

D. APPRATO

R. ARCANGELI

**Approximation d'un problème aux limites elliptique
d'ordre deux par éléments finis rationnels de
Wachspress avec intégration numérique**

RAIRO. Analyse numérique, tome 13, n° 1 (1979), p. 3-20

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_1_3_0

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**APPROXIMATION D'UN PROBLÈME
AUX LIMITES ELLIPTIQUE D'ORDRE DEUX
PAR ÉLÉMENTS FINIS RATIONNELS DE WACHSPRESS
AVEC INTÉGRATION NUMÉRIQUE (*)**

par D. APPRATO, R. ARCANGELI ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On étudie l'effet de l'intégration numérique dans l'approximation d'un problème elliptique du 2^e ordre par des méthodes d'éléments finis rationnels de Wachspress. Les estimations asymptotiques de l'erreur obtenues par ces méthodes sont analogues à celles qui résultent de l'utilisation d'éléments finis polynomiaux.

1. INTRODUCTION

Soient Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 , convexe, borné, de frontière Γ et p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions v qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p},$$

et on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{m,\Omega} = \|\cdot\|_{m,2,\Omega}$.

On utilisera également les semi-normes

$$|v|_{l,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 \leq l \leq m,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$, et on pose $|\cdot|_{l,\Omega} = |\cdot|_{l,2,\Omega}$.

(*) Manuscrit reçu le 27 avril 1978.

(1) Faculté des Sciences Exactes, Département de Mathématiques, Pau.

Pour tout compact K de \mathbb{R}^2 , on notera $W^{m,p}(K)$ au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$ et on écrira $\|v\|_{m,p,K}$, $|v|_{l,p,K}$ et $|v|_{l,K}$ au lieu de $\|v\|_{m,p,\overset{\circ}{K}}$, $|v|_{l,p,\overset{\circ}{K}}$ et $|v|_{l,\overset{\circ}{K}}$.

Enfin, pour tout entier $k \geq 0$ et pour toute partie non vide A de \mathbb{R}^2 , on désigne par $P_k(A)$ [resp. par $Q_k(A)$] l'espace vectoriel des (fonctions) polynômes à deux variables sur A de degré $\leq k$ par rapport à l'ensemble des deux variables [resp. par rapport à chaque variable].

Soient d'autre part $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2$, et $f \in L^2(\Omega)$. On suppose que

$$\exists \gamma > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \gamma \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad (1-1)$$

pour presque tout $x \in \bar{\Omega}$.

On considère le problème modèle (qui d'après (1-1) admet une solution unique)

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx, \end{array} \right\} \quad (1-2)$$

où $H_0^1(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Soit \mathcal{H} un ensemble de réels strictement positifs. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on se donne un sous-espace vectoriel V_{0h} de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ et on associe au problème exact (1-2) le problème discret

$$\left. \begin{array}{l} u_h \in V_{0h} \\ \forall v_h \in V_{0h}, \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v_h dx. \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

Le problème classique auquel nous nous intéressons ici est celui de l'étude de l'erreur dans la résolution de (1-3) avec intégration numérique : les coefficients du système linéaire équivalent à (1-3) sont donnés par des intégrales qu'on ne peut généralement pas calculer exactement et que l'on approche donc par des formules de quadrature numérique.

Nous allons utiliser dans ce travail des espaces V_{0h} d'éléments finis rationnels de Wachspress (cf. [16], [2]), auxquels ne s'appliquent pas les méthodes valables pour les éléments finis usuels (cf. Ciarlet-Raviart [7], Strang-Fix [15], Scott [13], Zlamal [18], Ciarlet [6]). Nous limitons notre étude au cas de trois d'entre eux, qui présentent le plus d'intérêt du point de vue de l'informatique (pour les définitions générales concernant les éléments finis, nous renvoyons à Ciarlet [6]).

2. RAPPELS SUR LES ÉLÉMENTS FINIS RATIONNELS DE WACHSPRESS

Soit K un quadrilatère convexe fermé, supposé différent d'un parallélogramme ou d'un trapèze, de sommets $a_{p,K}$, $p \in I = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($a_{4,K}$ désignant le sommet le plus éloigné de la diagonale extérieure d_K de K). Pour tout $p \in I$, on désigne par $l_{p,K}$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_{p,K}(x) = 0$ soit une équation de la droite $d_{p,K}$ passant par les points $a_{p-1,K}$ et $a_{p,K}$. On désigne de même par l_K un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_K(x) = 0$ soit une équation de d_K . Enfin on note h_K (resp. ρ_K) le diamètre de K (resp. le maximum des diamètres des cercles contenus dans K), par $\alpha_{1,K}$ le point de concours des diagonales intérieures et par $\alpha_{2,K}$ (resp. $\alpha_{3,K}$) le point d'intersection de $d_{1,K}$ et de $d_{3,K}$ (resp. de $d_{2,K}$ et de $d_{4,K}$).

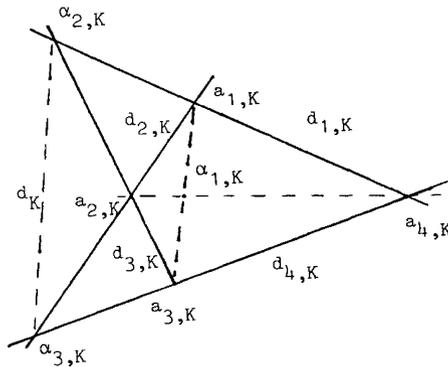


Figure 2.1.

Rappelons la définition des éléments finis rationnels de Serendip sur K de degré 1 et de degré 2 (on convient de dire qu'un élément fini (K, P_K, Σ_K) , au sens de Ciarlet [6], est de degré k si $P_K \supset P_k(K)$ et $P_K \not\supset P_{k+1}(K)$).

L'élément fini rationnel de Serendip de degré 1 (K, P_K, Σ_K) est défini par P_K est l'espace vectoriel engendré par les fonctions de K dans \mathbb{R} $w_{p,K}$, $p \in I$:

$$\forall x \in K, \quad w_{p,K}(x) = \frac{l_K(a_{p,K})}{l_{p+2,K}(a_{p,K})l_{p+3,K}(a_{p,K})} \frac{l_{p+2,K}(x)l_{p+3,K}(x)}{l_K(x)}$$

et

$$\Sigma_K = \{ v \mapsto v(a_{p,K}), p \in I \}.$$

L'élément fini rationnel de Serendip de degré 2 (K, P_K, Σ_K) est défini par

P_K est l'espace vectoriel engendré par les fonctions de K dans $\mathbb{R} w_{p,K}$ et $w_{p-1,K}$, $p \in I$:

$$\forall x \in K, \quad w_{p,K}(x) = \frac{l_K(a_{p,K})l_{p+2,K}(x)l_{p+3,K}(x)l_{p-1,p,p+1,K}(x)}{l_{p+2,K}(a_{p,K})l_{p+3,K}(a_{p,K})l_{p-1,p,p+1,K}(a_{p,K})l_K(x)}$$

$$\forall x \in K, \quad w_{p-1,p}(x) = \frac{l_K(a_{p-1,p,K})l_{p+1,K}(x)l_{p+2,K}(x)l_{p+3,K}(x)}{l_{p+1,K}(a_{p-1,p,K})l_{p+2,K}(a_{p-1,p,K})l_{p+3,K}(a_{p-1,p,K})l_K(x)},$$

(où $l_{p-1,p,p+1}$ est un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_{p-1,p,p+1}(x) = 0$ soit une équation de la droite joignant les points $a_{p-1,p,K}$ et $a_{p,p+1,K}$) et

$$\Sigma_K = \bigcup_{p \in I} \{ v \mapsto v(a_{p,K}), \quad v \mapsto v(a_{p-1,p,K}) \}. \quad \square$$

Pour la définition de l'élément fini rationnel de Serendip sur K de degré 3, on renvoie à [2]. \square

On vérifie que les éléments finis rationnels de Serendip de degré 1, 2 ou 3 sont de classe C^0 . \square

Rappelons également les résultats concernant l'erreur d'interpolation (cf. [2]). Soit $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille de « triangulations » de $\bar{\Omega}$, chaque \mathcal{T}_h étant composée de quadrilatères K , convexes, fermés, non dégénérés en trapèzes ou en parallélogrammes et de diamètres $\leq h$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour $k = 1, 2, 3$, on définit l'espace vectoriel

$$V_h = \{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v_h|_K \in P_K \},$$

où P_K est l'espace vectoriel de l'élément fini rationnel de Serendip de degré k , et, pour tout $v \in C^0(\bar{\Omega})$, on désigne par $\Pi_h v$ le V_h -interpolé de v .

On montre (cf. [2]) que, si $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie les deux hypothèses

$$\exists \sigma > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad (2-1)$$

$$\exists \nu > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \inf_{x \in K} \delta(x, d_K) \geq \nu h_K, \quad (2-2)$$

où $\delta(x, d_K)$ est la distance euclidienne de x à d_K , alors, pour $k = 1, 2, 3$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, avec $p > \frac{2}{k+1}$ et pour $m = 0, 1$, on ait

$$|v - \Pi_h v|_{m,p,\Omega} \leq C |v|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m}. \quad (2-3)$$

Rappelons enfin des résultats concernant la transformation de Coxeter-Wachspress (cf. [16], [2]).

Soient \hat{K} le carré de sommets $\hat{a}_1 = (-1, 1)$, $\hat{a}_2 = (-1, -1)$, $\hat{a}_3 = (1, -1)$, $\hat{a}_4 = (1, 1)$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ le point courant de \hat{K} , et, pour tout $p \in I$, soit \hat{d}_p la

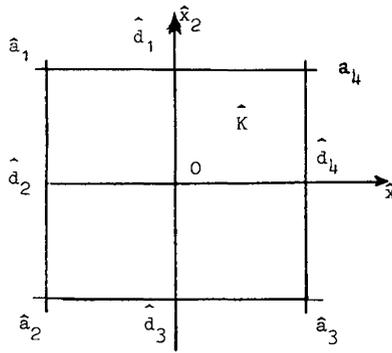


Figure 2.2.

droite passant par les points \hat{a}_{p-1} et \hat{a}_p . Pour tout quadrilatère K , convexe, fermé, non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, il existe une bijection F_K de \hat{K} sur K telle que F_K soit un C^∞ -difféomorphisme de \hat{K} sur K vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall p \in I, \quad F_K(\hat{d}_p \cap \hat{K}) &= d_p \cap K, \\ \forall p \in I, \quad F_K(\hat{a}_p) &= a_{p,K}, \\ F_K(0) &= \alpha_{1,K}. \end{aligned}$$

Si on désigne par $k_{4,K}, m_{4,K}, n_{4,K}$ les coordonnées barycentriques du sommet $a_{4,K}$ de K relativement aux trois points $\alpha_{1,K}, \alpha_{2,K}, \alpha_{3,K}$ et si on pose

$$\forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad s_K(\hat{x}) = k_{4,K} + m_{4,K}\hat{x}_1 + n_{4,K}\hat{x}_2,$$

on obtient

$$\forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad J_K(\hat{x}) = \frac{2A_K k_{4,K} m_{4,K} n_{4,K}}{s_K^3(\hat{x})},$$

où

$$J_K(\hat{x}) = \det(DF_K(\hat{x})),$$

et où A_K désigne l'aire du triangle de sommets $\alpha_{p,K}, p = 1, 2, 3$.

On montre que, sous les hypothèses (2-1) et (2-2), on a les relations :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{O}_h, \quad 1 \leq s_K(\hat{x}) \leq 1 + \frac{1}{v} \tag{2-4}$$

et

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{O}_h, \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad C_1 h_K^2 \leq J_K(\hat{x}) \leq C_2 h_K^2. \tag{2-5}$$

Enfin on vérifie que, pour $k = 1, 2, 3$ et pour tout K , convexe, fermé, non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme,

$$\left\{ \hat{v} \mid \exists v \in P_k(K), \quad \hat{v} = v \circ F_K \right\} = \frac{1}{s_K^k} P_k(\hat{K}) \tag{2-6}$$

et que

$$\{v \mid \exists \hat{v} \in P_k(\hat{K}), \quad v = \hat{v} \circ F_K^{-1}\} = \frac{1}{l_K^k} P_k(K). \quad (2-7)$$

Dans la suite on fera la *convention d'écriture* suivante : pour toutes les notations précédemment introduites qui comportent l'indice K , on omettra cet indice chaque fois qu'il n'y aura pas de confusion possible.

3. DÉFINITION DU PROBLÈME NUMÉRIQUE APPROCHE

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$ du type indiqué au §. 2. Supposons $h \in \mathcal{H}$, fixé. Pour $k = 1, 2, 3$, on définit l'espace vectoriel

$$V_{0h} = \{v_h \in V_h; v_h|_{\Gamma} = 0\},$$

où V_h est l'espace d'éléments finis défini au §. 2.

Pour approcher la solution du problème (1-3), qui s'écrit encore

$$\left. \begin{aligned} & u_h \in V_{0h}, \\ \forall v_h \in V_{0h}, \quad & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^2 \int_K a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h dx, \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

on est conduit à définir la forme générale d'un problème numérique analogue à (1-3), où les intégrales sont remplacées par des approximations numériques : on se donne donc des formules de quadrature numérique sur l'élément courant K de \mathcal{T}_h .

$$\int_K \varphi(x) dx \sim \sum_{\lambda=1}^{L_i} \omega_{\lambda,K}^i \varphi(b_{\lambda,K}^i), \quad i = 1, 2, \quad (3-2)$$

l'indice $i = 1$ correspondant à l'approximation des intégrales figurant au 1^{er} membre de (3-1) et l'indice $i = 2$ à celle des intégrales du 2^e membre. On note

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx, \quad (3-3)$$

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad f(w) = \int_{\Omega} f w dx. \quad (3-4)$$

De même, supposant les a_{ij} et f suffisamment réguliers, on pose

$$\forall v_h, w_h \in V_{0h}, \quad a_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^1 \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) (b_{\lambda,K}^1), \quad (3-5)$$

où v_h et w_h sont respectivement mis pour $v_h|_K$ et $w_h|_K$, et

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad f_h(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\lambda=1}^{L_2} \omega_{\lambda,K}^2 (f w_h)(b_{\lambda,K}^2). \quad (3-6)$$

On définit alors le problème numérique approché

$$\left. \begin{aligned} u_h^* \in V_{0h} \\ \forall w_h \in V_{0h}, \quad a_h(u_h^*, w_h) = f_h(w_h). \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

Il reste donc à préciser le choix des poids $\omega_{\lambda,K}^i$ et des nœuds $b_{\lambda,K}^i, i = 1, 2$, dans les formules (3-2).

Commençons par le cas $i = 1$, qui correspond au 1^{er} membre de (3-7). Pour tout $k = 1, 2, 3$, soient $(\hat{q}_\lambda)_{\lambda=1, \dots, 4k^2}$ les fonctions de base de la $Q_{2k-1}(\hat{K})$ — interpolation de Lagrange (cf. [6]) et $(\hat{b}_\lambda)_{\lambda=1, \dots, 4k^2}$ les nœuds correspondants. Pour $k = 1, 2, 3$, on pose

$$\forall \lambda = 1, \dots, L_1 = 4k^2, \quad \widehat{\omega}_\lambda^1(s) = \int_{\hat{K}} \frac{\hat{q}_\lambda(\hat{x})}{s^{2k+1}(\hat{x})} d\hat{x} \quad (3-8)$$

et on définit

$$\forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad \omega_{\lambda,K}^1 = \widehat{\omega}_\lambda^1(s) J_K(\hat{b}_\lambda) s^{2k+1}(\hat{b}_\lambda), \quad (3-9)$$

$$\forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad b_{\lambda,K}^1 = F_K(\hat{b}_\lambda). \quad (3-10)$$

Pour $k = 1, 2, 3$, on désigne par $v_0(k)$ un nombre tel que

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v_0(k)}\right)^{2k+1}} > \sup_{\lambda=1, \dots, 4k^2} \frac{\int_{\hat{K}_\lambda^-} |\hat{q}_\lambda| d\hat{x}}{\int_{\hat{K}_\lambda^+} |\hat{q}_\lambda| d\hat{x}}, \quad (3-11)$$

où pour tout $\lambda = 1, \dots, 4k^2$,

$$\hat{K}_\lambda^- = \{ \hat{x} \in \hat{K} \mid \hat{q}_\lambda(\hat{x}) < 0 \} \quad \text{et} \quad \hat{K}_\lambda^+ = \{ \hat{x} \in \hat{K} \mid \hat{q}_\lambda(\hat{x}) \geq 0 \},$$

l'existence de $v_0(k)$ résultant de ce que

$$\forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad \int_{\hat{K}} \hat{q}_\lambda(\hat{x}) d\hat{x} > 0.$$

On suppose désormais que pour $k = 1, 2, 3$, la famille $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie, non plus l'hypothèse (2-2), mais l'hypothèse

$$\exists v > 0, \quad v \geq v_0(k), \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h, \quad \inf_{x \in K} \delta(x, d_K) \geq v h_K, \quad (3-12)$$

où $v_0(k)$ est défini par (3-11).

PROPOSITION 3.1 : *On suppose vérifiée l'hypothèse (3-12). Alors pour $k = 1, 2, 3$, les nombres $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$ définis par (3-8) sont tels que*

$$\exists \widehat{C}_1 > 0, \exists \widehat{C}_2 > 0, \forall h \in \mathcal{H}, \forall K \in \mathcal{C}_h, \forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \widehat{C}_1 \leq \widehat{\omega}_\lambda^1(s) \leq \widehat{C}_2.$$

Démonstration : Résulte de la définition (3-8) des $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$, de l'hypothèse (3-12) et de la relation (2-4). \square

On a le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 3.1 : *Pour $k = 1, 2, 3$, pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout $K \in \mathcal{C}_h$,*

$$\forall \widehat{v} \in \mathcal{Q}_{2k-1}(\widehat{K}), \quad \int_{\widehat{K}} \frac{\widehat{v}(\widehat{x})}{s^{2k+1}(\widehat{x})} d\widehat{x} = \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{\omega}_\lambda^1(s) \widehat{v}(\widehat{b}_\lambda),$$

où les $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$ sont définis par (3-8)

Démonstration : Par définition des \widehat{q}_λ on a

$$\forall \widehat{v} \in \mathcal{Q}_{2k-1}, \quad \widehat{v} = \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{v}(\widehat{b}_\lambda) \widehat{q}_\lambda.$$

D'où le résultat, après division par s^{2k+1} et intégration sur \widehat{K} . \square

Considérons maintenant le cas $i = 2$, qui correspond au 2^e membre de (3-7). Pour $k = 1, 2, 3$, on pose

$$\forall \lambda = 1, \dots, L_2 = 4k^2, \quad \widehat{\omega}_\lambda^2(s) = \int_{\widehat{K}} \frac{\widehat{q}_\lambda(\widehat{x})}{s^{2k+2}(\widehat{x})} d\widehat{x}, \quad (3-13)$$

$$\forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad \omega_{\lambda,K}^2 = \widehat{\omega}_\lambda^2(s) J_K(\widehat{b}_\lambda) s^{2k+2}(\widehat{b}_\lambda) \quad (3-14)$$

$$\forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad b_{\lambda,K}^2 = F_K(\widehat{b}_\lambda), \quad (3-15)$$

où les \widehat{q}_λ et les \widehat{b}_λ sont définis comme précédemment (on a donc, pour tout $\lambda = 1, \dots, 4k^2$, $b_{\lambda,K}^1 = b_{\lambda,K}^2$).

On a de même la

PROPOSITION 3.2 : *Pour $k = 1, 2, 3$, les nombres $\widehat{\omega}_\lambda^2(s)$ définis par (3-13) sont tels que*

$$\exists \widehat{C}_3 > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h, \quad \forall \lambda = 1, \dots, 4k^2, \quad |\widehat{\omega}_\lambda^2(s)| \leq \widehat{C}_3$$

(notons que les poids $\widehat{\omega}_\lambda^2(s)$ ne sont pas nécessairement positifs) et le

THÉORÈME 3.2 : *Pour $k = 1, 2, 3$, pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout $K \in \mathcal{C}_h$,*

$$\forall \widehat{v} \in \mathcal{Q}_{2k-1}(\widehat{K}), \quad \int_{\widehat{K}} \frac{\widehat{v}(\widehat{x})}{s^{2k+2}(\widehat{x})} d\widehat{x} = \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{\omega}_\lambda^2(s) \widehat{v}(\widehat{b}_\lambda),$$

où les $\widehat{\omega}_\lambda^2(s)$ sont définis par (3-13). \square

Dans la suite, nous allons suivre la méthode introduite par Ciarlet-Raviart [7] et Ciarlet [6], ce qui conduit à examiner successivement

— le problème de l'ellipticité uniforme de la forme bilinéaire a_h définie par (3-5);

— celui de la majoration, pour $k = 1, 2, 3$, $K \in \overline{\mathcal{C}}_h$, $i, j = 1, 2$ et $v_h, w_h \in V_{0h}$, des quantités $E_K^1\left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}\right)$ et $E_K^2(fw_h)$, où les formes linéaires E_K^1 et E_K^2 sont définies par

$$\forall v \in C^0(K), \quad E_K^1(v) = \int_K v dx - \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_{\lambda,K}^1 v(b_{\lambda,K}^1) \quad (3-16)$$

et

$$\forall v \in C^0(K), \quad E_K^2(v) = \int_K v dx - \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_{\lambda,K}^2 v(b_{\lambda,K}^2); \quad (3-17)$$

— enfin celui de la majoration de l'erreur $|u - u_h^*|_{1,\Omega}$, u_h^* désignant la solution de (3-7).

On suppose dorénavant que, pour $k = 1, 2, 3$,

$$\forall i, j = 1, 2; \quad a_{ij} \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad (3-18)$$

$$f \in W^{k,p}(\Omega), \quad p > \frac{2}{k}. \quad (3-19)$$

4. V_{0h} -ELLIPTICITE UNIFORME DE LA FORME a_h

On considère toujours que $h \in \mathcal{H}$ est fixé.

THÉORÈME 4.1 : On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (2-1), (3-12) et (3-18). Alors, pour $k = 1, 2, 3$, il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad a_h(v_h, v_h) \geq \beta |v_h|_{1,\Omega}^2$$

où V_{0h} est l'espace introduit au §. 3 et a_h la forme bilinéaire définie en (3-5).

Démonstration : Par définition

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad a_h(v_h, v_h) = \sum_{K \in \overline{\mathcal{C}}_h} \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_{\lambda,K}^1 \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(b_{\lambda,K}^1) \frac{\partial v_h}{\partial x_j}(b_{\lambda,K}^1) \frac{\partial v_h}{\partial x_i}(b_{\lambda,K}^1).$$

Dans la suite, conformément à la convention d'écriture du §. 2, on supprime l'indice K et on désigne par C diverses constantes. Compte tenu de l'hypothèse (1-1) et du fait que les coefficients ω_λ^1 sont positifs d'après (3-9), la proposition (3-1), (2-5) et (2-4), il vient

$$a_h(v_h, v_h) \geq \gamma \sum_{K \in \overline{\mathcal{C}}_h} \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_\lambda^1 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_i}(b_\lambda^1) \right)^2$$

soit encore

$$a_h(v_h, v_h) \geq \gamma \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{\omega}_\lambda^1(s) J(\widehat{b}_\lambda) s^{2k+1} (\widehat{b}_\lambda) \sum_{i=1}^2 \left(\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F \right) (\widehat{b}_\lambda) \right)^2.$$

Utilisant la proposition (3-1) et (2-4) on obtient

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \inf_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J(\widehat{x}) \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^2 \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \left(s^{k-1} (\widehat{b}_\lambda) \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F \right) (\widehat{b}_\lambda) \right)^2.$$

On vérifie que, pour $k = 1, 2, 3$,

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad \forall i = 1, 2, \quad \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F \in \frac{1}{s^{k-1}} Q_k(\widehat{K}).$$

Étant donné que l'ensemble $\{\widehat{b}_\lambda\}_{\lambda=1, \dots, 4k^2}$ est $Q_{2k-1}(\widehat{K})$ -unisolvant, on en déduit que l'application

$$\widehat{v} \rightarrow \left(\sum_{\lambda=1}^{4k^2} (\widehat{v}(\widehat{b}_\lambda))^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $Q_k(\widehat{K})$. Il existe donc une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \inf_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J(\widehat{x}) \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^2 \left\| s^{k-1} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0, \widehat{K}}^2.$$

D'où, utilisant à nouveau (2-4),

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \frac{\inf_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J(\widehat{x})}{\sup_{\widehat{x} \in \widehat{K}} J(\widehat{x})} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v_h|_{1, K}^2$$

et le résultat suit compte tenu de (2-5). \square

Il résulte du théorème (4-1) que pour $k = 1, 2, 3$, le problème (3-7) admet une solution unique. \square

5. MAJORATIONS DE $E_K^1\left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}\right)$ ET DE $E_K^2(f w_h)$

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $K \in \mathcal{C}_h$, fixés.

THÉORÈME 5.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses (2-1), (3-12) et (3-18). Alors pour $k = 1, 2, 3$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que*

$$\forall i, j = 1, 2, \quad \forall v_h, w_h \in V_{0h}, \quad \left| E_K^1\left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}\right) \right| \leq \frac{C}{k - \frac{2}{p}} \left| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right|_{k, p, K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0, q, K} h_K^k,$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration : Il suffit de montrer le théorème sous l'hypothèse $a_{ij} \in C^k(\bar{\Omega})$, le résultat général s'obtenant alors en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ et par passage à la limite lorsque $p = +\infty$. Supposons donc que, pour $i, j = 1, 2$, $a_{ij} \in C^k(\bar{\Omega})$. Pour tout $y \in K$, on note $\Psi_T^{k-1}(y)$ le polynôme de Taylor à l'ordre $k - 1$ au point y de la fonction $a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}$, i. e. l'application

$$x \in K \rightarrow \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{D^\lambda a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}(y) \cdot (x - y)^\lambda}{\lambda!},$$

où D^λ est l'application dérivée $\lambda^{\text{ième}}$. On a

$$a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} = \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} - \Psi_T^{k-1}(y) \right) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} + \Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i}.$$

Il résulte de la définition (3-16) de E_K^1 que

$$E_K^1 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) = E_K^1 \left(\left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} - \Psi_T^{k-1}(y) \right) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) + E_K^1 \left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right).$$

Pour tout $v \in C^0(K)$, d'après (3-16),

$$E_K^1(v) = \int_{\hat{K}} (v \circ F)(\hat{x}) J(\hat{x}) d\hat{x} - \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{\omega}_\lambda^1(s) J(\hat{b}_\lambda) s^{2k+1} (\hat{b}_\lambda)(v \circ F)(\hat{b}_\lambda).$$

Étant donné que J est de la forme $\frac{C}{s^3}$, on a

$$\begin{aligned} E_K^1 \left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) &= C \int_{\hat{K}} \left(\left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \circ F \right) (\hat{x}) \frac{1}{s^3(\hat{x})} d\hat{x} \\ &\quad - C \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \widehat{\omega}_\lambda^1(s) \left(\left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \circ F \right) (\hat{b}_\lambda) s^{2k-2} (\hat{b}_\lambda). \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad \forall i = 1, 2, \quad \left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \circ F \in \frac{1}{s^{2k-2}} \mathcal{Q}_{2k-1}(\hat{K}).$$

Appliquant alors le théorème 3-1 avec

$$\hat{v} = \left(\left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \circ F \right) s^{2k-2},$$

on obtient

$$E_K^1 \left(\Psi_T^{k-1}(y) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) = 0.$$

On en déduit que

$$\left| E_K^1 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| \leq \int_K \left| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} - \Psi_T^{k-1}(y) \right| \left| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right| dx \\ + \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_\lambda^1 \left| a_{ij}(b_\lambda^1) \frac{\partial v_h}{\partial x_j}(b_\lambda^1) - (\Psi_T^{k-1}(y))(b_\lambda^1) \right| \left| \frac{\partial w_h}{\partial x_i}(b_\lambda^1) \right|,$$

soit encore

$$\left| E_K^1 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| \leq \left\| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} - \Psi_T^{k-1}(y) \right\|_{0,p,K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K} \\ + \left(\sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_\lambda^1 \left| a_{ij}(b_\lambda^1) \frac{\partial v_h}{\partial x_j}(b_\lambda^1) - (\Psi_T^{k-1}(y))(b_\lambda^1) \right| \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K},$$

$$\text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On prend alors les normes $L^p(K)$ des deux membres de l'inégalité ci-dessus considérés comme fonctions de y et, en utilisant les résultats de Arcangéli-Gout [3], il vient, avec $p > \frac{2}{k}$,

$$\left| E_K^1 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| \leq \frac{C h_K^k}{(k-1)! \left(k - \frac{2}{p} \right)} \left| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right|_{k,p,K} \left(\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K} \right. \\ \left. + \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} \frac{\sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_\lambda^1}{(\text{mes } K)^{1/p}} \right),$$

où C est indépendante de h et de K .

Or, compte tenu de (2-4),

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} \leq \left\| s^{k-1} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0,\infty,\hat{K}}$$

et comme

$$s^{k-1} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \in Q_k(\hat{K}),$$

il existe une constante C indépendante de h et de K telle que

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} \leq C \left\| s^{k-1} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0,q,\hat{K}}.$$

Utilisant à nouveau (2-4), on obtient

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} \leq C \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0,q,\hat{K}},$$

soit encore

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0, \infty, K} \leq \frac{C}{(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J(\hat{x}))^{1/q}} \left\| \frac{\partial w^h}{\partial x_i} \right\|_{0, q, K}$$

Finalement

$$\left| E_K^1 \left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right| \leq \left(1 + \frac{C \sum_{\lambda=1}^{4k^2} \omega_\lambda^1}{(\text{mes } K)^{1/p} (\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J(\hat{x}))^{1/q}} \right) \frac{1}{(k-1)! \left(k - \frac{2}{p}\right)} \left| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right|_{k, p, K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0, q, K} h_K^k$$

et le théorème suit compte tenu de (2-4), (2-5) et de la proposition (3-1). \square

THÉORÈME 5.2 : *On suppose vérifiées les hypothèses (2-1), (3-12) et (3-19). Alors, pour $k = 1, 2, 3$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et K telle que*

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad |E_K^2(f w_h)| \leq \frac{C}{k - \frac{2}{p}} |f|_{k, p, K} \|w_h\|_{0, q, K} h_K^k$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration : Analogue à celle du théorème 5-1. On introduit ici $\varphi_T^{k-1}(y)$, polynôme de Taylor à l'ordre $k - 1$ au point y de la fonction f et on utilise le fait que

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad s^{2k-1}(\varphi_T^{k-1}(y)w_h) \circ F \in Q_{2k-1}(\hat{K}),$$

le théorème 3-2 et la relation

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad s^k(w_h \circ F) \in Q_k(\hat{K}). \quad \square$$

6. MAJORATION DE L'ERREUR $|u - u_h^*|_{1, \Omega}$

THÉORÈME 6.1 : *Pour $k = 1, 2, 3$ soit V_{0h} l'espace défini au §. 3. On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (2-1), (3-12), (3-18) et (3-19). On désigne par u la solution du problème (1-2) et par u_h^* celle du problème défini par (3-7) et (3-5), (3-6), (3-8), (3-9), (3-10), (3-13), (3-14), (3-15). On suppose que u vérifie la condition de régularité*

$$u \in W^{2, p}(\Omega), \quad p > 2$$

lorsque $k = 1$, et

$$u \in H^{k+1}(\Omega)$$

lorsque $k = 2, 3$. Alors pour $k = 1, 2, 3$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :

$$|u - u_h^*|_{1,\Omega} \leq C \left(|u|_{k+1,\Omega} + \left(\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \|u\|_{k+1,p,\Omega} + |f|_{k,p,\Omega} \right) h^k,$$

avec $p > 2$ si $k = 1$ et $p = 2$ si $k = 2, 3$.

Démonstration : Il résulte d'un théorème de Ciarlet-Raviart [7] et du théorème (4-1) que :

$$|u - u_h^*|_{1,\Omega} \leq C \left(\inf_{v_h \in V_{0h}} \left\{ |u - v_h|_{1,\Omega} + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{|w_h|_{1,\Omega}} \right\} + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{|w_h|_{1,\Omega}} \right).$$

D'après le théorème 5-1 avec $v_h = \Pi_h u$, où $\Pi_h u$ désigne encore le V_{0h} interpolé de u , on a, pour $k = 1, 2, 3$, pour tout $p \geq 1$, $p > \frac{2}{k}$ et pour tout $w_h \in V_{0h}$,

$$|a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \frac{Ch^k}{k - \frac{2}{p}} \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \sum_{i,j=1}^2 \left| a_{ij} \frac{\partial(\Pi_h u)}{\partial x_j} \right|_{k,p,K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K},$$

d'où, compte tenu de (3-18),

$$|a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \frac{Ch^k}{k - \frac{2}{p}} \left(\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \|\Pi_h u\|_{k+1,p,K} |w_h|_{1,q,K}.$$

Utilisant les résultats de [2] concernant les majorations des dérivées des fonctions de base de la V_{0h} -interpolation, on vérifie qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que

$$\|\Pi_h u\|_{k+1,p,K} \leq C \|u\|_{k+1,p,K}.$$

Donc, pour $p > 2$, $k = 1$ et pour $p = 2$, $k = 2, 3$, compte tenu de l'inclusion $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q \leq 2$, on a, pour tout $w_h \in V_{0h}$:

$$|a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \frac{Ch^k}{k - \frac{2}{p}} \left(\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \|u\|_{k+1,p,\Omega} |w_h|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, d'après le théorème 5-2 et en utilisant l'équivalence des normes

$|\cdot|_{1,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient de manière analogue pour $p > 2$, $k = 1$ et $p = 2, k = 2, 3$,

$$\forall w_h \in V_{0h}, \quad |f(w_h) - f_h(w_h)| \leq \frac{Ch^k}{k - \frac{2}{p}} |f|_{k,p,\Omega} |w_h|_{1,\Omega}.$$

Enfin, d'après la relation (2-3), on a pour $k = 1, 2, 3$,

$$|u - \Pi_h u|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega},$$

d'où le résultat. \square

7. COMPLÈMENTS SUR LES FORMULES DE QUADRATURE NUMÉRIQUE

La méthode d'intégration entrant dans la définition du problème numérique approché (3-7) a été indiquée au § 3 : les nœuds d'intégration sur K sont, pour les deux membres de (3-1), les images par la transformation F_k des nœuds de la Q_{2k-1} -interpolation de Lagrange sur \hat{K} (cf. fig. 7.1, 7.2, 7.3) et

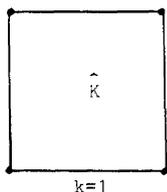


Figure 7.1.

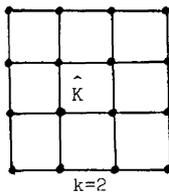


Figure 7.2.

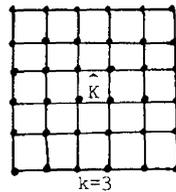


Figure 7.3.

les poids d'intégration sur K sont définis à partir de poids d'intégration sur \hat{K} suivant les formules (3-8), (3-9) pour le premier membre de (3-1), et (3-13), (3-14) pour le second membre.

Rappelons que la démonstration de la V_{0h} -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire a_h (théorème 4.1) nécessite la positivité des poids $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$ qui elle-même résulte de la condition (3-11) sur $v_0(k)$. Il est clair que l'on peut prendre

$$v_0(1) > 0, \quad \text{quelconque.}$$

Nous avons étudié le cas $k = 2$: on peut vérifier que

$$v_0(2) = 4,5$$

satisfait bien à (3-11). On peut d'ailleurs penser que les poids $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$ sont positifs sous des conditions moins restrictives que (3-11).

Du point de vue pratique, le travail le plus important consiste en le calcul effectif des poids $\widehat{\omega}_\lambda^i(s)$. Ainsi que l'a montré Wachspress [16] dans un cas analogue, les intégrales définissant les poids $\widehat{\omega}_\lambda^1(s)$ et $\widehat{\omega}_\lambda^2(s)$ dans (3-8) et (3-13) peuvent se calculer exactement par intégrations par parties successives.

A titre d'exemple, nous donnons en annexe la valeur des $\omega^i(s)$ pour $k = 1$.

ANNEXE

Expression des poids $\widehat{\omega}_\lambda^i(s)$, $\lambda = 1, \dots, 4$, dans le cas $k = 1$

On pose avec les notations du paragraphe 2 :

$$A = k_{4,K} + m_{4,K} + n_{4,K}$$

$$B = k_{4,K} - m_{4,K} + n_{4,K}$$

$$C = k_{4,K} + m_{4,K} - n_{4,K}$$

$$D = k_{4,K} - m_{4,K} - n_{4,K}$$

$$P = -A(\text{Log } A - 1) + B(\text{Log } B - 1) + C(\text{Log } C - 1) - D(\text{Log } D - 1)$$

et, cf. [fig. 2.2], si $\widehat{a}_\lambda = (\widehat{a}_{1,\lambda}, \widehat{a}_{2,\lambda})$ désignent pour $\lambda = 1, \dots, 4$ les sommets du carré \widehat{K} , on a : $\forall \lambda = 1, \dots, 4$

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_\lambda^1(s) = & \frac{1}{8n_{4,K}m_{4,K}} \left(- (1 + \widehat{a}_{2,\lambda}) \left(\frac{-(1 + \widehat{a}_{1,\lambda})}{A} + \frac{(1 - \widehat{a}_{1,\lambda})}{B} + \frac{\widehat{a}_{1,\lambda}}{m_{4,K}} \text{Log} \left(\frac{A}{B} \right) \right) \right. \\ & + (1 - \widehat{a}_{2,\lambda}) \left(\frac{-(1 + \widehat{a}_{1,\lambda})}{C} + \frac{(1 - \widehat{a}_{1,\lambda})}{D} + \frac{\widehat{a}_{1,\lambda}}{m_{4,K}} \text{Log} \left(\frac{C}{D} \right) \right) \\ & \left. - \frac{\widehat{a}_{2,\lambda}}{n_{4,K}} \left((1 + \widehat{a}_{1,\lambda}) \text{Log} \left(\frac{A}{C} \right) - (1 - \widehat{a}_{1,\lambda}) \text{Log} \left(\frac{B}{D} \right) + \frac{\widehat{a}_{1,\lambda}}{m_{4,K}} P \right) \right). \end{aligned}$$

De même si on pose $\forall \lambda = 1, \dots, 4$,

$$E_\lambda = k_{4,K} + m_{4,K}\widehat{a}_{1,\lambda} + n_{4,K}\widehat{a}_{2,\lambda}$$

$$F_\lambda = k_{4,K} - m_{4,K}\widehat{a}_{1,\lambda} + n_{4,K}\widehat{a}_{2,\lambda}$$

$$G_\lambda = k_{4,K} + m_{4,K}\widehat{a}_{1,\lambda} - n_{4,K}\widehat{a}_{2,\lambda}$$

$$H_\lambda = k_{4,K} - m_{4,K}\widehat{a}_{1,\lambda} - n_{4,K}\widehat{a}_{2,\lambda}$$

on a, pour tout $\lambda = 1, \dots, 4$,

$$\widehat{\omega}_\lambda^1(s) = \frac{1}{24m_{4,K}^2n_{4,K}^2E_\lambda} \left(E_\lambda \text{Log} \left(\frac{F_\lambda G_\lambda}{E_\lambda H_\lambda} \right) + 4\widehat{a}_{1,\lambda}\widehat{a}_{2,\lambda}m_{4,K}n_{4,K} \left(\frac{1}{E_\lambda} - \frac{1}{F_\lambda} - \frac{1}{G_\lambda} \right) \right),$$

ce qui donne puisque $\hat{a}_1 = (1, -1)$, $\hat{a}_2 = (-1, -1)$, $\hat{a}_3 = (-1, 1)$, $\hat{a}_4 = (1, 1)$,

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_1^1(s) &= \frac{1}{8n_{4,K}m_{4,K}} \left(2 \left(\frac{-2}{C} + \frac{1}{m_{4,K}} \operatorname{Log} \left(\frac{C}{D} \right) \right) + \frac{1}{n_{4,K}} \left(2 \operatorname{Log} \left(\frac{A}{C} \right) + \frac{P}{m_{4,K}} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_2^1(s) &= \frac{1}{8n_{4,K}m_{4,K}} \left(2 \left(\frac{2}{D} - \frac{1}{m_{4,K}} \operatorname{Log} \left(\frac{C}{D} \right) \right) + \frac{1}{n_{4,K}} \left(-2 \operatorname{Log} \left(\frac{B}{D} \right) - \frac{P}{m_{4,K}} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_3^1(s) &= \frac{1}{8n_{4,K}m_{4,K}} \left(-2 \left(\frac{2}{B} - \frac{1}{m_{4,K}} \operatorname{Log} \left(\frac{A}{B} \right) \right) + \frac{1}{n_{4,K}} \left(2 \operatorname{Log} \left(\frac{B}{D} \right) + \frac{P}{m_{4,K}} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_4^1(s) &= \frac{1}{8n_{4,K}m_{4,K}} \left(-2 \left(\frac{-2}{A} + \frac{1}{m_{4,K}} \operatorname{Log} \left(\frac{A}{B} \right) \right) - \frac{1}{n_{4,K}} \left(2 \operatorname{Log} \left(\frac{A}{C} \right) + \frac{P}{m_{4,K}} \right) \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_1^2(s) &= \frac{1}{24Cm_{4,K}^2n_{4,K}^2} \left(C \operatorname{Log} \left(\frac{AD}{BC} \right) - 4m_{4,K}n_{4,K} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D} - \frac{1}{A} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_2^2(s) &= \frac{1}{24Dm_{4,K}^2n_{4,K}^2} \left(D \operatorname{Log} \left(\frac{BC}{AD} \right) + 4m_{4,K}n_{4,K} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_3^2(s) &= \frac{1}{24Bm_{4,K}^2n_{4,K}^2} \left(B \operatorname{Log} \left(\frac{AD}{BC} \right) - 4m_{4,K}n_{4,K} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} - \frac{1}{D} \right) \right) \\ \widehat{\omega}_4^2(s) &= \frac{1}{24Am_{4,K}^2n_{4,K}^2} \left(A \operatorname{Log} \left(\frac{BC}{AD} \right) + 4m_{4,K}n_{4,K} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \right)\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. D. APPRATO, *Thèse 3^e cycle*, Pau, 1978.
2. D. APPRATO, R. ARCANGELI et J. L. GOUT, *Sur les éléments finis rationnels de Wachspress*, Numerische Mathematik, à paraître.
3. R. ARCANGELI et J. L. GOUT, *Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n* , R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 10, 1976, p. 5-27.
4. R. ARCANGELI, J. L. GOUT et R. ROYER, *Étude de l'erreur d'interpolation rationnelle de Wachspress sur un polygone*, Publications Mathématiques de Pau, 1976.
5. P. G. CIARLET, *Numerical analysis of the finite element method*, Université de Montréal, 1976.
6. P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland Amsterdam, 1977.
7. P. G. CIARLET et P. A. RAVIART, *The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods*, dans « The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations », A. K. Aziz, ed., Academic Press, New York, 1972, p. 409-474.
8. P. J. DAVIS et P. RABINOWITZ, *Methods of numerical integration*, Academic Press, New York, 1975.
9. G. J. FIX, *Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems*, dans « The mathematical foundations

- of the finite element method with applications to partial differential equations », A. K. Aziz, ed., Academic Press, New York, 1972, p. 525-556.
10. V. I. KRYLOV, *Approximate calculation of integrals*, Macmillan, New York, 1962.
 11. R. MCLEOD, *Hermite interpolation over curved finite elements*, Journal of Approximation Theory, 19, n° 2, 1977, p. 101-117.
 12. P. A. RAVIART, *Méthode des éléments finis*, rédigé par J. M. Thomas, D.E.A. Analyse Numérique, Paris VI, 1971-1972.
 13. R. SCOTT, *Finite element techniques for curved boundaries*, Ph. D. dissertation, M.I.T., 1973.
 14. G. STRANG, *Variational crimes in the finite element method*, dans « The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, A. K. Aziz, ed., Academic Press, New York, 1972, p. 689-710.
 15. G. STRANG et G. J. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
 16. E. L. WACHSPRESS, *A rational finite element basis*, Academic Press, 1975.
 17. O. C. ZIENKIEWICZ, *La méthode des éléments finis*, Ediscience, Paris, 1973.
 18. M. ZLAMAL, *Curved elements in the finite element method*, S.I.A.M., J. Numer. Anal., 10, 1973, p. 229-240.