RAIRO. Analyse numérique

Marie-Noëlle Le Roux

Semi-discrétisation en temps pour les équations d'évolution paraboliques lorsque l'opérateur dépend du temps

RAIRO. Analyse numérique, tome 13, nº 2 (1979), p. 119-137
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_2_119_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 13 n° 2, 1979 p 119 a 137)

SEMI-DISCRÉTISATION EN TEMPS POUR LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION PARABOLIQUES LORSQUE L'OPÉRATEUR DÉPEND DU TEMPS (*)

par Marie-Noëlle LE ROUX (¹)

Communiqué par P A RAVIART

Résumé — *On étudie la semi-discrétisation en temps d'une équation d'évolution parabolique où l'opérateur dépend du temps Cette équation est discretisée par une méthode multi-pas On obtient des majorations d'erreur lorsque l'opérateur est maximal sectoriel et la méthode multi-pas utilisée d'ordre* $p\,(p \geqq 1)$, *fortement* $A(\theta)$*-stable* $(0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$

Abstract — *We study the error due to the discretization in time of a parabolic problem with time dependent operator The discretization is carried out by means of a multistep method Error estimates are obtained for a maximal sectorial operator and a multistep strongly* $A(\theta)$*-stable* $(0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$ *method of the order* $p\,(p \geqq 1)$

1. POSITION DU PROBLÈME

Soit $A(t)$ un opérateur linéaire, non borné sur un espace de Hilbert H, de domaine $D(A)$ indépendant de t, dense dans H. On suppose que $A(t)$ est maximal sectoriel et on considère l'équation

$$\left.\begin{aligned} u'(t)+A(t)u(t)=f(t), \qquad & 0<t\leqq T, \\ u(0)=u_0, \qquad & \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

On se donne alors deux polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à q :

$$\rho(\zeta)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\zeta^i \qquad \text{et} \qquad \sigma(\zeta)=\sum_{i=0}^{q}\beta_i\zeta^i \qquad (\alpha_q>0).$$

L'approximation u_n de la solution $u(t_n)$ de (1) est obtenue au moyen du schéma

$$\sum_{i=0}^{q}(\alpha_i+\Delta t\,\beta_i\,A(t_{n+i}))\,u_{n+i}=\Delta t\sum_{i=0}^{q}\beta_i\,f(t_{n+i}). \tag{2}$$

les valeurs de démarrage $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$ étant obtenues par une autre méthode.

(*) Reçu mai 1978

(¹) Université de Rennes, Département de Mathématiques Informatique, Rennes

On suppose alors que l'opérateur A vérifie l'hypothèse

$$\forall s, \quad t \geqq 0, \qquad \| A^{-1}(s) A(t) \|_{\mathscr{L}(H\ H)} \leqq C, \tag{3}$$

ce qui permet de définir u_n ($n \geqq 0$) de façon unique dans H si $u_0, \ldots, u_{q-1}$ sont dans H. D'autre part, si les β_i ($0 \leqq i \leqq q-1$) sont nuls, l'hypothèse (3) devient inutile.

On suppose que la méthode (ρ, σ) utilisée est d'ordre p, ce qui a lieu si et seulement si, on a

$$\sum_{i=0}^{q} i^l \alpha_i = l \sum_{i=0}^{q} i^{l-1} \beta_i, \qquad l=0, 1, \ldots, p. \tag{4}$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) est fortement $A(\theta)$-stable. On pose

$$\varpi(\zeta; z) = \rho(\zeta) + z\,\sigma(\zeta),$$

$$S_\theta = \{ z \in \overline{\mathbf{C}} / z = \infty \text{ ou } 0 \text{ ou } -\theta \leqq \operatorname{Arg} z \leqq +\theta \}.$$

La méthode est fortement $A(\theta)$-stable ($0 < \theta \leqq \pi/2$) si et seulement si pour tout z intérieur à S_θ, les racines des polynômes $\varpi(\,.\,, z)$ et σ sont toutes de modules < 1. Dans le cas où $\theta = 0$, on dit que la méthode est fortement $A(\theta)$-stable si et seulement si pour tout $x > 0$, les racines de $\varpi(\,.\,, x)$ et de σ sont de modules < 1, les racines essentielles ζ_i de ρ sont simples et leurs facteurs de croissance λ_i vérifient $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ où les λ_i sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{\sigma(\zeta_i)}{\zeta_i\, \rho'(\zeta_i)}.$$

On pose alors :

$$\delta_i(z) = \frac{\alpha_i + \beta_i z}{\alpha_q + \beta_q z}, \qquad 0 \leqq i \leqq q.$$

$$\mathrm{L}(z) = \begin{bmatrix} -\delta_{q-1}(z) & \ldots & -\delta_1(z) & -\delta_0(z) \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{L}(z) \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^q).$$

On définit l'erreur de troncature ε_n :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{q} [\alpha_i u(t_{n+i}) + \Delta t\, \beta_i A(t_{n+i}) u(t_{n+i}) - \Delta t\, \beta_i f(t_{n+i})]$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{q} [\alpha_i u(t_{n+i}) - \Delta t\, \beta_i u'(t_{n+i})]$$

et on pose

$$y_n = u(t_n) - u_n,$$

y_n est alors solution de

$$\sum_{i=0}^{q} (\alpha_i + \Delta t\, \beta_i\, A(t_{n+i}))\, y_{n+i} = \Delta t\, \varepsilon_n \tag{5}$$

Soient Y_n et E_n les vecteurs de H^q définis par

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+q-1} \\ y_{n+q-2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad E_n = \begin{pmatrix} E_{n,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$E_{n,1} = (\alpha_q + \Delta t\, \beta_q\, A(t_{n+q}))^{-1}\, \varepsilon_n.$$

On note : I l'opérateur identité,

$$\Delta_{n,i} = (\alpha_q + \Delta t\, \beta_q\, A(t_{n+q}))^{-1} (\alpha_i + \Delta t\, \beta_i\, A(t_{n+i})),$$

$$\overline{\Delta}_{n,i} = (\alpha_q + \Delta t\, \beta_q\, A(t_{n+q}))^{-1} (\alpha_i + \Delta t\, \beta_i\, A(t_{n+q})) = \delta_i(\Delta t\, A(t_{n+q})),$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} -\Delta_{n,q-1} & \cdots & -\Delta_{n,1} & -\Delta_{n,0} \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\Lambda}_n = \begin{bmatrix} -\overline{\Delta}_{n,q-1} & \cdots & -\overline{\Delta}_{n,1} & -\overline{\Delta}_{n,0} \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La relation (5) peut alors s'écrire :

$$Y_{n+1} = \Lambda_n\, Y_n + \Delta t\, E_n$$

et Y_{n+1} s'exprime alors en fonction des données initiales par la relation

$$Y_{n+1} = \Lambda_n \ldots \Lambda_0\, Y_0 + \Delta t \sum_{k=1}^{n} \Lambda_n \ldots \Lambda_{n-k+1}\, E_{n-k} + \Delta t\, E_n. \tag{6}$$

Pour majorer Y_n, il faut donc obtenir une majoration de

$$\| \Lambda_n \ldots \Lambda_{n-k} \|_{\mathscr{L}(H^q,\, H^q)}, \qquad 0 \leqq k \leqq n.$$

Admettons provisoirement les propositions suivantes

PROPOSITION 1 *On suppose qu'il existe une constante* $a>0$ *telle que* $A(t)-aI$ *soit un opérateur auto-adjoint positif vérifiant*

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{et} \quad M>0 \qquad \textit{tels que} \quad \forall\, t,\ t' \geqq 0, \\ \| A^{-\varepsilon}(t)(A(t)-A(t'))A^{-1+\varepsilon}(t') \|_{\mathscr{L}(H\ H)} \leqq M\,|t-t'| \end{array}\right\} \tag{7}$$

$$\forall\, t,\ t',\ s \geqq 0, \qquad \| A^{-1}(s)(A(t)-A(t')) \|_{\mathscr{L}(H\ H)} \leqq M\,|t-t'| \tag{8}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \quad = \beta_{q-1} = 0 \tag{8 bis}$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) *utilisée est fortement* $A(0)$*-stable Alors il existe des constantes positives* C, μ *telles que l'on ait pour tout* $n \geqq 0$, $1 \leqq k \leqq n+1$

$$\| \Lambda_n \quad \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \leqq C\, e^{(CM-\mu)k\Delta t} \tag{9}$$

PROPOSITION 2 *On suppose que* $A(t)$ *est un operateur maximal positif vérifiant les hypothèses* (7) *et* (8) *ou* (8 bis), *ainsi que l'hypothèse* (10)

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, a>0 \quad \text{et} \quad \theta_0 \left(0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\right) \quad \forall\, t \geqq 0, \quad \forall\, u \in D(A), \\ \qquad\qquad ((A(t)-aI)u,\ u) \in S_{\theta_0} \end{array}\right\} \tag{10}$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) *utilisée est fortement* $A(\theta)$*-stable* $(\theta_0 < \theta < \pi/2)$ *Alors il existe des constantes positives* C, μ *telles que l'on ait pour tout* $n \geqq 0$, $1 \leqq k \leqq n+1$

$$\| \Lambda_n \quad \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \leqq C\, e^{(CM-\mu)k\Delta t}(1+|\operatorname{Log} \Delta t|) \tag{11}$$

PROPOSITION 3 *On fait les hypothèses de la proposition* 2 *sur l'opérateur* A *et on suppose que la méthode* (ρ, σ) *est fortement* A*-stable Alors il existe des constantes positives* C, μ *telles que l'on ait pour tout* $n \geqq 0$, $1 \leqq k \leqq n+1$

$$\| \Lambda_n \quad \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \leqq C\, e^{(CM-\mu)k\Delta t} \tag{12}$$

De ces propositions, on déduit alors les théorèmes

THEOREME 1 *On fait les hypotheses des propositions* 1 *ou* 3 *et on suppose de plus que la méthode* (ρ, σ) *est d'ordre* p *Alors il existe des constantes positives* C_1, C, μ *telles que l'on ait pour tout* $n \geqq q$

$$|u(t_n)-u_n|_H \leqq C_1 \left\{ e^{(CM-\mu)t_n} \max_{0 \leqq s \leqq q-1} |u_s - u(t_s)|_H \right.$$
$$\left. + \Delta t^p \int_0^{t_n} e^{(CM-\mu)(t_n-t)} |u^{(p+1)}(t)|\, dt \right\} \tag{13}$$

Démonstration D'après la relation (6), on a la majoration

$$|u(t_{n+q})-u_{n+q}|_H \leqq \| Y_{n+1} \|_{H^q} \leqq \| \Lambda_n \quad \Lambda_0 \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \| Y_0 \|_{H^q} + \Delta t \| E_n \|_{H^q}$$

$$+ \Delta t \sum_{k=1}^{n} \| \Lambda_n \quad \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \| E_{n-k} \|_{H^q}$$

L'utilisation de la formule de Taylor nous permet de montrer que si la méthode (ρ, σ) est d'ordre p et si $u \in C^{p+1}(0, T, H)$, on a

$$|\varepsilon_n| \leqq C\,\Delta t^{p-1} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |u^{(p+1)}(t)|_H\,dt$$

et on a la même majoration pour E_n dans H^q

De plus,

$$\| Y_0 \|_{H^q} = \max_{0 \leq s \leq q-1} |u_s - u(t_s)|_H$$

On en déduit immédiatement la majoration (13) en utilisant les propositions 1 ou 3

THEOREME 2 *On fait les hypothèses de la proposition 2 et on suppose de plus que la méthode* (ρ, σ) *est d'ordre* p *Alors il existe des constantes positives* C_1, C, μ *telles que l'on ait, pour tout* $n \geq q$

$$|u(t_n)-u_n|_H \leqq C_1(1+|\operatorname{Log}\Delta t|) \left\{ e^{(CM-\mu)t_n} \max_{0 \leq s \leq q-1} |u_s - u(t_s)|_H \right.$$

$$\left. + \Delta t^p \int_0^{t_n} e^{(CM-\mu)(t_n-t)} |u^{(p+1)}(t)|\,dt \right\} \qquad (14)$$

La démonstration de ce théoreme est identique à celle du théorème 1

2. RAPPEL DU CAS OU A EST INDEPENDANT DE t

Si l'opérateur A est indépendant de t, on a

$$\Lambda_n = \overline{\Lambda}_n = \Lambda = L(\Delta t\,A) \qquad \text{et} \qquad Y_{n+1} = \Lambda^{n+1} Y_0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k E_{n-k}$$

Il faut donc majorer $\| \Lambda^k \|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}$ Pour cela, on utilise les lemmes techniques suivants

LEMME 1 *Soit* z_0 *un point intérieur au domaine de stabilité absolue de la méthode* (ρ, σ) *Il existe un voisinage* $\mathscr{V}$ *de* z_0, *une constante* c_1 $(0 < c_1 < 1)$, *une matrice inversible* H *tels que*

$$\| H^{-1} L(z) H \|_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^q\ \mathbb{C}^q)} \leqq c_1, \qquad \forall z \in \mathscr{V} \qquad (15)$$

Démonstration Soit z_0 un point intérieur au domaine de stabilité absolue de la méthode (ρ, σ), alors les valeurs propres $\zeta_i(z_0)$ de $L(z_0)$ qui sont les racines de $\varpi(\ , z_0)$ sont toutes de module <1

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une matrice inversible H telle que

$$H^{-1} L(z_0) H = \begin{pmatrix} \zeta_1(z_0) & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{q-1} \\ & & & \zeta_q(z_0) \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_i = \varepsilon$ ou 0 $(0 \leqq i \leqq q-1)$ (forme réduite de Jordan)

Donc pour ε suffisamment petit, on obtient

$$\| H^{-1} L(z_0) H \|_2 < 1$$

Et par continuité, on en déduit qu'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de z_0 et une constante c_1 $(0 < c_1 < 1)$ tels que

$$\| H^{-1} L(z) H \|_2 \leqq c_1 < 1, \qquad \forall z \in \mathscr{V}$$

LEMME 2 *On suppose que la méthode* (ρ, σ) *est fortement* $A(\theta)$*-stable* $(0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$ *Il existe un voisinage* B_0 *de* 0 *dans* S_θ *de la forme*

$$B_0 = \{ z \in \mathbf{C} / z = \xi + r e^{+i\theta},\ 0 \leqq r \leqq \eta_0,\ 0 \leqq \xi \leqq \xi_0 \},$$

une application $z \rightarrow H(z) \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^q)$ *avec* $H(z)$ *inversible et une constante* $\mu > 0$ *tels que pour tout* $z \in B_0$, *on ait*

$$\| H^{-1}(z) L(z) H(z) \|_2 \leqq e^{-\mu\xi} \tag{16}$$

Démonstration Notons $\zeta_1(0), \quad , \zeta_s(0)$ les racines de module 1 de $\varpi(\ , 0) = \rho(\ )$, ces racines sont simples Il existe donc un voisinage $\mathscr{V}_1$ de 0 dans lequel les racines $\zeta_i(z)$ $(1 \leqq i \leqq s)$ de $\varpi(\ , z)$ sont simples et sont des fonctions holomorphes de z et de plus,

$$| \zeta_i(z) | \leqq c < 1, \qquad s+1 \leqq i \leqq q$$

Le polynôme caractéristique $\varpi(\ , z)$ de $L(z)$ s'écrit alors sous la forme

$$\varpi(\zeta, z) = (\zeta - \zeta_1(z)) \quad (\zeta - \zeta_s(z)) P(\zeta, z),$$

où le polynôme $P(\zeta, z)$ a des coefficients holomorphes en z dans $\mathscr{V}_1$ On a, pour $z \in \mathscr{V}_1$

$$\mathbf{C}^q = \operatorname{Ker}(L(z) - \zeta_1(z)) \oplus \quad \oplus \operatorname{Ker}(L(z) - \zeta_s(z)) \oplus \operatorname{Ker}(P(L(z)), z)$$

Considérons alors la matrice $H'(z)$ dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs de base des $\operatorname{Ker}(L(z)-\zeta_1(z)), \ldots, \operatorname{Ker}(L(z)-\zeta_s(z)), (\operatorname{Ker} P(L(z)), z)$; il est possible de choisir ces vecteurs de façon que les coefficients de $H'(z)$ dépendent de manière holomorphe de z dans un voisinage $\mathscr{V}_2$ de 0 et on a

$$H'^{-1}(z)L(z)H'(z)=\left(\begin{array}{ccc|c} \zeta_1(z) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \zeta_s(z) & \\ \hline & 0 & & l'(z) \end{array}\right),$$

où les coefficients de $l'(z)$ sont des fonctions holomorphes de z. De plus les valeurs propres de $l'(z)$ sont $\zeta_{s+1}(z)\ldots\zeta_q(z)$ et sont donc de module <1; on peut donc trouver une matrice $h\in\mathscr{L}(\mathbf{C}^{q-s})$ telle que

$$\|h^{-1}l'(0)h\|<1$$

et par continuité, il existe un voisinage $\mathscr{V}_3$ de 0 et une constante $c_1\in]0, 1[$ tels que

$$\forall z\in\mathscr{V}_3, \quad \|h^{-1}l'(z)h\|\leqq c_1<1.$$

On pose alors $H(z)=H'(z)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right)$ et $l(z)=h^{-1}l'(z)h$.

On a la relation

$$H^{-1}(z)L(z)H(z)=\left(\begin{array}{ccc|c} \zeta_1(z) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \zeta_s(z) & \\ \hline & 0 & & l(z) \end{array}\right)$$

d'où

$$\|H^{-1}(z)L(z)H(z)\|\leqq(\max_{1\leqq i\leqq s}|\zeta_i(z)|, c_1), \qquad \forall z\in\mathscr{V}_3.$$

Or il existe un voisinage B_0 de 0 dans S_θ de la forme

$$B_0=\{z\in\mathbf{C}/z=\zeta+re^{\pm i\theta}, 0\leqq r\leqq\eta_0, 0\leqq\zeta\leqq\zeta_0\}$$

et une constante $\mu'>0$ tels que

$$\forall z\in B_0, \quad |\zeta_i(z)|\leqq e^{-\mu'\zeta} \qquad (1\leqq i\leqq q) \quad [4].$$

Donc il existe une constante positive μ telle que

$$\forall z\in B_0\cap\mathscr{V}_3, \qquad H^{-1}(z)L(z)H(z)\leqq e^{-\mu\zeta}.$$

LEMME 3 : *On suppose la méthode* (ρ, σ) *fortement* $A(\theta)$*-stable* $(0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$. *Alors il existe des constantes positives* R, μ, C *telles que pour tout* z *tel que* $-\theta_1 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \theta_1$ $(0 \leqq \theta_1 < \theta)$ *si* $\theta > 0$ *et* $z \in \mathbf{R}$, $z \geqq 0$ *si* $\theta = 0$, *on ait*

$$\left.\begin{array}{ll} \|L^n(z)\| \leqq C e^{-\mu n \xi} & si \quad z = \xi + re^{\pm i\theta}, \qquad \xi \geqq 0, \quad |z| \leqq R, \\ \|L^n(z)\| \leqq C e^{-\mu n} & si \quad |z| \geqq R. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Démonstration : La méthode étant fortement $A(\theta)$-stable, il existe une matrice inversible H telle que

$$\|H^{-1} L(\infty) H\| < 1,$$

et par continuité, il existe des constantes positives R, μ telles que, pour $|z| \geqq R$, on ait

$$\|H^{-1} L(z) H\| \leqq e^{-\mu},$$

d'où on déduit

$$\|L^n(z)\| \leqq \|H\| . \|H^{-1} L(z) H\|^n . \|H^{-1}\| \leqq C e^{-\mu n}, \qquad \forall z \in S_\theta, \quad |z| \geqq R.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe un voisinage B_0 de 0 dans S_θ de la forme

$$B_0 = \{ z \in \mathbf{C} / z = \zeta + re^{\pm i\theta}, \ 0 \leqq r \leqq \eta_0, \ 0 \leqq \zeta \leqq \zeta_0 \},$$

une application holomorphe $z \to H(z) \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^q)$ et une constante $\mu_0 > 0$ tels que

$$\|H^{-1}(z) L(z) H(z)\| \leqq e^{-\mu_0 \zeta},$$

donc

$$\|L^n(z)\| \leqq \|H(z)\| . \|H^{-1}(z)\| e^{-\mu_0 n \zeta} \leqq C_0 e^{-\mu_0 n \zeta} \qquad \forall z \in B_0.$$

Par ailleurs d'après le lemme 1, on peut trouver des points $z_j \in S_{\theta_1}$, $1 \leqq j \leqq k$, des voisinages B_j de z_j, des matrices H_j inversibles et des constantes μ'_j tels que :

(i) $\bigcup_{j=1}^{k} B_j$ recouvre l'ensemble $\{ z \in \mathbf{C}, \ |\operatorname{Arg} z| \leqq \theta_1, \ |z| \leqq R, \ z \notin B_0 \}$;

(ii) on ait, pour tout $z \in B_j$, $1 \leqq j \leqq k$:

$$\|H_j^{-1} L(z) H_j\| \leqq e^{-\mu_j}$$

d'où, pour tout $z \in B_j$:

$$\|L^n(z)\| \leqq \|H_j\| . \|H_j^{-1}\| . \|H_j^{-1} L(z) H_j\|^n \leqq C_j e^{-\mu_j n}$$

et en posant

$$z = \zeta + re^{\pm i\theta}, \qquad \mu_j = \frac{\mu'_j}{R}, \qquad \|L^n(z)\| \leqq C_j e^{-\mu_j n \zeta}.$$

On a donc le résultat cherche en prenant

$$C=\max\{C_j,\ 0\leqq j\leqq k\},\qquad \mu=\min\{\mu_j,\ 0\leqq j\leqq k\}$$

LEMME 4 *On suppose la methode* (ρ,σ) *fortement* $A(\theta)$*-stable Alors il existe de constantes positives* R, μ, C *telles que, pour tout* z *tel que* $-\theta_1\leqq\operatorname{Arg} z\leqq\theta_1$ $(0\leqq\theta_1<\theta)$ *si* $\theta>0$ *et* $z\in\mathbf{R}$, $z\geqq 0$ *si* $\theta=0$, *on ait*

$$\|L^n(z)-L^n(\infty)\|\leqq C\frac{e^{-\mu n}}{|z|}\qquad \textit{pour}\quad |z|\geqq R \tag{18}$$

Démonstration Pour $n=1$, on a l'égalité

$$L(z)-L(\infty)=-\frac{1}{\beta_q(\alpha_q+\beta_q z)}\begin{bmatrix}\alpha_{q-1}\beta_q-\alpha_q\beta_{q-1}, & \ldots, & \alpha_0\beta_q-\alpha_q\beta_0\\ 0 & & 0\\ & & \\ 0 & & 0\end{bmatrix},$$

donc

$$\|L(z)-L(\infty)\|\leqq\frac{C}{|z|}\qquad \text{pour}\quad |z|\geqq R$$

Pour $n>1$, on a l'egalité

$$L^n(z)-L^n(\infty)=\sum_{k=0}^{n-1}L^k(z)(L(z)-L(\infty))L^{n-1-k}(\infty)$$

d'ou en utilisant le lemme 3,

$$\|L^n(z)-L^n(\infty)\|\leqq C\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-\mu k}e^{-\mu(n-1-k)}}{|z|}\leqq C'\frac{e^{-\mu n}}{|z|}\qquad \text{pour}\quad |z|\geqq R$$

PROPOSITION 4 *On suppose qu'il existe* $a>0$ *tel que* $A-aI$ *soit un opérateur maximal positif et que la méthode* (ρ,σ) *est fortement* A*-stable ou fortement* $A(0)$*-stable si* A *est auto-adjoint Alors il existe deux constantes* C *et* μ_0 *ne dépendant que de* ρ, a, σ *et* Δt_0 *telles que, pour* $\Delta t\leqq\Delta t_0$, *on ait*

$$\|\Lambda^k\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq C\,e^{-\mu_0 k\Delta t} \tag{19}$$

Démonstration Si la méthode est fortement A-stable et $A-aI$ maximal positif, on a

$$\|\Lambda^k\|_{\mathscr{L}(H^q)}=\|L^k(\Delta t A)\|_{\mathscr{L}(H^q)}\leqq\sup_{\operatorname{Re} z\geqq a}\|L^k(\Delta t z)\|$$

et d'après le lemme 3 :

$$\|L^k(\Delta t z)\| \leqq C e^{-\mu k \Delta t \operatorname{Re} z} \leqq C e^{-\mu k \Delta t a} \qquad \text{pour} \quad |\Delta t z| \leqq R$$

et

$$\|L^k(\Delta t z)\| \leqq C e^{-\mu k} \qquad \text{pour} \quad |\Delta t z| \geqq R.$$

On en déduit la majoration (19) avec $\mu_0 = \inf(\mu a, \mu/\Delta t_0)$.

Si la méthode est fortement $A(0)$-stable et A auto-adjoint, on a

$$\|\Lambda^k\|_{\mathscr{L}(H^q)} \leqq \sup_{x \geqq a} \|L^k(\Delta t x)\|$$

et le résultat se déduit de la même façon.

PROPOSITION 5 : *On suppose que la méthode* (ρ, σ) *est fortement* $A(\theta)$*-stable* $(0 < \theta < \pi/2)$ *que l'opérateur* A *est maximal positif et vérifie :*

$$\exists\, a > 0 \quad et \quad \theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right) : \quad \forall u \in D(A), \quad ((A - aI)u, u) \in S_{\theta_0}. \tag{20}$$

Alors pour tout $\Delta t_0 > 0$, *il existe deux constantes* C *et* μ_0 *ne dépendant que de* ρ, σ, a, θ_0 *et* Δt_0 *telles que pour* $\Delta t \leqq \Delta t_0$, *on ait*

$$\|\Lambda^k\|_{\mathscr{L}(H^q)} \leqq C(1 + |\operatorname{Log} \Delta t|) e^{-\mu_0 k \Delta t} \tag{21}$$

Démonstration : On a l'égalité

$$\Lambda^k = L^k(\Delta t A) = L^k(\infty) I + \frac{1}{2\pi i} \int_{a' + \Gamma_{\theta_1}} (L^k(\Delta t z) - L^k(\infty))(zI - \bar{A})^{-1} \, dz,$$

où $a' = a/2$, Γ_{θ_1} est le contour orienté positivement défini par $\operatorname{Arg} z = \pm \theta_1$ $(\theta_0 < \theta_1 < \theta)$ et $\bar{A} \in \mathscr{L}(H^q)$ est définie par $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix}$,

D'autre part, on a la majoration [4] :

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H, H)} \leqq \frac{C}{\theta - \theta_0} \, \frac{1}{|z - a'| + a'}, \qquad \forall z \in \Gamma_{\theta_1} + a'.$$

On définit Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1 = \left\{ z \in \Gamma_{\theta_1} + a', \, |z| \leqq \frac{R}{\Delta t} \right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{ z \in \Gamma_{\theta_1} = a', \, |z| \geqq \frac{R}{\Delta t} \right\}.$$

On obtient en utilisant le lemme 3

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(L^k(\Delta t z)-L^k(\infty))(zI-\overline{A})^{-1}\,dz\right\|$$
$$\leqq \frac{C}{\theta-\theta_0}\int_0^{R/\Delta t} e^{-\mu_0 k\Delta t(a+r(\sin(\theta-\theta_1)/\sin)}\frac{dr}{r+a'}$$
$$+C\frac{e^{-\mu_0 k}}{\theta-\theta_0}\int_0^{R/\Delta t}\frac{dr}{r+a'}\leqq \frac{C}{\theta-\theta_0}e^{-\mu_0 k\Delta t}(1+|\operatorname{Log}\Delta t|)$$

en posant

$$\mu_0=\inf\left(\mu a',\frac{\mu}{\Delta t_0}\right),$$

en utilisant le lemme 4, on obtient

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(L^k(\Delta t z)-L^k(\infty))(zI-\overline{A})^{-1}\,dz\right\|\leqq\frac{C}{\theta-\theta_0}\int_{R/\Delta t}^{\infty}e^{-\mu k}\frac{dr}{\Delta t r^2}\leqq\frac{C}{R}\,\frac{e^{-\mu k}}{\theta-\theta_0},$$

on en déduit donc la majoration (21)

3. ÉTUDE DU CAS OU L'OPERATEUR A DÉPEND DE t

Notations on notera $\overline{\Lambda}_\infty=L(\infty)$ et $\overline{A}(t)$ l'opérateur de $\mathscr{L}(H^q)$ défini par

$$\overline{A}(t)=\begin{pmatrix} A(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A(t)\end{pmatrix}$$

LEMME 5 *On suppose qu'il existe $a>0$ tel que pour tout $t\geqq 0$, $A(t)-aI$ soit un opérateur auto-adjoint positif On suppose que la méthode* (ρ,σ) *est fortement* $A(0)$*-stable Alors pour tout ε, tel que $0\leqq\varepsilon\leqq 1$, il existe deux constantes C et μ ne dépendant que de la méthode* (ρ,σ), *a et ε telles que*

$$\|\overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^k-\overline{\Lambda}_\infty^k)\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}\leqq C\frac{e^{-\mu k\Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}\tag{22}$$

Démonstration La méthode étant fortement $A(0)$-stable et $A(t)-aI$ auto-adjoint positif, on a

$$\|\overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^k-\overline{\Lambda}_\infty^k)\|_{\mathscr{L}(H^q)}\leqq\sup_{x\geqq a}\|x^{\varepsilon}(L^k(\Delta t x)-L^k(\infty))\|$$

Soit $x \in \mathbf{R}$, $a \leqq x \leqq R/\Delta t$ où R est défini dans les lemmes 3 et 4, on a

$$\| x^{\varepsilon}(L^k(\Delta t x) - L^k(\infty)) \| \leqq C(e^{-\mu k \Delta t x} + e^{-\mu k}) x^{\varepsilon} \leqq C' \frac{e^{-\mu' k \Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}$$

avec

$$\mu' = \inf\left(\frac{\mu a}{2}, \frac{\mu}{2\Delta t_0}\right)$$

Soit maintenant $x \geqq R/\Delta t$, d'après le lemme 4, on a alors

$$\| x^{\varepsilon}(L^k(\Delta t x) - L^k(\infty)) \| \leqq C \frac{e^{-\mu k}}{\Delta t x} x^{\varepsilon} \leqq C'' \frac{e^{-\mu k}}{\Delta t^{\varepsilon}} \leqq C' \frac{e^{-\mu' k \Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}$$

D'où, on déduit immédiatement la majoration (22).

Si la méthode est fortement $A(\theta)$-stable $(0 < \theta \leqq \pi/2)$, on a un lemme analogue.

LEMME 6. *On suppose que $A(t)$ est un opérateur maximal positif vérifiant*

$$\left.\begin{array}{l} \exists a > 0 \quad et \quad \theta_0 \left(0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \forall t \geqq 0, \quad \forall u \in D(A), \qquad ((A(t) - aI)u, u) \in S_{\theta_0} \end{array}\right\} \tag{23}$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) utilisée est fortement $A(\theta)$-stable $(\theta_0 < \theta \leqq \pi/2)$. Alors pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, il existe deux constantes C et μ ne dépendant que de la méthode (ρ, σ), a, θ, θ_0, ε telles que

$$\| \overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^k - \overline{\Lambda}_{\infty}^k) \|_{\mathscr{L}(\underline{H}^q, \underline{H}^q)} \leqq C \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}} \tag{24}$$

Démonstration. On a l'égalité

$$\overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^k - \overline{\Lambda}_{\infty}^k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a' + \Gamma_{\theta_1}} z^{\varepsilon}(L^k(\Delta t z) - L^k(\infty))(zI - \overline{A}(t_{n+q}))^{-1}\, dz,$$

où $a' = a/2$ et Γ_{θ_1} est le contour orienté positivement défini par $\operatorname{Arg} z = \pm\theta_1$ $(\theta_0 < \theta_1 < \theta)$.

D'autre part, on a la majoration

$$\| (zI - A(t_{n+q}))^{-1} \|_{\mathscr{L}(H, H)} \leqq \frac{C}{|z - a'| + a'}, \qquad \forall z \in \Gamma_{\theta_1} + a'$$

On définit Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1 = \left\{ z \in a' + \Gamma_{\theta_1}, |z| \leqq \frac{R}{\Delta t} \right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{ z \in a' + \Gamma_{\theta_1}, |z| \geqq \frac{R}{\Delta t} \right\}$$

On obtient en utilisant le lemme 3 :

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} z^{\varepsilon}(L^k(\Delta t z)-L^k(\infty))(zI-\overline{A}(t_{n+q}))^{-1}\,dz\right\|$$
$$\leqq C\left(e^{-\mu k\Delta t a'}\int_0^{\infty} e^{-\mu k\Delta t r(\sin(\theta-\theta_1)/\sin\theta)}\,r^{\varepsilon-1}\,dr+e^{-\mu k}\int_0^{R/\Delta t} r^{\varepsilon-1}\,dr\right).$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $y=(k\Delta t r)^{\varepsilon}$. On obtient alors :

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} z^{\varepsilon}(L^k(\Delta t z)-L^k(\infty))(zI-\overline{A}(t_{n+q}))^{-1}\,dz\right\|$$
$$\leqq C\left(\frac{e^{-\mu k\Delta t a'}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}\int_0^{\infty} e^{-\mu(\sin(\theta-\theta_1)/\sin\theta)\,y^{1/\varepsilon}}\,dy+\frac{e^{-\mu k}}{\Delta t^{\varepsilon}}\right)\leqq C'\frac{e^{-\mu_0 k\Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}.$$

en posant

$$\mu_0=\inf\left(\mu a',\frac{\mu}{2\Delta t_0}\right).$$

En utilisant le lemme 4, on obtient :

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} z^{\varepsilon}(L^k(\Delta t z)-L^k(\infty))(zI-\overline{A}(t_{n+q}))^{-1}\,dz\right\|$$
$$\leqq C\int_{R/\Delta t}^{\infty} e^{-\mu k}\frac{r^{\varepsilon-2}}{\Delta t}\,dr=\frac{C e^{-\mu k}}{\Delta t}\,\frac{R^{\varepsilon-1}}{\varepsilon-1}.$$

On en déduit donc

$$\|\overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^k-\overline{\Lambda}_{\infty}^k)\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq C\frac{e^{-\mu k\Delta t}}{(k\Delta t)^{\varepsilon}}.$$

LEMME 7 : *On fait les hypothèses des propositions* 1, 2 *ou* 3, *sauf l'hypothèse* (8) *ou* (8 bis). *Alors il existe une constante* C, *ne dépendant que de la méthode* (ρ,σ), a, ε *telle que pour tout* $a\geqq 0$, *pour tout* $k\geqq 1$, *on ait*

$$\|\overline{\Lambda}_{n+1}^k-\overline{\Lambda}_n^k\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq CM\,\Delta t\,e^{-\mu k\Delta t}. \tag{25}$$

Démonstration : On démontre cette majoration d'abord dans le cas où $k=1$.

Si $k=1$, on a d'après la définition de $\overline{\Lambda}_n$:

$$\|\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n\|_{\mathscr{L}(H^q)}\leqq C\sum_{i=0}^{q-1}\|\overline{\Delta}_{n+1,i}-\overline{\Delta}_{n,i}\|_{\mathscr{L}(H,H)}$$

et

$$\overline{\Delta}_{n+1,\iota}-\overline{\Delta}_{n,\iota}=(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q+1}))^{-1}$$
$$\times\Delta t(\beta_\iota\,\alpha_q-\beta_q\,\alpha_\iota)(A(t_{n+q+1})-A(t_{n+q}))(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q}))^{-1},$$

d'où

$$\|\overline{\Delta}_{n+1,\iota}-\overline{\Delta}_{n,\iota}\|_{\mathscr{L}(H\,H)}$$
$$\leqq\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q+1}))^{-1}A^{\varepsilon}(t_{n+q+1})\|_{\mathscr{L}(H\,H)}\Delta t\,|\beta_\iota\,\alpha_q-\beta_q\,\alpha_\iota|,$$
$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1})-A(t_{n+q}))A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H\,H)}$$
$$\times\|A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q}))^{-1}\|.$$

Or,

$$\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q+1}))^{-1}A^{\varepsilon}(t_{n+q+1})\|_{\mathscr{L}(H\,H)}\leqq\frac{C}{\Delta t^{\varepsilon}},$$

$$\|A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{n+q}))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H\,H)}\leqq\frac{C}{\Delta t^{1-\varepsilon}}$$

et

$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1})-A(t_{n+q}))A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H\,H)}\leqq M\,\Delta t,$$

d'après l'hypothèse (7).

On en déduit

$$\|\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n\|_{\mathscr{L}(H^q\,H^q)}\leqq CM\,\Delta t.$$

Si k est supérieur ou égal à 2, on a alors :

$$\overline{\Lambda}_{n+1}^k-\overline{\Lambda}_n^k=\sum_{p=0}^{k-1}\overline{\Lambda}_{n+1}^p(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}$$
$$=\sum_{p=1}^{k-2}(\overline{\Lambda}_{n+1}^p-\overline{\Lambda}_\infty^p)(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)(\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}-\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})$$
$$+\sum_{p=0}^{k-2}\overline{\Lambda}_\infty^p(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)(\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}-\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})$$
$$+\sum_{p=1}^{k-1}(\overline{\Lambda}_{n+1}^p-\overline{\Lambda}_\infty^p)(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}+\sum_{p=0}^{k-1}\overline{\Lambda}_\infty^p(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}.$$

On majore ensuite séparément chacun des termes de cette somme

$$\|(\overline{\Lambda}_{n+1}^p-\overline{\Lambda}_\infty^p)(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)(\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}-\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathscr{L}(H^q\,H^q)}$$
$$\leqq\|(\overline{\Lambda}_{n+1}^p-\overline{\Lambda}_\infty^p)\overline{A}^{\varepsilon}(t_{n+q+1})\|_{\mathscr{L}(H^q)},$$
$$\|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H^q)}$$
$$\times\|\overline{A}^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}-\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathscr{L}(H^q)}.$$

D'après le lemme 5, on a

$$\|(\bar\Lambda^p_{n+1}-\bar\Lambda^p_\infty)\bar A^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathscr{L}(H^q)}\leqq C\frac{e^{-\mu p\Delta t}}{(p\,\Delta t)^\varepsilon}$$

et

$$\|\bar A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\bar\Lambda^{k-p-1}_n-\bar\Lambda^{k-p-1}_\infty)\|_{\mathscr{L}(H^q)}\leqq C\frac{e^{-\mu(k-p-1)\Delta t}}{((k-p-1)\,\Delta t)^{1-\varepsilon}}$$

En outre

$$\|\bar A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar\Lambda_{n+1}-\bar\Lambda_n)\bar A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H^q)}$$
$$\leqq C\sum_{\iota=0}^{q-1}\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar\Delta_{n+1\ \iota}-\bar\Delta_{n\ \iota})\bar A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|$$

et

$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar\Delta_{n+1,\iota}-\bar\Delta_{n,\iota})A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H)}$$
$$\leqq\Delta t\,|\alpha_q\beta_\iota-\alpha_\iota\beta_q|\,\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H\ H)},$$

$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1})-A(t_{n+q}))A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H\ H)}$$
$$\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q A(t_{n+q}))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H\ H)}\leqq CM\,\Delta t^2,$$

d'après l'hypothèse (7)

On en déduit

$$\|(\bar\Lambda^p_{n+1}-\bar\Lambda^p_\infty)(\bar\Lambda_{n+1}-\bar\Lambda_n)(\bar\Lambda^{k-p-1}_n-\bar\Lambda^{k-p-1}_\infty)\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}$$
$$\leqq CM\,\Delta t\frac{e^{-\mu(k-1)\Delta t}}{p^\varepsilon(k-1-p)^{1-\varepsilon}}$$

On majore ensuite le deuxième terme

$$\|\bar\Lambda^p_\infty(\bar\Lambda_{n+1}-\bar\Lambda_n)(\bar\Lambda^{k-p-1}_n-\bar\Lambda^{k-p-1}_\infty)\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}$$
$$\leqq C\,e^{-\mu p}\|(\bar\Lambda_{n+1}-\bar\Lambda_n)\bar A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H^q)},$$

$$\|\bar A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\bar\Lambda^{k-p-1}_n-\bar\Lambda^{k-p-1}_\infty)\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}$$

Or,

$$\|(\bar\Lambda_{n+1}-\bar\Lambda_n)\bar A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)}$$
$$\leqq C\,\Delta t\sum_{\iota=0}^{q-1}|\alpha_q\beta_\iota-\alpha_\iota\beta_q|\,\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1}A^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathscr{L}(H)},$$

$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1})-A(t_{n+q}))A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathscr{L}(H\ H)}$$
$$\times\|(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q A(t_{n+q}))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H\ H)}\leqq CM\,\Delta t^{2-\varepsilon},$$

d'après (7). Donc

$$\|\overline{\Lambda}_\infty^p(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)(\overline{\Lambda}_n^{k-p-1}-\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq CM\,\Delta t\, e^{-\mu p}\frac{e^{-\mu(k-p-1)\Delta t}}{(k-1-p)^{1-\varepsilon}},$$

de même

$$\|(\overline{\Lambda}_{n+1}^p-\overline{\Lambda}_\infty^p)(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq CM\,\Delta t\, e^{-\mu p\Delta t}\frac{e^{-\mu(k-1-p)}}{p^\varepsilon}.$$

et

$$\|\overline{\Lambda}_\infty^p(\overline{\Lambda}_{n+1}-\overline{\Lambda}_n)\overline{\Lambda}_\infty^{k-1-p}\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}\leqq CM\,\Delta t\, e^{-\mu(k-1)}.$$

on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\|\overline{\Lambda}_{n+1}^k-\overline{\Lambda}_n^k\|_{\mathscr{L}(H^q.H^q)}&\\ \leqq CM\,\Delta t\Bigg\{&\sum_{p=1}^{k-2}\frac{e^{-\mu(k-1)\Delta t}}{p^\varepsilon(k-1-p)^{1-\varepsilon}}+\sum_{p=0}^{k-2}\frac{e^{-\mu p}\,e^{-\mu(k-1-p)\Delta t}}{(k-1-p)^{1-\varepsilon}}\\ &+\sum_{p=1}^{k-1}\frac{e^{-\mu p\Delta t}\,e^{-\mu(k-1-p)}}{p^\varepsilon}+(k-1)\,e^{-\mu(k-1)}\Bigg\}\\ &\leqq CM\,\Delta t\, e^{-\mu'(k-1)\Delta t}\left(1+\sum_{p=1}^{k-2}\frac{1}{p^\varepsilon(k-1-p)^{1-\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

Il reste donc à majorer la quantité : $\sum_{p=1}^{k-2} 1/(p^\varepsilon(k-1-p)^{1-\varepsilon})$.

On considère pour cela la fonction

$$f(x)=\frac{1}{x^\varepsilon(1-x)^{1-\varepsilon}},\qquad 0<x<1;$$

cette fonction atteint son minimum en ε, on en déduit

$$\frac{1}{(k-1)(p/k-1))^\varepsilon(1-(p/(k-1))^{1-\varepsilon}}\leqq\int_{(p-1)/(k-1)}^{p/(k-1)}\frac{dx}{x^\varepsilon(1-x)^{1-\varepsilon}}\qquad\text{pour}\quad\frac{p}{k-1}\leqq\varepsilon$$

et

$$\frac{1}{(k-1)(p/(k-1))^\varepsilon(1-(p/(k-1))^{1-\varepsilon}}\leqq\int_{p/(k-1)}^{(p+1)/(k-1)}\frac{dx}{x^\varepsilon(1-x)^{1-\varepsilon}}\qquad\text{pour}\quad\frac{p}{k-1}\geqq\varepsilon,$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{k-2}\frac{1}{p^\varepsilon(k-1-p)^{1-\varepsilon}}\leqq\int_0^1\frac{dx}{x^\varepsilon(1-x)^{1-\varepsilon}}\leqq C\qquad\text{pour}\quad 0<\varepsilon<1$$

et donc

$$\|\overline{\Lambda}_{n+1}^{k}-\overline{\Lambda}_{n}^{k}\|\leqq CM\,\Delta t\; e^{\mu(k-1)\Delta t}$$

Ce lemme nous permet alors de démontrer les propositions 1, 2, 3

Démonstration de la proposition 3 Pour simplifier les notations, nous nous contenterons de faire la démonstration dans le cas $k=n+1$, la démonstration se généralisant sans difficulté au cas $k\neq n+1$ On a l'égalité

$$\Lambda_n \quad \Lambda_0=\overline{\Lambda}_0^{n+1}+\sum_{p=1}^{n+1}(\overline{\Lambda}_p^{n+1-p}\Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0-\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+2-p}\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0)$$

En outre,

$$\overline{\Lambda}_p^{n+1p}\Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0-\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+2-p}\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0$$
$$=(\overline{\Lambda}_p^{n+1-p}-\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p})\Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0+\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}(\Lambda_{p-1}-\overline{\Lambda}_{p-1})\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0,$$

d'où

$$\|\Lambda_n \quad \Lambda_0\|_{\mathscr{L}(H^q\; H^q)}\leqq\|\overline{\Lambda}_0^{n+1}\|_{\mathscr{L}(H^q\; H^q)}$$
$$+\sum_{p=1}^{n}\|\overline{\Lambda}_p^{n+1-p}-\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}\| \quad \|\Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0\|$$
$$+\sum_{p=2}^{n+1}\|(\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}-\overline{\Lambda}_{\infty}^{n+1-p})\overline{A}^{\varepsilon}(t_{p-1+q})\|$$
$$\times\|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{p-1+q})(\Lambda_{p-1}-\overline{\Lambda}_{p-1})\| \quad \|\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0\|$$
$$+\sum_{p=2}^{n+1}\|\overline{\Lambda}_{\infty}^{n+1-p}\| \quad \|\Lambda_{p-1}-\overline{\Lambda}_{p-1}\| \quad \|\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0\|$$
$$+\|(\overline{\Lambda}_0^{n}-\overline{\Lambda}_{\infty}^{n})\overline{A}^{\varepsilon}(t_q)\| \quad \|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_q)(\Lambda_0-\overline{\Lambda}_0)\|+\|\overline{\Lambda}_{\infty}^{n}\| \quad \|\Lambda_0-\overline{\Lambda}_0\|$$

D'après la proposition 5,

$$\|\overline{\Lambda}_0^{n+1}\|_{\mathscr{L}(H^q\; H^q)}\leqq C\,e^{-\mu(n+1)\Delta t}(1+|\operatorname{Log}\Delta t|)$$

d'après le lemme 8,

$$\|\overline{\Lambda}_p^{n+1-p}-\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}\|_{\mathscr{L}(H^q\; H^q)}\leqq CM\,\Delta t\; e^{-\mu(n+1-p)\Delta t},$$

d'après le lemme 6,

$$\|\overline{A}^{\varepsilon}(t_{p-1+q})(\overline{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}-\overline{\Lambda}_{\infty}^{n+1-p})\|\leqq C\frac{e^{\quad\mu(n+1-p)\Delta t}}{((n+1-p)\,\Delta t)^{\varepsilon}}\leqq C\frac{e^{-\mu(n+1-p)\Delta t}}{\Delta t^{\varepsilon}},$$

d'après le lemme 3 .

$$\|\overline{\Lambda}_{\infty}^{n+1-p}\|\leqq C\,e^{-\mu(n+1-p)}$$

Il reste à majorer les quantités

$$\|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p-\overline{\Lambda}_p)\| \qquad \text{et} \qquad \|\Lambda_p-\overline{\Lambda}_p\|.$$

Or,

$$\|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p-\overline{\Lambda}_p)\| \leqq C\sum_{\iota=0}^{q-1}\|A^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Delta_{p,\iota}-\overline{\Delta}_{p,\iota})\|_{\mathscr{L}(H\ H)}$$

et

$$\begin{aligned}\|\overline{A}^{\varepsilon}(t_{p+q})(\Delta_{p,\iota}-\overline{\Delta}_{p,\iota})\| & \\ \leqq |\beta_\iota|\,\|\Delta t\,A^{1-\varepsilon}(t_{p+q})(\alpha_q+\Delta t\,\beta_q\,A(t_{p+q}))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H\ H)} & \\ \|A^{-1}(t_{p+q})(A(t_{p+\iota})-A(t_{p+q}))\|.&\end{aligned}$$

Donc d'après l'hypothèse (8) ou (8 *bis*), on obtient :

$$\|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p-\overline{\Lambda}_q)\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)} \leqq CM\,\Delta t^{1+\varepsilon};$$

de même

$$\|\Lambda_p-\overline{\Lambda}_p\|_{\mathscr{L}(H^q\ H^q)} \leqq CM\,\Delta t.$$

Posons alors :

$$a_0=1,$$
$$a_p=e^{\mu p\Delta t}\|\Lambda_{p-1}\ \ldots\ \Lambda_0\|_{\mathscr{L}(H^q,H^q)}, \qquad 1\leqq p\leqq n+1.$$

On a alors :

$$a_{n+1}\leqq C\left((1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)+M\,\Delta t\sum_{p=0}^{n}a_p\right)$$

Montrons par récurrence l'inégalité

$$a_n\leqq C(1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)(1+CM\,\Delta t)^n.$$

En effet, ce résultat est vrai pour $n=1$; supposons que cette inégalité ait lieu pour n; dans ce cas, on a

$$a_{n+1}\leqq C(1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)\left(1+CM\,\Delta t\sum_{p=0}^{n}(1+CM\,\Delta t)^p\right),$$

$$a_{n+1}\leqq C(1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)\left(1+CM\,\Delta t\frac{(1+CM\,\Delta t)^{n+1}-1}{CM\,\Delta t}\right),$$

d'où

$$a_{n+1}\leqq C(1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)(1+CM\,\Delta t)^{n+1}\leqq C(1+|\mathrm{Log}\,\Delta t|)\,e^{CM(n+1)\Delta t}.$$

On obtient donc la majoration

$$\| \Lambda_n \quad \Lambda_0 \|_{\mathscr{L}(H^q \; H^q)} \leqq C\, e^{(CM-\mu)n\Delta t}(1 + |\operatorname{Log} \Delta t|)$$

La démonstration des propositions 1 et 2 est analogue

BIBLIOGRAPHIE

1 G A Baker et J H Bramble *The Construction and Analysis of High Order Single-Step Galerkin Approximation for Parabolic Equations,* Preprint

2 G A Baker J H Bramble et V Thomee *Single Step Galerkin Approximation for Parabolic Problems* Math Comp (a paraître)

3 M Crouzeix, *Sur l'approximation des equations differentielles operationnelles par des methodes de Runge-Kutta* These, Universite de Paris-VI 1975

4 M Crouzeix et P A Raviart, *Approximation d'equations d'evolution lineaires par des methodes multi-pas* (a paraître)

5 H Fujita et A Mizutani, *On the Finite Element Method for Parabolic Equations I Approximation of Holomorphic Semi-Groups* J Math Soc Japan, vol 28 n° 4, 1976

6 T Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York

7 P E Sobolevskii *Sur les equations de type parabolique dans les espaces de Banach,* Troudi Mosk Mat Obv vol 10, 1961, p 297-350

8 M Zlamal *Finite Element Multi Step Methods for Parabolic Equations,* I S N M 28, Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart 1975

9 M Zlamal *Finite Element Multi Step Diseretizations of Parabolic Boundary Value Problems* Math Comp , vol 29 p 350-359

10 M Zlamal, *Finite Element Methods for non Linear Parabolic Equations* R A I R O Analyse numerique, vol 11, n° 1, 1977, p 93 a 107