème mixte discret :

$$\begin{cases} a(U_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \lambda_h^{*\phi}) = l(\phi, V_h) & \forall V_h \in \mathbf{v}_h & (21) \\ b(\phi, U_h^\phi, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3 & (22) \end{cases}$$

— l'état adjoint $(P_h^{*\phi}, \eta_h^{*\phi}) \in \mathbf{v}_h \times \mathbb{R}^3$ est solution des équations :

$$\begin{cases} a(P_h^{*\phi}, V_h) + b(\phi, V_h, \eta_h^{*\phi}) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V_h & \forall V_h \in \mathbf{v}_h & (23) \\ b(\phi, P_h^{*\phi}, \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathbb{R}^3 & (24) \end{cases}$$

Nous pouvons à présent comparer le gradient discret au gradient continu discrétisé.

5.3. Égalité entre le gradient continu discrétisé et le gradient discret

Rappelons l'expression du gradient continu discrétisé :

$$[j'(\phi)]_h = \eta_{h2}^\phi u_{h1}^\phi(l) - \eta_{h1}^\phi u_{h2}^\phi(l) + \lambda_{h2}^\phi p_{h1}^\phi(l) - \lambda_{h1}^\phi p_{h2}^\phi(l) + \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi, U_h^\phi) + \frac{\partial l}{\partial \phi}(\phi, P_h^\phi) \quad (20)$$

où les états directs et adjoints approchés vérifient les équations :

$$U_h^\phi \in \omega_{h\phi} \quad a(U_h^\phi, V_h) = l(\phi; V_h) \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi} \quad (13)$$

$$\lambda_h^\phi \in \mathbb{R}^3 \quad a(U_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \lambda_h^\phi) = l(\phi, V_h) \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h \quad (15)$$

$$P_h^\phi \in \omega_{h\phi} \quad a(P_h^\phi, V_h) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V_h \quad \forall V_h \in \omega_{h\phi} \quad (18)$$

$$\eta_h^\phi \in \mathbb{R}^3 \quad a(P_h^\phi, V_h) + b(\phi, V_h, \eta_h^\phi) = \frac{\partial J}{\partial V}(\phi, U_h^\phi) \cdot V_h \quad \forall V_h \in \mathbf{v}_h. \quad (19)$$

D'après les expressions du gradient discret et du gradient continu discrétisé, il suffit, pour établir l'égalité entre les deux, de comparer les deux triplets $(\lambda_h^\phi, P_h^\phi, \eta_h^\phi)$ et $(\lambda_h^{*\phi}, P_h^{*\phi}, \eta_h^{*\phi})$, ce dernier étant déterminé à l'aide des équations (21), (22), (23), (24). Or, d'après la proposition 5, le système mixte discret (21)-(22) est équivalent au système (13)-(21), soit encore au système (13)-(15), et possède une solution unique. Le même raisonnement s'applique aux systèmes adjoints (23)-(24) et (18)-(19). Par conséquent, nous avons les trois égalités :

$$\lambda_h^\phi = \lambda_h^{*\phi} \quad P_h^\phi = P_h^{*\phi} \quad \eta_h^\phi = \eta_h^{*\phi}.$$

De ces égalités découle l'égalité entre le gradient discret et le gradient continu discrétisé. On peut donc utiliser ce dernier comme direction de descente dans les algorithmes d'optimisation, qui deviennent alors convergents (cf. [5]).

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Afin de valider nos tests numériques, nous avons faits les calculs dans un cas particulier où nous sommes en mesure d'avoir une solution analytique.

6.1. Calcul de la solution analytique dans un cas test

Les deux poutres sont ici identiques et sont soumises à des chargements normaux de même densité linéique uniforme. Ainsi, f_1 et \tilde{f}_1 sont nulles, et f_2 est une constante égale à \tilde{f}_2 . On démontre alors, en écrivant les équations fortes du problème mixte et en utilisant des propriétés de symétrie, le résultat suivant :

PROPOSITION 7 :

1) Pour $\phi \neq \pi$, u_2 est le polynôme de degré 4 défini par :

$$u_2(l) = \frac{f_2 l^4}{24 EA} \frac{1}{1 + \frac{l^2 S}{12 A} \tan^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}$$

$$\frac{du_2}{ds}(l) = 0$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2}(l) = -\frac{f_2 l^2}{6 EA} + \frac{S}{2 A} \tan^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) u_2(l)$$

$$\frac{d^3 u_2}{ds^3}(l) = \frac{S}{l A} \tan^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) u_2(l)$$

$$\frac{d^4 u_2}{ds^4}(l) = \frac{f_2}{EA}$$

et :

$$u_1(s) = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) u_2(l) \frac{s}{l} \quad \forall s \in I$$

$$\tilde{u}_1(\tilde{s}) = -u_1(2l - \tilde{s}) \quad \forall \tilde{s} \in \tilde{I}$$

$$\tilde{u}_2(\tilde{s}) = u_2(2l - \tilde{s}) \quad \forall \tilde{s} \in \tilde{I}$$

2) Les fonctions :

$$\phi \rightarrow u_2(l), \frac{du_2}{ds}(l), \frac{d^2 u_2}{ds^2}(l), \frac{d^3 u_2}{ds^3}(l), \frac{d^4 u_2}{ds^4}(l)$$

sont continues en π . Par conséquent, les égalités précédentes sont valables en π .

Nous allons alors minimiser les deux fonctionnelles :

$$j_1(\phi) = \|u^\phi(l)\|_{\mathbb{R}^2}^2 = [u_1^\phi(l)]^2 + [u_2^\phi(l)]^2$$

$$j_2(\phi) = l(\phi, U^\phi).$$

Nous pouvons appliquer à ces critères les résultats démontrés dans ce chapitre. En effet,

$$j_1(\phi) = J_1(\phi, U^\phi) \quad \text{avec} \quad J_1(\phi, V) = [v_1(l)]^2 + [v_2(l)]^2$$

$$j_2(\phi) = J_2(\phi, U^\phi) \quad \text{avec} \quad J_2(\phi, V) = l(\phi, V).$$

Les fonctionnelles J_1 et J_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbf{v}$, et en outre, elles sont ici indépendantes de ϕ . Après calculs, on démontre que ces deux fonctionnelles admettent leur minimum en π . Nous allons maintenant

minimiser ces deux coûts numériquement en utilisant l'algorithme de descente de Lemaréchal. Le logiciel d'optimisation, qui est pour nous une boîte noire, appelle plusieurs fois par itération un simulateur, que nous devons créer, et qui doit fournir une approximation de la fonctionnelle coût et de sa dérivée. Nous choisissons donc ici comme approximation de la dérivée le gradient continu discrétisé, calculé à l'aide du code éléments finis déjà précisé. Comme nous allons le voir, les résultats numériques obtenus coïncident avec la solution analytique.

Dans tous nos tests, les données mécaniques sont, en unités internationales :

$$E = 2 \cdot 10^5, A = 1,24 \cdot 10^{-5}, S = 10^{-4}, l = 1, f_2 = 1$$

et nous avons choisi 20 éléments finis, c'est-à-dire 10 par poutre.

Pour valider nos résultats numériques faits sur Appolo, nous avons testé sur la forme initiale si le gradient continu discrétisé est proche de la dérivée exacte, calculée analytiquement. D'autre part, nous avons vérifié que, pour des formes initiales différentes, nous obtenons le même minimum.

6.2. Optimisation du coût : $j_1(\phi)$

Le coût exact minimum est 0.

a) Angle initial $\phi = \pi/2$.

Nous comparons d'abord, pour l'angle initial, le gradient continu discrétisé avec la dérivée exacte de j_1 , calculée à partir de son expression détaillée précédemment

$$[j'((\pi/2))]_h = -0,1227 \times 10^{-3} \quad j'(\pi/2) = -0,1228 \times 10^{-3}.$$

Le test d'arrêt est alors obtenu au bout de quatre itérations, avec un nombre moyen N_{sim} d'analyses par éléments finis égal à 12. L'angle optimal est $\phi^* = 3,1416$, proche de $\pi = 3,14159...$

Itération	1	2	3	4
Coût approché	2,02 E-04	0,2149 E-6	0,8120 E-9	2,00 E-15

Dès la deuxième itération, le coût décroît fortement. Le coût optimal obtenu numériquement est égal à 2×10^{-15} .

b) Angle initial : $\phi = \pi/4$

$$[j'(\pi/4)]_h = -0,45359 E-4 \quad j'(\pi/4) = -0,4536 E-5.$$

Le même test d'arrêt est ici obtenu en deux itérations, avec $N_{sim} = 5$ et l'angle optimal est encore : $\phi^* = 3,1416$

Itération	1	2
Coût approché	0,0002658	2 E-15

6.3. Optimisation du coût : $j_2(\phi)$

Le coût exact minimum est égal à $1,12 \times 10^{-3}$.

a) Angle initial : $\phi = \pi/2$

$$[j'(\pi/2)]_h = -0,80737 E-2 \quad j'(\pi/2) = -0,80773 E-2$$

Itération	1	2	3
Coût approché	0,011165	0,0011212	0,00111995

$N_{sim} = 9, \phi^* = 3,1416$

Le coût optimal obtenu numériquement est une bonne approximation du coût minimum exact.

b) Angle initial : $\phi = 2 \pi/3$

$$[j'(2 \pi/3)]_h = -0,85986 E-2 \quad j'(2 \pi/3) = -0,8599 E-2$$

Itération	1	2	3	4
Coût approché	0,0066903	0,0011175	0,00111994	0,00111994

$N_{sim} = 9, \phi^* = 3,1416$.

CONCLUSION

Nous venons de voir sur des exemples numériques que l'utilisation du gradient continu discrétisé dans un algorithme de descente permet d'approcher le minimum exact correctement, sans avoir besoin de connaître le code éléments finis. Nous aurions pu également minimiser le coût en choisissant par exemple comme variables de conception, l'épaisseur ou la longueur des poutres. Dans ce dernier cas, l'espace des fonctions tests dépend encore de la variable de conception 1, mais, pour se placer dans un espace indépendant de cette variable, on introduit classiquement une

paramétrisation des intervalles I et \tilde{I} et on effectue ensuite un changement de variables. Nous avons considéré ici uniquement le cas de la charnière rigide, mais tous les résultats sont encore valables pour une charnière élastique, où la rotation de la normale est alors libre.

Les raisonnements faits ici semblent pouvoir s'adapter à des structures plus complexes, comme les jonctions de plaques, d'arches et peut-être aussi aux jonctions de coques. Dans le cas des jonctions de plaques, la charnière n'est pas réduite à un point, mais à une droite. Par suite, les conditions de transmission sont des égalités dans des espaces de Sobolev à exposants fractionnaires, et les multiplicateurs de Lagrange doivent appartenir aux duaux de ces espaces. Ainsi, de nouvelles difficultés théoriques se présentent. Mais si on arrive encore à exprimer le gradient continu discrétisé simplement, son intérêt sera accru, car le gradient discret nécessite encore ici le calcul de la dérivée de la matrice de rigidité devenue complexe.

RÉFÉRENCES

- [1] M. BERNADOU and Y. DUCATEL, *Approximation of general arch problems by straight beam elements*, Numer. Math., 40 (1982), pp. 1-29.
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle - théorie et applications*, Collections *Mathématiques appliquées pour la Maîtrise*, Masson (1983).
- [3] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*, RAIRO, Modél. Math. Anal. Numer. 2, 129-151 (1974).
- [4] H. CARTAN, *Cours de Calcul Différentiel*, Collection *Méthodes*, Hermann, Paris, 1967.
- [5] J. CÉA, *Problems of shape optimal design. Optimisation of distributed parameter structures*, eds. E. J. Haug et J. Céa, Sijthoff et Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Holland (1981).
- [6] D. CHENAIS, C. KNOPF-LENOIR, *Sur la communication entre logiciels éléments finis et optimiseur en contrôle distribué*. Colloque calculs des structures et intelligence artificielle, Giens 1988, Editions Pluralis, Vol. 2, pp. 273-296.
- [7] P. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [8] A. HABBAL, *Optimisation non différentiable de formes d'arches*, thèse de troisième cycle, Université de Nice, 1990.
- [9] S. FAYOLLE, *Sur l'analyse numérique de raccords de poutres et de plaques*, thèse de troisième cycle, Université de Paris VI, 1987.
- [10] B. ROUSSELET, *Note on design differentiability of the static response of elastic structures*, J. Structural Mech. 10, 1982, pp. 353-358.