M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

M. DAUGE
S. NICAISE
M. BOURLARD
J. MBARO-SAMAN LUBUMA

Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. II : Quelques opérateurs particuliers

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 24, nº 3 (1990), p. 343-367

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_3_343_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 24, n° 3, 1990, p. 343 à 367)

COEFFICIENTS DES SINGULARITÉS POUR DES PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES SUR UN DOMAINE A POINTS CONIQUES II : QUELQUES OPÉRATEURS PARTICULIERS (*)

par M. DAUGE [1] et S. NICAISE [2]
M. BOURLARD [3] et J. Mbaro-Saman LUBUMA [4]

Résumé. — *Dans la première partie de ce travail, nous avions donné des formules générales pour les coefficients des singularités dans le cas du problème de Dirichlet pour un opérateur elliptique quelconque. Ici, nous précisons ces formules pour le laplacien sur un cône, le bilaplacien puis l'opérateur de Helmholtz sur un polygone ; enfin nous adaptons nos résultats pour un autre type de conditions aux limites, à savoir le problème à dérivées obliques mêlées, toujours sur un polygone.*

Abstract. — *In the first part of this work, we have given general formulae for the coefficients of the singularities for the Dirichlet problem associated to any elliptic operator. Now, we make those formulae more precise for the Laplace operator on a cone, the biharmonic operator and the Helmholtz operator on a polygon ; then, we extend our results to another boundary value problem : the mixed oblique derivative problem on a polygon.*

Cet article est la deuxième partie d'une série de deux, dont le but est de décrire les coefficients des singularités intervenant dans la décomposition des solutions de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines à singularités coniques. Nous utilisons donc ici les mêmes notations que dans la première partie, sans répéter les hypothèses ni les résultats principaux. De plus, nous avons adopté une numérotation continue des paragraphes. Nous avons donné les grandes lignes de notre plan au début de la première partie. Rappelons que les §§ 1-4 constituent la première partie ; cette

(*) Reçu en juin 1988.
[1] Département de Mathématiques, Université de Nantes, U.A. C.N.R.S. 758, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes, France.
[2] Département de Mathématiques, Université de l'État à Mons, 17 place Warocqué, 7000 Mons, Belgique.
[3] Département de Mathématiques, Université de l'État à Mons, 15 avenue Maistriau, 7000 Mons, Belgique.
[4] Département de Mathématiques, Université de Annaba, B.P. n° 12, Annaba, Algérie.

deuxième partie se compose des §§ 5 à 8.

Lorsque nous renvoyons le lecteur au sous-§ 2.D (par exemple), il s'agit évidemment du sous-§ 2.D du § 2 de la première partie.

Dans cette deuxième partie, nous appliquons les résultats de la première partie à quatre types d'opérateurs particuliers, qui sont tous à coefficients constants.

Nous avons vu que les solutions u du problème de Dirichlet associé à un opérateur L sur un domaine Ω admettant un point conique peuvent être décomposées dans des espaces de Sobolev à poids sous la forme suivante :

$$u = v + \sum_{\lambda, k, \mu} \gamma_k^{\lambda, \mu} S_k^{\lambda, \mu}$$

où v est régulier et avec l'expression (4.9) suivante pour les coefficients :

$$\gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_\Omega Lu \,.\, \overline{T_k^{\lambda, \mu}} - \int_\Omega u \,.\, \bar{L}^* \overline{T_k^{\lambda, \mu}} \,.$$

Les $S_k^{\lambda, \mu}$ et les $T_k^{\lambda, \mu}$ sont des fonctions qui ne dépendent que de Ω et de L. Les $S_k^{\lambda, \mu}$ sont définies à l'aide des chaînes de Jordan associées à la famille holomorphe $\mathscr{L}(\lambda)$ — voir § 3 dans la première partie — et les $T_k^{\lambda, \mu}$ à l'aide des chaînes de Jordan duales associées à la famille holomorphe $\mathscr{L}(\lambda)^*$.

Pour les opérateurs que nous étudions, nous allons pouvoir préciser les chaînes de Jordan et les chaînes duales et en déduire l'expression des $S_k^{\lambda, \mu}$ et des $T_k^{\lambda, \mu}$: pour l'opérateur $\Delta - \xi I$, cela demandera un travail supplémentaire car il n'est pas homogène. Nous appliquerons les résultats principaux de la première partie, à savoir les théorèmes (4.7), (4.19) et (4.35).

On trouvera les hypothèses (H_1) et (H_1') au § 2.B, (H_2) au § 4.A et (H_3) au § 4.B.

5. LE LAPLACIEN DANS UN CÔNE DE $\mathbb{R}^n$

Ω désigne toujours un domaine borné avec un singularité conique en 0 comme dans la première partie (*cf.* (1.2)) ; mais maintenant l'opérateur L est le laplacien $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$. On a donc $L = L_0$ dans ce cas et l'opérateur (1.4) est :

$$\mathscr{L}(\lambda) = \lambda^2 + (n-2)\lambda - \delta_G$$

où δ_G est l'opérateur de Laplace-Beltrami positif sur G avec conditions de bord homogènes de Dirichlet. Soit $\{\nu_\ell, \ell \in \mathbb{N}^*\}$ la suite croissante de ses valeurs propres, avec répétition selon la multiplicité, et soit $\{\varphi_\ell\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés.

$\mathscr{L}(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\lambda^2 + (n-2)\lambda$ n'est pas une valeur propre de δ_G.

On s'intéresse aux $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\lambda > m - \frac{n}{2}$ (*cf.* (4.7)), donc ici, $\operatorname{Re}\lambda > 1 - \frac{n}{2}$. Ainsi $\lambda^2 + (n-2)\lambda = \nu_\ell$ si et seulement si

$$\lambda = \lambda_\ell \equiv 1 - \frac{n}{2} + \sqrt{\nu_\ell + \left(1 - \frac{n}{2}\right)^2}\,. \tag{5.1}$$

Comme δ_G est auto-adjoint, il est immédiat que les pôles de $\mathscr{L}(\lambda)$ en $\lambda = \lambda_\ell$ sont d'ordre 1 et que les chaînes de Jordan sont de longueur 1. Ce sont tout simplement les φ_ℓ. Quant aux chaînes duales, comme $\langle \varphi_\ell, \varphi_{\ell'} \rangle = \delta_{\ell,\ell'}$, et comme $\mathscr{L}^{(1)}(\lambda) = 2\lambda + n - 2$, en posant :

$$\psi_\ell = (2\lambda_\ell + n - 2)^{-1}\varphi_\ell\,, \tag{5.2}$$

on a la relation (3.6) qui, ici, s'écrit :

$$\int_G \mathscr{L}^{(1)}(\lambda_\ell)\,\varphi_\ell\,\bar{\psi}_{\ell'} = \delta_{\ell,\ell'}\,. \tag{5.3}$$

Selon (3.4) et (3.7) :

$$\sigma_\ell = r^{\lambda_\ell}\varphi_\ell(\theta) \quad \text{et} \quad \tau_\ell = -r^{-\lambda_\ell + 2 - n}\psi_\ell(\theta)\,. \tag{5.4}$$

Et selon (4.1) :

$$S_\ell = \eta\sigma_\ell \quad \text{et} \quad T_\ell = \eta\tau_\ell \tag{5.5}$$

et on définit K_ℓ selon (4.6).

(5.6) *Remarque :* Si la dimension est deux et si l'ouverture de Ω est $\omega \in]0, 2\pi[$, on peut poser :

$$\varphi_\ell(\theta) = \sin\frac{\ell\pi}{\omega}\theta \quad \text{et} \quad \psi_\ell(\theta) = \frac{1}{\ell\pi}\sin\frac{\ell\pi}{\omega}\theta$$

pour $\lambda_\ell = \frac{\ell\pi}{\omega}$. Pour ce choix, on a bien la relation (5.3). On a alors :

$$\begin{aligned} S_\ell &= \eta r^{\ell\pi/\omega}\sin\frac{\ell\pi}{\omega}\theta \\ T_\ell &= -\frac{1}{\ell\pi}\eta r^{-\ell\pi/\omega}\sin\frac{\ell\pi}{\omega}\theta\,. \end{aligned}$$

N.B. : Dans la note [D-L-N], nous aurions dû poser :

$$U_m = - r^{-m\pi/\omega} \sin \frac{m\pi}{\omega} \theta \text{ au lieu de } U_m = r^{-m\pi/\omega} \sin \frac{m\pi}{\omega} \theta . \quad \blacksquare$$

Voici l'adaptation du théorème (4.7) au laplacien, avec le poids 0 :

(5.7) THÉORÈME : *Soient s, p vérifiant* (H_1) *ou* (H_1'). *On suppose que :*

$$s + 1 - \frac{n}{p} \notin \{\lambda_\ell / \ell \in \mathbb{N}^*\} \equiv \Lambda$$

ou équivalemment, que $\left(s + 1 - \frac{n}{p}\right)\left(s - 1 - \frac{n}{p} + n\right)$ *n'est pas valeur propre de* δ_G. *Soit* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *telle que* $\Delta u = f$ *soit dans* $V_{p,0}^{s-1}(\Omega)$. *Alors :*

$$u = v + \sum_{\ell} \gamma_\ell \, \eta r^{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\theta)$$

où la somme est étendue aux ℓ *tels que*

$$\lambda_\ell < s + 1 - \frac{n}{p},$$

où $v \in V_{p,0}^{s+1}(\Omega)$ *et*

$$\gamma_\ell = \int_\Omega \Delta(\eta u) \, \tau_\ell = (2 - n - 2\lambda_\ell)^{-1} \int_\Omega \Delta(\eta u) \, r^{-\lambda_\ell + 2 - n} \varphi_\ell(\theta) \, dx$$

ou encore :

$$\gamma_\ell = \int_\Omega f K_\ell = (2 - n - 2\lambda_\ell)^{-1} \int_\Omega f(\eta r^{-\lambda_\ell + 2 - n} \varphi_\ell(\theta) - X_\ell) \, dx$$

où $X_\ell \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *est tel que* $\Delta X_\ell = \Delta(\eta r^{-\lambda_\ell + 2 - n} \varphi_\ell)$. *Nous avons aussi la formule* (4.9).

Pour se ramener aux espaces de Sobolev ordinaires, selon le § 2.D, nous pratiquons la résolution polynomiale : pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on cherche w_α solution du problème de Dirichlet sur le cône :

$$\text{(5.8)} \qquad \begin{cases} \Delta w_\alpha = x^\alpha \text{ sur } \Gamma \\ \eta w_\alpha \in \mathring{H}^1(\Gamma) . \end{cases}$$

Si $|\alpha| + 2 \notin \Lambda = \{\lambda_\ell / \ell \in \mathbb{N}^*\}$, alors on peut trouver w_α de la forme :

$$w_\alpha = r^{|\alpha| + 2} \mathscr{W}_\alpha(\theta)$$

où $\mathscr{W}_\alpha(\theta)$ est solution de :

$$(5.9) \quad -\delta_G \mathscr{W}_\alpha + (|\alpha| + 2)(|\alpha| + n)\mathscr{W}_\alpha = \theta^\alpha, \quad \mathscr{W}_\alpha \in \mathring{H}^1(G).$$

En dimension 2, dans ce cas-là, w_α est un polynôme ; et de même en dimension supérieure si Γ est un cône de révolution (ou plus généralement, si Γ est contenu dans l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré 2, autrement dit Γ est un cône algébrique de d° 2 (*cf.* [D], § 4)). Par contre, en général, w_α n'est pas un polynôme si $n \geqslant 3$.

Si $|\alpha| + 2 \in \Lambda$, soit ℓ tel que $|\alpha| + 2 = \lambda_\ell$. Alors :

$$(|\alpha| + 2)(|\alpha| + n) = \nu_\ell$$

et (5.9) n'admet pas de solution si $\int_G \theta^\alpha \varphi_\ell(\theta)\, d\theta \neq 0$.

On peut alors trouver w_α sous la forme :

$$w_\alpha = r^{|\alpha| + 2}(\mathscr{W}_{\alpha,0}(\theta) + \mathscr{W}_{\alpha,1} \operatorname{Log} r)$$

où $\mathscr{W}_{\alpha,0}$ et $\mathscr{W}_{\alpha,1}$ sont solutions de :

$$(5.10) \quad \begin{cases} -\delta_G \mathscr{W}_{\alpha,1} + \nu_\ell \mathscr{W}_{\alpha,1} = 0, & \mathscr{W}_{\alpha,1} \in \mathring{H}^1(G) \\ -\delta_G \mathscr{W}_{\alpha,0} + \nu_\ell \mathscr{W}_{\alpha,0} = \theta^\alpha - (2\lambda_\ell + n - 2)\mathscr{W}_{\alpha,1}, & w_{\alpha,0} \in \mathring{H}^1(G). \end{cases}$$

En effet, on prend $\mathscr{W}_{\alpha,1} = c\varphi_\ell$ et on choisit c égal à $(2\lambda_\ell + n - 2)^{-1} \int_G \theta^\alpha \varphi_\ell(\theta)\, d\theta$.

Nous adaptons le théorème (4.35) :

(5.11) THÉORÈME : *On fait les mêmes hypothèses sur s, p et n qu'au théorème* (5.7) *et on suppose de plus que* $s + 1 - \dfrac{n}{p} \notin \mathbb{N}$. *Soit* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *tel que* $\Delta u = f \in W_p^{s-1}(\Omega)$.
Alors :

$$u = v + \sum_\ell \gamma_\ell S_\ell + \eta \sum_{|\alpha| < s - 1 - n/p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0)\, w_\alpha$$

où $v \in V_{p,0}^{s+1}(\Omega)$ *et*

$$\gamma_\ell = \int_\Omega \Delta[\eta(u - W)]\, \tau_\ell \ \textit{ou encore}\ \gamma_\ell = \int_\Omega [f - \Delta(\eta W)]\, K_\ell$$

avec $W = \sum_{|\alpha| < s - 1 - n/p} \dfrac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0)\, w_\alpha$. *Nous avons aussi la formule* (4.37).

(5.12) *Remarque :* Si $n = 2$ et si ω désigne l'ouverture de Ω, lorsque $\ell\pi/\omega \notin \mathbb{N}$ et si $\ell\pi/\omega < s + 1 - 2/p$, S_ℓ n'est pas dans $W_p^{s+1}(\Omega)$. Mais lorsque $\ell\pi/\omega \in \mathbb{N}$, S_ℓ est un polynôme et pour $|\alpha| + 2 = \ell\pi/\omega$ les w_α sont la somme d'un polynôme et de

$$r^{\ell\pi/\omega}\left(\sin \frac{\ell\pi}{\omega}\,\theta \operatorname{Log} r + \theta \cos \frac{\ell\pi}{\omega}\,\theta\right) .$$

La situation est analogue en dimension supérieure si Γ est un cône algébrique de degré 2. ■

(5.13) *Remarque :* Si $p = 2$, et si $s + 1 - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, on peut encore avoir une décomposition avec partie régulière dans $H^{s+1}(\Omega)$ (*cf.* remarque (2.20/2). ■

6. LE BILAPLACIEN DANS UN DOMAINE PLAN AVEC POINT ANGULEUX

Ω désigne un domaine borné plan, à bord régulier sauf en 0, au voisinage duquel Ω coïncide avec un secteur Γ d'ouverture ω.

On considère sur Ω le problème de Dirichlet pour le bilaplacien :

$$\Delta^2 u = f\,, \qquad u \in \mathring{H}^2(\Omega)\,.$$

Les singularités de ce problème sont, comme d'habitude, reliées aux pôles de l'inverse de l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ associé à Δ^2 sur le secteur Γ. Rappelons que $\mathscr{L}(\lambda)$ est l'opérateur $\mathscr{L}(\theta\,;\lambda, D_\theta)$ agissant de $\mathring{H}^2(]0,\omega[)$ dans $H^{-2}(]0,\omega[)$ où

$$\mathscr{L}(\theta\,; r\partial_r, D_\theta) = r^4\,\Delta^2\,.$$

Ici, on peut calculer $\mathscr{L}(\theta\,;\lambda, D_\theta)$. Il est à coefficients constants (voir par exemple (5.26′) dans [K] :

$$\mathscr{L}(\theta\,;\lambda,\partial_\theta) = \partial_\theta^4 + (\lambda^2 + (\lambda-2)^2)\,\partial_\theta^2 + (\lambda-2)^2\,\lambda^2\,. \tag{6.1}$$

La fonction entière F suivante (*cf.* (3.1.4) dans [G2]) :

$$F_\omega(\lambda) = \frac{\sin^2(\lambda-1)\,\omega - (\lambda-1)^2 \sin^2\omega}{\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2} \tag{6.2}$$

est une fonction discriminante pour le problème de Dirichlet associé au bilaplacien sur un secteur d'ouverture ω ; c'est-à-dire que $F_\omega(\lambda)\,\mathscr{L}(\lambda)^{-1}$ est une fonction entière à valeurs opérateurs.

Ainsi, à chaque zéro de F_ω est associé une ou plusieurs singularités. La situation étant différente selon que ω est égal à 2π (cas de la fissure) ou non, nous traitons ces deux cas séparément.

6.A Cas où $\omega < 2\pi$

Soit λ un zéro de F_ω de partie réelle $> 1 \left(= m - \frac{n}{2} \right)$, et soit $K(\lambda)$ sa multiplicité. $K(\lambda)$ vaut 1 ou 2 et $\mathscr{L}^{-1}$ a un pôle d'ordre $K(\lambda)$ en λ. De toutes façons, le noyau de $\mathscr{L}(\lambda)$ est de dimension 1. Il n'y a donc qu'une chaîne de Jordan. Posons :

$$\sigma_1^\lambda = r^\lambda \varphi_1^\lambda(\theta) \tag{6.3}$$

où $\varphi_1^\lambda(\theta)$ est une base du noyau de $\mathscr{L}(\lambda)$.

Si $K(\lambda) = 1$, c'est la seule singularité. Sinon, i.e. si $K(\lambda) = 2$, il existe une solution φ_2^λ au problème (*cf.* (3.2)) :

$$\mathscr{L}(\lambda)\, \varphi_2^\lambda = - \mathscr{L}'(\lambda)\, \varphi_1^\lambda$$

et on pose, selon (3.4) :

$$\sigma_2^\lambda = r^\lambda(\operatorname{Log} r\, \varphi_1^\lambda(\theta) + \varphi_2^\lambda(\theta))\,. \tag{6.4}$$

Pour des expressions explicites de $\varphi_1^\lambda(\theta)$ et $\varphi_2^\lambda(\theta)$ voir par exemple (3.1.6) et (3.1.7) dans [G2].

Définissons les singularités duales.

Selon (3.8), $\mathscr{L}(\lambda)^* = \mathscr{L}(-\bar{\lambda} + 2)$. Or, on constate immédiatement sur l'expression (6.1) que

$$\mathscr{L}(-\bar{\lambda} + 2) = \mathscr{L}(\bar{\lambda}) = \bar{\mathscr{L}}(\bar{\lambda})\,.$$

Cela provient de ce que Δ^2 est autoadjoint.

Ainsi, peut-on prendre, lorsque $K(\lambda) = 1$:

$$\psi_1^\lambda = c_1^\lambda\, \bar{\varphi}_1^\lambda$$

où c_1^λ est choisi de sorte que (*cf.* (3.6)) :

$$\bar{c}_1^\lambda \int_0^\omega \mathscr{L}'(\lambda)\, \varphi_1^\lambda \,.\, \varphi_1^\lambda = 1\,.$$

On pose alors :

$$\tau_1^\lambda = - c_1^\lambda\, r^{2-\bar{\lambda}}\, \bar{\varphi}_1^\lambda\,. \tag{6.5}$$

Lorsque $K(\lambda) = 2$, on peut prendre, pour la même raison :

$$\psi_1^\lambda = c_1^\lambda \, \bar{\varphi}_1^\lambda$$
$$\psi_2^\lambda = c_1^\lambda \, \bar{\varphi}_2^\lambda + c_2^\lambda \, \bar{\varphi}_1^\lambda$$

(ce qui décrit toutes les solutions du système :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\bar{\lambda}) \, \psi_1^\lambda = 0 \\ \mathscr{L}(\bar{\lambda}) \, \psi_2^\lambda + \mathscr{L}'(\bar{\lambda}) \, \psi_1^\lambda = 0) \end{cases}$$

avec c_1^λ et c_2^λ choisis de sorte que (3.6) soit satisfait, i.e. :

$$\bar{c}_1^\lambda = \left[\int_0^\omega \left(\mathscr{L}'(\lambda) \, \varphi_2^\lambda + \frac{1}{2} \mathscr{L}''(\lambda) \, \varphi_1^\lambda \right) \cdot \varphi_1^\lambda \right]^{-1}$$

$$\bar{c}_2^\lambda = -(\bar{c}_1^\lambda)^2 \int_0^\omega \mathscr{L}'(\lambda) \, \varphi_2^\lambda \cdot \varphi_2^\lambda + \frac{1}{2} \left[\mathscr{L}''(\lambda) \, \varphi_1^\lambda \cdot \varphi_2^\lambda + \mathscr{L}''(\lambda) \, \varphi_2^\lambda \cdot \varphi_1^\lambda \right]$$
$$+ \frac{1}{6} \mathscr{L}^{(3)}(\lambda) \, \varphi_1^\lambda \cdot \varphi_1^\lambda \, .$$

On pose alors, selon (3.7) :

$$\tau_1^\lambda = -r^{2-\bar{\lambda}} (\operatorname{Log} r \psi_1^\lambda(\theta) + \psi_2^\lambda(\theta))$$
$$\tau_2^\lambda = -r^{2-\bar{\lambda}} \psi_1^\lambda(\theta)$$

i.e. :

$$\text{(6.6)} \qquad \begin{cases} \tau_1^\lambda = -r^{2-\bar{\lambda}} [(c_1^\lambda \operatorname{Log} r + c_2^\lambda) \, \bar{\varphi}_1^\lambda(\theta) + c_1^\lambda \, \bar{\varphi}_2^\lambda(\theta)] \\ \tau_2^\lambda = -c_1^\lambda \, r^{2-\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_1^\lambda(\theta) \, . \end{cases}$$

Notons enfin que la fonction F_ω ne s'annule sur aucun entier $\lambda \geqslant 3$ et que $F_\omega(2) = 0$ si et seulement si $\operatorname{tg} \omega = \omega$ (i.e. $\omega \approx 1{,}43 \, \pi$). Dans ce cas $K(2) = 1$ et on peut prendre :

$$\varphi_1^\lambda(\theta) = 2 \, \omega \sin^2 \theta + \sin 2 \, \theta - 2 \, \theta \, .$$

Le théorème (4.7) permet d'obtenir :

(6.7) THÉORÈME : *On suppose $\omega < 2 \, \pi$. Soient s, p tels que F_ω n'admette pas de zéro de partie réelle égale à $s + 2 - 2/p$. Soit $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ telle que $\Delta^2 u = f$ soit dans $V_{p,0}^{s-2}(\Omega)$. Alors*

$$\text{(6.8)} \qquad u = v + \sum_\lambda \sum_{1 \leqslant k \leqslant K(\lambda)} \gamma_k^\lambda \, S_k^\lambda$$

où

- $v \in V_{p,0}^{s+2}(\Omega)$;
- $S_k^\lambda = \eta\sigma_k^\lambda$, *avec* σ_k^λ *donné par* (6.3), (6.4) ;
- *la somme est étendue aux zéros de* F *de partie réelle dans* $]1, s+2-2/p[$;
- *les coefficients sont donnés par*

$$\gamma_k^\lambda = \int_\Omega \Delta^2(\eta u)\,\bar{\tau}_k^\lambda \quad \textit{ou encore} \quad \gamma_k^\lambda = \int_\Omega f\bar{K}_k^\lambda$$

avec τ_k^λ *donné par* (6.5) *ou* (6.6) *et* $K_k^\lambda = \eta\tau_k^\lambda - X_k^\lambda$ *avec* $X_k^\lambda \in \mathring{H}^2(\Omega)$ *solution de* $\Delta^2 X_k^\lambda = \Delta^2(\eta\tau_k^\lambda)$.

Comme F_ω n'a pas de zéro entier pour $\lambda \geqslant 4$, pour tout polynôme Q il existe un unique polynôme $P = P(Q)$ tel que

$$\Delta^2 P = Q \text{ et } P \text{ s'annule à l'ordre 2 sur } \partial\Gamma\,.$$

(6.9) COROLLAIRE : *Soient* s *et* p *vérifiant* (H_1) *ou* (H_1') *et l'hypothèse de* (6.7). *Si* $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ *est tel que* $\Delta^2 u = f$ *soit dans* $W_p^{s-2}(\Omega)$, *alors* u *admet la décomposition* (6.8) *avec* $v \in W_p^{s+2}(\Omega)$ *et les* γ_k^λ *donnés par :*

$$\gamma_k^\lambda = \int_\Omega \Delta^2(\eta(u-W))\,\bar{\tau}_k^\lambda \tag{6.10}$$

ou encore

$$\gamma_k^\lambda = \int_\Omega (f - \Delta^2(\eta W))\,\bar{K}_k^\lambda \tag{6.11}$$

avec W *le polynôme* $P(Q)$ *associé à*

$$Q = \sum_{|\alpha| < s-2-2/p} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(0)\,X^\alpha\,.$$

6.B Cas de la fissure

Lorsque $\omega = 2\pi$, les zéros de F_ω sont les demi-entiers $\ell/2$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 2$. Sauf pour $\ell = 0{,}4$ ces zéros sont doubles. Cependant, les pôles de $\mathscr{L}^{-1}(\lambda)$ correspondants sont tous simples. Par contre la dimension $M(\lambda)$ du noyau de $\mathscr{L}(\lambda)$ est 1 ou 2. Dans tous les cas :

$$\varphi^{\lambda,1}(\theta) = \cos\lambda\theta - \cos(\lambda-2)\,\theta \tag{6.12}$$

est dans le noyau de $\mathscr{L}(\lambda)$. Si $\lambda = 0$ ou 2, $M(\lambda) = 1$. Sinon $M(\lambda) = 2$ et :

(6.13) $$\varphi^{\lambda, 2}(\theta) = \sin \lambda\theta - \frac{\lambda}{\lambda - 2} \sin (\lambda - 2)\, \theta$$

complète $\varphi^{\lambda, 1}$ pour former une base de Ker $\mathscr{L}(\lambda)$. On pose :

(6.14) $$\sigma^{\lambda, \nu} = r^{\lambda}\, \varphi^{\lambda, \nu} \text{ pour } 1 \leqslant \nu \leqslant M(\lambda)\,.$$

Les fonctions singulières duales sont les

(6.15) $$\tau^{\lambda, \nu} = c^{\lambda, \nu}\, r^{2-\lambda}\, \varphi^{\lambda, \nu}$$

avec :

(6.16) $$c^{\lambda, 1} = \frac{1}{16\,\pi(\lambda - 1)}$$

(6.17) $$c^{\lambda, 2} = -\frac{\lambda - 2}{16\,\pi\lambda(\lambda - 1)}\,.$$

On remarque que, si λ est entier, les $\sigma^{\lambda, \nu}$ sont des polynômes. On peut de plus montrer qu'il n'apparaît pas de singularités pour λ entier dans les espaces de Sobolev ordinaires (*cf.* (15.5) dans [D]). Plus précisément, on peut faire une résolution polynomiale explicite : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, il existe un polynôme w_α homogène de degré $|\alpha| + 4$ solution de :

$$\begin{cases} \Delta^2 w_\alpha = X^\alpha/\alpha! & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ w_\alpha(x_1, 0) = 0 & \forall x_1 \geqslant 0 \\ \partial_y w_\alpha(x_1, 0) = 0 & \forall x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

donné par :

(6.18) $$w_\alpha = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \alpha_1/2} (-1)^i\, (i+1) \frac{x_1^{\alpha_1 - 2i}}{(\alpha_1 - 2i)!} \frac{x_2^{\alpha_2 + 4 + 2i}}{(\alpha_2 + 4 + 2i)!}$$

(6.19) THÉORÈME : $\omega = 2\pi$. *Soient s et p vérifiant* (H_1) *ou* (H_1') *et tels que $s + 2 - \frac{2}{p}$ ne soit pas dans $\mathbb{N}/2$. Soit $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ tel que $\Delta^2 u = f$ soit dans $W_p^{s-2}(\Omega)$. Alors u admet la décomposition :*

$$u = v + \sum_{\lambda = k + 1/2} \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant 2} \gamma^{\lambda, \nu}\, S^{\lambda, \nu}$$

où

- $v \in W_p^{s+2}(\Omega)$,
- $S^{\lambda, \nu} = \eta\sigma^{\lambda, \nu}$ *avec* $\sigma^{\lambda, \nu}$ *donné par* (6.12)-(6.14),

- *la somme est étendue aux* $\lambda < s + 2 - 2/p$,
- *les coefficients sont donnés par les formules du type* (6.10), (6.11) *avec* $\tau^{\lambda, \nu}$ *donné par* (6.15)-(6.17) *et* $W = \sum_{|\alpha| < s - 2 - 2/p} \partial^\alpha f(0)\, w_\alpha$ *avec* w_α *donné par* (6.18).

7. ÉQUATION DE HELMHOLTZ DANS UN DOMAINE PLAN

L'équation de Helmholtz en physique est étudiée surtout dans un domaine ouvert non borné, complémentaire d'un borné de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Nous traitons ici cette équation dans un polygone du plan. Pour un ouvert non borné complémentaire d'un polygone, l'expression des coefficients des singularités s'obtient en multipliant la solution variationnelle par une fonction de troncature.

Ω désigne un domaine plan comme au § 6, avec un angle d'ouverture ω au voisinage du point 0. Pour simplifier les notations, on supposera que $\omega \neq 2\pi$.

ξ désignant un paramètre complexe fixé, on considère le problème de Dirichlet suivant sur Ω.

$$(\Delta - \xi)\, u = f \quad \text{et} \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\,. \tag{7.1}$$

Nous supposons ξ choisi de façon que (7.1) soit uniquement résoluble pour tout f dans $H^{-1}(\Omega)$, autrement dit :

(7.2) $\quad\xi$ n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet sur Ω .

Nous aborderons le cas où (7.2) n'est pas vérifié à la fin de ce paragraphe.

A l'inverse des situations rencontrées aux §§ 5 et 6, l'opérateur n'est pas homogène. Sa partie principale est le laplacien. Ainsi, les parties principales des singularités sont celles associées au laplacien.

7.A. Espaces à poids

Les singularités du laplacien au voisinage de l'origine sont :

$$\sigma^\lambda = r^\lambda \sin \lambda\theta$$

pour $\lambda \in \Lambda = \left\{ \frac{\ell\pi}{\omega} / \ell \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Pour l'opérateur $\Delta - \xi$, les singularités sont :

$$\sum_{q \geq 0} \sigma_q^\lambda \quad \text{avec} \quad \sigma_0^\lambda = \sigma^\lambda\,,$$

où, selon (4.12), σ_q^λ vérifie :

$$(7.3)\qquad \begin{cases}\Delta\sigma_q^\lambda = \xi\sigma_{q-2}^\lambda \\ \sigma_q^\lambda = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \omega .\end{cases}$$

On montre facilement que :

$$(7.4)\qquad \begin{cases}\sigma_{2j+1}^\lambda = 0 \\ \sigma_{2j}^\lambda = [4^j\, j!\,(\lambda+1)\dots(\lambda+j)]^{-1}\,\xi^j\, r^{2j}\,\sigma^\lambda .\end{cases}$$

Ainsi, selon (4.14), pose-t-on :

$$(7.5)\qquad S^\lambda = \eta Q_{s+1-\lambda-2/p}^\lambda(r)\, r^\lambda \sin\lambda\theta$$

où pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \geqslant 0$, Q_μ^λ désigne le polynôme :

$$(7.6)\qquad Q_\mu^\lambda(r) = \sum_{0\leqslant j\leqslant \mu/2} [4^j\, j!\,(\lambda+1)\dots(\lambda+j)]^{-1}\,\xi^j\, r^{2j} .$$

Les singularités duales du laplacien au voisinage de l'origine sont :

$$\tau^\lambda = -\,r^{-\lambda}\sin\lambda\theta$$

et celles associées à $\Delta - \xi$ sont les $\sum_{q\geqslant 0} \tau_q^\lambda$ avec, comme en (7.3),

$$\Delta\tau_q^\lambda = \xi\tau_{q-2}^\lambda .$$

De façon analogue à (7.4), on calcule τ_q^λ et selon (4.15), on pose :

$$(7.7)\qquad T^\lambda = -\,\eta Q_\lambda^{-\lambda}(r)\, r^{-\lambda}\sin\lambda\theta .$$

Enfin, selon (4.18), on pose :

$$(7.8)\qquad K^\lambda = T^\lambda - X^\lambda$$

où X^λ est la solution de :

$$(\Delta - \xi)\,X^\lambda = (\Delta - \xi)\,T^\lambda \quad\text{et}\quad X^\lambda \in \mathring{H}^1(\Omega) .$$

(7.9) THÉORÈME : *Soient s et p vérifiant l'hypothèse* (H_1) *ou* (H_1') *et tels que* $s + 1 - 2/p \notin \Lambda$. *Supposons qu'on ait* (7.2) *et que u soit solution de* (7.1) *avec f dans* $V_{p,0}^{s-1}(\Omega)$. *Alors u se décompose en :*

$$u = v + \sum_{\lambda\in\Lambda} \gamma^\lambda S^\lambda$$

où

- $v \in V_{p,0}^{s+1}(\Omega)$,
- *la somme est étendue aux* $\lambda \in]0, s+1-2/p[$,
- S^λ *est défini en* (7.5)-(7.6),
- γ^λ *est donné par :*

$$\gamma^\lambda = \frac{1}{\lambda\omega}\int_\Omega f K^\lambda\, dx$$

où K^λ *est défini en* (7.8).

C'est une application du théorème (4.19) : dans ce cas particulier, vu la forme de S^λ et T^λ, l'hypothèse (H_3) est inutile.

7.B. Espaces ordinaires

On commence par la résolution polynomiale, à savoir, pour chaque multi-indice α de longueur $|\alpha| < s-1-2/p$, chercher w_α tel que :

$$\text{(7.10)} \qquad \begin{cases} (\Delta - \xi)\, w_\alpha - x^\alpha \in V_{p,0}^{s-1}(\Omega) \\ \eta w_\alpha \in \mathring{H}^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

De façon analogue à (7.3), on cherche w_α sous la forme d'une somme finie

$$\sum_{q \geqslant 0} w_{\alpha,q}$$

où les $w_{\alpha,q}$ vérifient la relation de récurrence

$$\text{(7.11)} \qquad \begin{cases} \Delta w_{\alpha,q} = \xi w_{\alpha,q-2} \\ w_{\alpha,q} = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \omega \end{cases}$$

pour $q \geqslant 2$, et $w_{\alpha,0}$ étant solution de

$$\text{(7.12)} \qquad \begin{cases} \Delta w_{\alpha,0} = x^\alpha \\ \eta w_{\alpha,0} \in \mathring{H}^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

(7.12) n'est autre que le problème (7.10) correspondant au laplacien ($\xi = 0$). Nous avons abordé ce problème en (5.8)-(5.12). Nous avons vu que $w_{\alpha,0}$ est un polynôme si $|\alpha| + 2 \notin \Lambda$, et que, sinon, $w_{\alpha,0}$ est la somme d'un polynôme et d'une singularité proportionnelle à :

$$\text{(7.13)} \qquad e^\lambda = r^\lambda\left[\operatorname{Log} r \,.\, \sin\lambda\theta + \theta\cos\lambda\theta + \omega\,\frac{\cos(\lambda-2)\,\theta - \cos\lambda\theta}{1-\cos 2\omega}\right]$$

avec $\lambda = |\alpha| + 2$. De façon analogue à (7.5), nous posons :

(7.14) $$E^\lambda = \eta Q^\lambda_{s+1-\lambda-2/p}(r)\, e^\lambda .$$

(7.15) PROPOSITION : *Il existe une solution à* (7.10) *de la forme :*

$$w_\alpha = P_\alpha + \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda - |\alpha| \in 2\mathbb{N}^*} a_{\alpha,\lambda}\, E^\lambda$$

où

- *la somme est étendue aux* $\lambda < s + 1 - 2/p$
- P_α *est un polynôme*
- *pour* $\lambda \in \Lambda$ *tel que* $\lambda = |\alpha| + 2 + 2j$, *avec* $j \in \mathbb{N}$:

$$a_{\alpha,\lambda} = (-\xi)^j [\lambda\omega \,.\, 4^j\, j!\,(\lambda - 1) \dots (\lambda - j)]^{-1} \times \int_0^\omega \cos^{\alpha_1}\theta \sin^{\alpha_2}\theta \sin\lambda\theta\, d\theta .$$

Preuve : Comme on l'a déjà dit, on construit w_α sous la forme $\sum w_{\alpha,2j}$ avec $w_{\alpha,0}$ solution de (7.12) et $w_{\alpha,2j}$ pour $j \geqslant 1$, solution de (7.11).

Il suffit de prouver par récurrence sur j que

(7.16) $$w_{\alpha;j} = P_{\alpha,j} + \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda = |\alpha| + 2(j-k+1)} a_{\alpha,\lambda}\, d_{\lambda,k}\, \xi^k\, r^{2k}\, e^\lambda$$

où $P_{\alpha,j}$ est un polynôme homogène de degré $|\alpha| + 2(j+1)$ et avec (*cf.* (7.4) et (7.6)) :

$$d_{\lambda,k} = [4^k\, k!\,(\lambda + 1) \dots . (\lambda + k)]^{-1} .$$

Pour $j = 0$, cela résulte de ce que nous avons dit pour la résolution de (5.10), en remarquant que la fonction normalisée φ_ℓ est remplacée par $\sin\lambda\theta$ qui vérifie $\int_0^\omega \sin^2\lambda\theta\, d\theta = \frac{\omega}{2}$. Ainsi nous avons le résultat suivant :

(7.17) LEMME : *Soit* $P = r^K \mathscr{P}(\theta)$ *un polynôme homogène de degré* K. *Alors le problème*

(7.18) $$\begin{cases} \Delta w = P \\ w = 0 \quad \text{en} \quad \theta = 0, \theta = \omega \end{cases}$$

admet une solution de la forme

$$w = Q + ae^\lambda, \quad \text{où} \quad \lambda = K + 2$$

avec :

- Q *un polynôme homogène de degré* $K + 2$

• $a = 0$ *si* $\lambda \notin \Lambda$

$$a = \frac{1}{\lambda\omega} \int_0^\omega \mathscr{P}(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta \quad si \quad \lambda \in \Lambda .$$

Supposons maintenant que l'on ait (7.16) pour $j - 1$. On résout (7.11) pour $q = 2j$. On voit facilement que :

$$\Delta (d_{\lambda, k+1} \, \xi^{k+1} \, r^{2(k+1)} e^\lambda) = \xi \, d_{\lambda, k} \, \xi^k \, r^{2k} e^\lambda$$

et qu'ainsi, il suffit d'étudier w solution de (7.18) pour $P = \xi P_{\alpha, j-1}$. Selon le lemme (7.17) :

$$w = P_{\alpha, j} + a \, e^\lambda, \text{ avec } \lambda = |\alpha| + 2j + 2 .$$

Il ne reste qu'à prouver que, si $\lambda \in \Lambda$, $a = a_{\alpha, \lambda}$, i.e. :

$$(7.19) \quad \int_0^\omega \xi \mathscr{P}_{\alpha, j-1}(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta =$$
$$= (-\xi)^j [4^j \, j! (\lambda - 1) \dots (\lambda - j)]^{-1} \times \int_0^\omega \cos^{\alpha_1} \theta \sin^{\alpha_2} \theta \sin \lambda\theta \, d\theta$$

En posant $P_{\alpha, -1} = \xi^{-1} x^\alpha$, (7.19) résultera de :

$$(7.20) \quad 4(k - j - 1)(\lambda + k - j - 1) \int_0^\omega \mathscr{P}_{\alpha, k-1}(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta =$$
$$= \xi \int_0^\omega \mathscr{P}_{\alpha, k-2}(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta$$

pour $k = 1, \dots, j$.

• Si $|\alpha| + 2k \notin \Lambda$, on a :

$$\Delta P_{\alpha, k-1} = \xi P_{\alpha, k-2} \text{ et les conditions de Dirichlet}$$

donc :

$$(7.21) \qquad [\partial_\theta^2 + (|\alpha| + 2k)^2] \, \mathscr{P}_{\alpha, k-1} = \xi \mathscr{P}_{\alpha, k-2}$$
$$\mathscr{P}_{\alpha, k-1} \in \overset{\circ}{H}{}^1(]0, \omega[) .$$

En remarquant que $|\alpha| + 2k = \lambda + 2(k - j - 1)$, en intégrant contre $\sin \lambda\theta$ les deux membres de (7.21) et en intégrant par parties, on obtient (7.20).

• Si $|\alpha| + 2k \in \Lambda$, la démonstration est similaire, en effet, en posant $\lambda' = |\alpha| + 2k$, on a :

$$\Delta(P_{\alpha,k-1} + a' e^{\lambda'}) = \xi P_{\alpha,k-2} .$$

Mais $r^{2-\lambda'} \Delta(a', e^{\lambda'})$ est égal à la projection de $\xi \mathscr{P}_{\alpha,k-2}$ sur le sous-espace propre de ∂_θ^2 engendré par $\sin \lambda' \theta$, qui est orthogonal à $\sin \lambda\theta$.

C'est pourquoi :

$$\int_0^\omega [\partial_\theta^2 + (|\alpha| + 2k)^2] \mathscr{P}_{\alpha,k-1} \sin \lambda\theta \, d\theta = \int_0^\omega \xi \mathscr{P}_{\alpha,k-2} \sin \lambda\theta \, d\theta . \quad \blacksquare$$

(7.22) THÉORÈME : *On fait les mêmes hypothèses que pour le théorème* (7.9) *mais en supposant f dans $W_p^{s-1}(\Omega)$. Alors u se décompose en :*

$$u = v + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{N}} \gamma^\lambda S^\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{N}} a^\lambda E^\lambda$$

où

- $v \in W_p^{s+1}(\Omega)$
- *les sommes sont étendues aux* $\lambda \in]0, s+1-2/p[$
- S^λ *est défini en* (7.5)-(7.6)
- γ^λ *est donné par*

$$\gamma^\lambda = \frac{1}{\lambda\omega} \int_\Omega (f - \Delta(\eta W)) K^\lambda$$

avec K^λ défini en (7.8) *et* $W = \sum_{|\alpha| < s-1-2/p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) \, w_\alpha$ *où w_α est décrit en* (7.15).

- E^λ *est défini en* (7.13)-(7.14)
- a^λ *est donné par*

$$a^\lambda = \sum_{|\alpha| < s-1-2/p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) \, a_{\alpha,\lambda}$$

où $a_{\alpha,\lambda}$ est décrit en (7.15).

La seule chose à ajouter à tout ce qui a été dit auparavant est que pour $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{N}$, S^λ est un polynôme au voisinage de 0, donc est dans $W_p^{s+1}(\Omega)$.

7.C. Cas où ξ est valeur propre

Dans ce cas, pour les espaces à poids, on peut appliquer directement la formule (4.9) :

$$\gamma^{\lambda} = \frac{1}{\lambda\omega}\left[\int_{\Omega} f \cdot T^{\lambda}\, dx - \int_{\Omega} u \cdot (\Delta - \xi_1)\, T^{\lambda}\, dx\right].$$

Nous allons aussi donner des expressions du type de (4.9″) pour certains des γ^{λ}, ce qui exige une construction différente des K^{λ}.

Comme dans [M-P2], nous allons traiter le cas plus simple où $\xi = \xi_1$, avec ξ_1 la première valeur propre du problème de Dirichlet sur Ω.

Soit Z_1 un vecteur propre associé à ξ_1. Il résulte du théorème de Courant que Z_1 est de signe constant. D'où l'on déduit que :

(7.23) $\quad \xi_1$ est valeur propre simple .

On en déduit aussi (voir par exemple le § 19.B dans [D]) que :

(7.24) le coefficient de la première singularité $r^{\pi/\omega} \sin \theta\pi/\omega$ est non nul pour Z_1.

Ainsi l'hypothèse (H_2) n'est pas vérifiée.

D'autre part, comme Z_1 est solution de (7.1) avec $f = 0$, nous avons quels que soient s et p :

(7.25)
$$Z_1 = v_1 + \sum_{\ell \geq 1} c_{\ell}\, S_{\ell}$$

où

- $v_1 \in V_{p,0}^{s+1}(\Omega)$
- $S_{\ell} \equiv S^{\lambda}$ défini en (7.5) avec $\lambda = \ell\pi/\omega$
- la somme est étendue aux ℓ entiers tels que $\ell\pi/\omega \leq s + 1 - 2/p$.

Il résulte de (7.24) que l'on peut choisir Z_1 de sorte que :

(7.26)
$$c_1 = 1 .$$

D'autre part, en notant T_{ℓ} la fonction T^{λ} définie en (7.7) correspondant à $\lambda = \ell\pi/\omega$, on a :

(7.27) PROPOSITION :

$$-\frac{1}{\ell\pi}\int_{\Omega} Z_1 \cdot (\Delta - \xi_1)\, T_{\ell}\, dx = c_{\ell} .$$

C'est une simple application de la formule (4.9) car $(\Delta - \xi_1)\, Z_1 = 0$.

Évidemment, l'énoncé (7.27) n'est pas spécifique de la première valeur propre. ∎

On ne peut pas construire X^{λ} comme en (7.8) car, pour que l'équation

$$\begin{cases}(\Delta - \xi_1)\, u = f \\ u \in \mathring{H}^1(\Omega)\end{cases}$$

ait une solution, il faut et il suffit que

$$\int_\Omega f \cdot Z_1 = 0 .$$

Par contre, grâce à (7.27), on voit que :

$$\int_\Omega (\Delta - \xi_1)(T_\ell - \ell c_\ell \, T_1) \cdot Z_1 \, dx = 0 .$$

Ainsi, on définit, *pour* $\ell \geqslant 2$, X_ℓ comme solution de

$$\text{(7.28)} \qquad \begin{cases} (\Delta - \xi_1) X_\ell = (\Delta - \xi_1)(T_\ell - \ell \, c_\ell \, T_1) \\ X_\ell \in \mathring{H}^1(\Omega) \end{cases}$$

et on pose

$$\text{(7.29)} \qquad K_\ell = T_\ell - \ell c_\ell \, T_1 - X_\ell .$$

Par la même technique que pour le théorème (4.19), on montre que :

(7.30) THÉORÈME : *Soient s, p comme dans le théorème* (7.9). *Soit* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *tel que* $(\Delta - \xi_1) u = f \in V_{p,0}^{s-1}(\Omega)$. *Alors :*

$$u = v + \varepsilon_1 \, Z_1 + \sum_{\ell \geqslant 2} \gamma_\ell \, S_\ell$$

où

- $v \in V_{p,0}^{s+1}(\Omega)$;
- *la somme est étendue aux* ℓ *entiers tels que* $\ell\pi/\omega < s + 1 - 2/p$;
- $$\varepsilon_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_\Omega f \cdot T_1 \, dx - \int_\Omega u \cdot (\Delta - \xi_1) \, T_1 \, dx \right]$$
- *les coefficients* γ_ℓ *sont donnés par :*

$$\gamma_\ell = \frac{1}{\ell\pi} \int_\Omega f \cdot K_\ell \, ;$$

avec K_ℓ *défini en* (7.29).

Pour un second membre f dans $W_p^{s-1}(\Omega)$, on a, comme d'habitude

$$\gamma_\ell = \frac{1}{\ell\pi} \int_\Omega (f - \Delta(\eta W)) \cdot K_\ell$$

où W est défini comme au théorème (7.22) et

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_\Omega \{f - (\Delta - \xi_1) W\} \,.\, T_1 \, dx - \int_\Omega (u - W) \,.\, (\Delta - \xi_1) T_1 \, dx\right].$$

Une situation analogue est considérée dans [M-P2] : il s'agit du calcul de la première singularité à chaque sommet d'un polygone. Mais comme, dans [M-P2], on n'a pas introduit le développement asymptotique des singularités pour un opérateur non homogène (*cf.* les S^λ et T^λ), les formules données en (0.7) *loc. cit.* ne sont justes que si tous les angles sont supérieurs à π.

8. PROBLÈMES MÊLÉS ET À DÉRIVÉES OBLIQUES POUR LE LAPLACIEN DANS UN POLYGONE

8.A. Position du problème

Ici, nous précisons les notations que nous serons amenés à utiliser.

Ω désigne un polygone simplement connexe dont les côtés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ sont numérotés dans le sens trigonométrique. Pour $j \in \{1, \ldots, N\}$, ν_j (resp. τ_j) désigne le vecteur unitaire normal sortant (resp. tangent orienté dans le sens direct). 0_j est le sommet commun à Γ_j et Γ_{j+1}. ω_j désigne l'ouverture de Ω au voisinage de 0_j. Enfin, on note (r_j, θ_j) les coordonnées polaires de centre 0_j et telles que :

$$\begin{aligned} \theta_j = 0 \quad &\text{contient} \quad \Gamma_{j+1} \\ \theta_j = \omega_j \quad &\text{contient} \quad \Gamma_j \,. \end{aligned}$$

Les espaces à poids sont toujours définis par les mêmes formules (*cf.* début du § 2) avec r désignant la distance à l'ensemble des sommets ; r est équivalent au produit de tous les r_j. η_j désignera une fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de 0_j et sur le support de laquelle Ω coïncide avec un secteur plan.

Maintenant, fixons une partition de $\{1, \ldots, N\}$ en $\mathscr{D} \cup \mathscr{N}$ et pour chaque $j \in \mathscr{N}$ donnons-nous un réel β_j. Considérons les opérateurs frontières B_j définis au voisinage de Γ_j par :

$$\text{(8.1)} \qquad \begin{cases} B_j = \text{Identité} & \text{si} \quad j \in \mathscr{D} \\ B_j = \partial_{\nu_j} + \beta_j \, \partial_{\tau_j} & \text{si} \quad j \in \mathscr{N} \,. \end{cases}$$

Notre problème aux limites est alors le suivant :

$$\text{(8.2)} \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ B_j u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_j \,, \quad j \in \{1, \ldots, N\} \,. \end{cases}$$

Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse restrictive (8.3) ci-dessous sur les coefficients β_j, cette hypothèse permettant d'interpréter de façon variationnelle le problème (8.2), *cf.* § 4.4.3 dans [G1] :

$$\beta_j = 0 \text{ sauf si } j-1 \text{ et } j+1 \text{ sont dans } \mathscr{D} . \tag{8.3}$$

Remarquons que le problème mêlé Dirichlet et Neumann est un cas particulier du problème traité ici (en choisissant $\beta_j = 0$, $\forall j$). Le cas où l'ensemble $\mathscr{D}$ est vide correspond au problème de Neumann pur.

On a alors le résultat suivant (*cf.* lemme 4.4.3.1 dans [G1]) :

(8.4) PROPOSITION : *Soit* $V = \{u \in H^1(\Omega) / \forall j \in \mathscr{D}, u|_{r_j} = 0\}$ *si* $\mathscr{D} \neq \varnothing$, *sinon* $V = H^1(D)/\mathbb{C}$.

Soit f dans V' *(ainsi, si* $\mathscr{D} = \varnothing$, *on suppose que* $\langle f, 1\rangle = 0$ *au sens de la dualité* $V' - V$*).*

Alors il existe une unique solution faible u au problème (8.2), *i.e.* $u \in V$ *et*

$$\forall v \in V \quad a(u, v) = - \langle f, v\rangle$$

où :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{j \in \mathscr{N}} \beta_j \int_{\Gamma_j} \partial_{\tau_j} u \cdot v .$$

De plus, l'adjoint de cet opérateur est l'opérateur associé aux coefficients $-\beta_j$.

8.B. Singularités

Lorsque $j \in \mathscr{N}$, ϕ_j désigne l'angle entre ν_j et $\nu_j + \beta_j \tau_j$ et lorsque $j \in \mathscr{D}$, on pose $\phi_j = \frac{\pi}{2}$. La décomposition des solutions a été décrite dans [G1] (théorème 5.1.3.5). On désigne par :

$$\lambda_{j,\ell} = \begin{cases} (\phi_{j+1} - \phi_j + \ell\pi)/\omega_j & \text{si} \quad \phi_{j+1} - \phi_j \leqslant 0 \\ (\phi_{j+1} - \phi_j - \pi + \ell\pi)/\omega_j & \text{si} \quad \phi_{j+1} - \phi_j > 0 . \end{cases} \tag{8.5}$$

Voici les singularités par rapport aux espaces à poids :

$$\begin{cases} \sigma_{j,\ell} = r_j^\lambda \cos(\lambda\theta_j - \phi_{j+1}) & \text{pour} \quad \lambda = \lambda_{j,\ell} \\ S_{j,\ell} = \eta_j \sigma_{j,\ell} \end{cases} \tag{8.6}$$

où η_j est choisie de sorte que

$$B_k \eta_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_k , \ k \in \mathscr{N} . \tag{8.7}$$

(8.8) PROPOSITION : *Soient s et p vérifiant* (H_1) *ou* (H_1') ; *si* $p = 2$, *on suppose de plus que* $s > \frac{1}{2}$. *On suppose que pour tout* $j \in \{1, \dots, N\}$ *et tout* $\ell \geqslant 1$ *entier,* $\lambda_{j,\ell} \neq s + 1 - 2/p$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ *solution de* (8.2) *avec* $f \in V^{s-1}_{p,0}(\Omega)$. *Alors :*

$$u = v + \sum_j \sum_\ell \gamma_{j,\ell} S_{j,\ell} + \sum_{j,\ \{j, j+1\} \subset \mathcal{N}} c_j \eta_j$$

où

- $v \in V^{s+1}_{p,0}(\Omega)$
- *la somme en* ℓ *est étendue aux entiers* $\ell \geqslant 1$ *tels que* $\lambda_{j,\ell} < s + 1 - 2/p$
- *les* $\gamma_{j,\ell}$ *et* c_j *sont des scalaires.*

Voici les singularités duales :

$$(8.9) \qquad \begin{cases} \tau_{j,\ell} = r_j^{-\lambda} \cos(\lambda\theta_j - \phi_{j+1}) & \text{pour} \quad \lambda = \lambda_{j,\ell} \\ T_{j,\ell} = -(\lambda_{j,\ell}\, \omega_j)^{-1} \eta_j^* \tau_{j,\ell} \end{cases}$$

où η_j^* est une fonction de troncature comme η_j, mais vérifiant, au lieu de (8.7) :

$$B_k^* \eta_j^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_k\,, \; k \in \mathcal{N}$$

où les B_k^* sont définis par, au lieu de (8.1) :

$$\begin{cases} B_k^* = I & \text{si} \quad k \in \mathcal{D} \\ B_k^* = \partial_{\nu_k} - \beta_k \,.\, \partial_{\tau_k} & \text{si} \quad k \in \mathcal{N}\,. \end{cases}$$

Ainsi $B_k^* T_{j,\ell} = 0$ sur Γ_k, $k = 1, \dots, N$. Notons que les (B_k^*) forment le problème aux limites adjoint de celui associé aux (B_k) (*cf.* (8.4)).

Par la méthode d'intégration par parties utilisée pour la preuve du théorème (4.1.9), on montre facilement que, si $\mathcal{D} = \varnothing$:

$$\int_\Omega \Delta T_{j,\ell} = 0\,.$$

Dans tous les cas, par application de (8.4), on obtient qu'il existe $X_{j,\ell}$ solution variationnelle de :

$$(8.10) \qquad \begin{cases} \Delta X_{j,\ell} = \Delta T_{j,\ell} & \text{dans} \quad \Omega \\ B_k^* X_{j,\ell} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_k\,. \end{cases}$$

On pose :

$$K_{j,\ell} = T_{j,\ell} - X_{j,\ell}\,.$$

(8.11) THÉORÈME : *Sous les hypothèses de la proposition* (8.8), *on a :*

$$\gamma_{j,\ell} = \int_\Omega f \,.\, K_{j,\ell}$$

avec $K_{j,\ell}$ *défini en* (8.9)-(8.10).

La méthode de démonstration est toujours celle du théorème (4.19). Ici, il faut prêter une attention supplémentaire aux termes de bord sur les Γ_j. Lorsqu'on fixe le paramètre a de la démonstration, ces termes ne sont pas forcément nuls. Quand on passe à la limite pour $a \to -\infty$, leur contribution s'annule grâce à la condition (8.3).

Pour traiter le cas des espaces ordinaires, on pose, avec $\lambda = \lambda_{j,\ell}$:

(8.12)

$$\begin{cases} e_{j,\ell} = r_j^\lambda [\operatorname{Log} r_j \,.\, \cos(\lambda\theta_j - \phi_{j+1}) - \theta_j \sin(\lambda\theta_j - \phi_{j+1})] + \\ \qquad + \omega_j (1 - \cos 2\,\omega_j)^{-1} r_j^\lambda [\cos(\lambda\theta_j - \phi_{j+1}) - \cos((\lambda - 2)\,\theta_j - \phi_{j+1})] \\ E_{j,\ell} = \eta_j\, e_{j,\ell} \,. \end{cases}$$

Comme on l'a déjà fait plusieurs fois, on déduit de (8.11) le théorème suivant :

(8.13) THÉORÈME : *Soient* s *et* p *comme dans la proposition* (8.8). *Soit* u *solution de* (8.2) *avec* $f \in W_p^{s-1}(\Omega)$. *Alors :*

$$u = v + \sum_j \sum_{\ell,\lambda_{j,\ell} \notin \mathbb{N}} \gamma_{j,\ell}\, S_{j,\ell} + \sum_j \sum_{\ell,\lambda_{j,\ell} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} a_{j,\ell}\, E_{j,\ell}$$

où :

- $v \in W_p^{s+1}(\Omega)$
- *les sommes sont étendues aux* $\ell \geqslant 1$ *tels que* $\lambda_{j,\ell} < s + 1 - 2/p$
- *les coefficients* $\gamma_{j,\ell}$ *ont l'expression suivante :*

$$\gamma_{j,\ell} = \int_\Omega (f - \Delta(\eta_j\, W_j))\, K_{j,\ell}$$

avec W_j *solution dans* H^1_{loc} *de :*

$$\begin{cases} \Delta W_j = F_j \equiv \displaystyle\sum_{|\alpha| < s-1-2/p} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(0_j)\, x_j^\alpha \\ B_j\, W_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_j \\ B_{j+1}\, W_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{j+1} \end{cases}$$

(résolution polynomiale, cf. (5.11), (6.9), (7.15), *etc...)*

• *les coefficients* $a_{j,\ell}$ *ont l'expression suivante, en notant* $\lambda_{j,\ell}$ *par* λ :

$$a_{j,\ell} = \frac{1}{\lambda\omega} \sum_{|\alpha| = \lambda - 2} \frac{1}{\alpha\,!}\, \partial^{\alpha}_{j+1} f(0_j) \int_0^{\omega_j} \cos^{\alpha_1}\theta \sin^{\alpha_2}\theta \cos(\lambda\theta - \phi_{j+1})\, d\theta$$

où ∂^{α}_{j+1} *désigne* $\partial^{\alpha_1}_{\tau_{j+1}}\, \partial^{\alpha_2}_{-\nu_{j+1}}$.

(8.14) *Remarque :* Les éventuelles singularités $E_{j,\ell}$ pour $\lambda_{j,\ell} = 1$ n'apparaissent pas ici car on considère le problème à données au bord nulles. Voir aussi la section suivante. ■

La formulation suivante du type de (4.9) sera utile pour l'approximation numérique :

(8.15) COROLLAIRE : *Sous les mêmes hypothèses que le théorème* (8.13), *on a :*

$$\gamma_{j,\ell} = \int_{\Omega} (f - F_j)\, T_{j,\ell} - (u - W_j)\, \Delta T_{j,\ell}$$

où $T_{j,\ell}$ *est défini en* (8.9).

Preuve : Soit j fixé et soit η une fonction de troncature valant 1 sur le support de η_j^* et sur le support de laquelle Ω coïncide avec un secteur plan. Posons :

$$V = \eta(u - W_j)\,.$$

Sur le support de $T_{j,\ell}$, $\Delta V = f - F_j$. Il nous suffit de montrer que :

$$\gamma_{j,\ell} = \int_{\Omega} \Delta T \,.\, T_{j,\ell} - V\, \Delta T_{j,\ell}\,. \tag{8.16}$$

Or, $\Delta V \in V^{s-1}_{p,0}(\Omega)$, et par application de (8.13) :

$$\gamma_{j,\ell} = \int_{\Omega} \Delta V \,.\, (T_{j,\ell} - X_{j,\ell})\,.$$

La formule de Green et les conditions aux limites vérifiées par V (problème (8.2)) et $X_{j,\ell}$ (problème adjoint (8.10)) donnent que :

$$\int_{\Omega} \Delta V \,.\, X_{j,\ell} = \int_{\Omega} V \,.\, \Delta X_{j,\ell}\,.$$

Comme, par définition, $\Delta X_{j,\ell} = \Delta T_{j,\ell}$, on a bien obtenu (8.16). ■

8.C. Cas de données aux bords non nulles

Désignons par d_j le degré de B_j. Pour

$$f \in W_p^{s-1}(\Omega) \; ; \quad g_j \in W_p^{s+1-d_j-1/p}(\Gamma_j) \, , \; j = 1, \dots, N \tag{8.17}$$

on cherche u solution dans $H^1(\Omega)$ de :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \; \Omega \\ B_j \, u = g_j & \text{sur } \; \Gamma_j, j = 1, \dots, N \, . \end{cases} \tag{8.18}$$

Pour que u existe il faut et il suffit que les conditions de compatibilité suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} \text{si } j \text{ et } j+1 \text{ sont dans } \mathcal{D}, \; g_j(0_j) = g_{j+1}(0_j) \\ \text{si } \mathcal{D} \text{ est vide, } \displaystyle\int_\Omega f \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} g_j \, d\tau_j \, . \end{cases} \tag{8.19}$$

Sous ces conditions, u admet la décomposition :

$$u = v + \sum_j \sum_{\ell, \lambda_{j,\ell} \notin \mathbb{N}} \gamma_{j,\ell} \, S_{j,\ell} + \sum_{\ell, \lambda_{j,\ell} \in \mathbb{N}^*} a_{j,\ell} \, E_{j,\ell}$$

comme dans le théorème (8.13), à l'expression que si $\lambda_{j,\ell} = 1$, $E_{j,\ell}$ peut maintenant apparaître dans la décomposition. On a les expressions suivantes pour les coefficients :

$$\gamma_{j,\ell} = \int_\Omega f' \cdot K_{j,\ell} + \sum_{k \in \mathcal{D}} \int_{\Gamma_k} g'_k \, \partial_{\nu_k} K_{j,\ell} \, d\tau_k - \sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{\Gamma_k} g'_k \, K_{j,\ell} \, d\tau_k$$

où :

$$f' = f - \Delta(\eta_j \, W_j)$$

$$g'_k = g_k - B_k(\eta_j \, W_j)$$

avec W_j solution dans H^1_{loc} de :

$$\begin{cases} \Delta W_j = F_j \\ B_k \, W_j = G_k \equiv \displaystyle\sum_{i < s+1-d_k-2/p} \frac{1}{i!} \, \partial^i \, g_k(0_j) \, \tau_k^i \; \text{ sur } \Gamma_k \text{ pour } k = j, j+1 \end{cases}$$

D'autre part, si $\lambda_{j,\ell} = \lambda$ est entier, $a_{j,\ell}$ est la somme de la contribution de

f donnée dans le théorème (8.13) et des contributions suivantes dues à g_j et g_{j+1} :

$$\frac{1}{\lambda!\,\omega}\left\{(-1)^{\ell+\lambda}(\cos\phi_j + 1 - d_j)\,\partial_{\tau_j}^{\lambda - d_j} g_j(0_j) - \right.$$
$$\left. - (\cos\phi_{j+1} + 1 - d_{j+1})\,\partial_{\tau_{j+1}}^{\lambda - d_{j+1}} g_{j+1}(0_j)\right\}, \tag{8.20}$$

où ℓ est tel que $\lambda = (\phi_{j+1} - \phi_j)/\omega_j + \ell\pi/\omega_j$.

RÉFÉRENCES

[D] M. DAUGE, *Elliptic boundary value problems in corner domains — smoothness and asymptotics of solutions.* L.M.N. 1341, Springer-Verlag, (1988).

[D-L-N] M. DAUGE, M. S. LUBUMA et S. NICAISE, *Coefficients des singularités pour le problème de Dirichlet sur un polygone.* C.R. Acad. Sc. Paris, *304* (1987).

[G1] P. GRISVARD, *Elliptic problems in non smooth domains.* Monographs and Studies in Math. *24,* Pitman (1985).

[G2] P. GRISVARD, *Problèmes aux limites sur un polygone.* Mode d'emploi, E.D.F. Série C n° 1, 1986, pp. 21-59.

[K] V. A. KONDRAT'EV, *Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points.* Trans. Moscow Math. Soc. *16,* 227-313 (1967).

[M-P2] V. G. MAZ'YA et B. A. PLAMENEVSKII, *Coefficients in the asymptotics of the solutions of an elliptic boundary value problem in a cone.* A.M.S. Transl. (2) *123,* 57-88 (1984).