

THIERRY CANEL

BERNARD GAUTIER

NICOLAS ZAMFIRESCU

Mesure de performance-risque des SICAV françaises

Journal de la société statistique de Paris, tome 132, n° 3 (1991),
p. 61-92

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1991__132_3_61_0

© Société de statistique de Paris, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MESURE DE PERFORMANCE-RISQUE DES SICAV FRANÇAISES

Thierry CANEL *, Bernard GAUTIER **, Nicolas ZAMFIRESCU ***

RÉSUMÉ ¹

Le problème traité dans cet article est celui de la classification et de l'évaluation des performances, en terme de rentabilité-risque, des Sociétés d'Investissement à Capital Variable (Sicav) françaises.

Les solutions visent la mise en place d'indicateurs suffisamment significatifs pour permettre aux investisseurs, par leur utilisation, d'apprécier la rentabilité espérée, le risque encouru et la part des facteurs de risque dans l'explication de la volatilité de la Sicav. De plus, ceux-ci devraient leur permettre une analyse effective de la performance ex post, au sein d'une classe homogène de Sicav, et un contrôle de la politique de gestion affichée.

Les méthodes utilisées pour atteindre ces buts s'inspirent largement de celles employées dans les théories modernes du portefeuille et les études d'actifs financiers : CAPM, APT, calcul différentiel stochastique et martingales, évaluation des options, et les résultats obtenus tiennent compte des hypothèses formulées dans ces modèles.

Cet article est composé comme suit :

La première partie est théorique et est consacrée à la définition formelle des indicateurs. Une sous-section utilise la visualisation géométrique dans l'espace pour expliquer le sens de notre démarche.

La deuxième est à dominante statistique et décrit la méthodologie employée.

L'exposé des tests, des résultats et leur interprétation font l'objet de la dernière partie.

* Elève à l'Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique.

** Ancien élève de l'école Polytechnique, membre du Corps de l'INSEE et élève de l'ENSAE.

*** Enseignant à l'université d'Orléans, Directeur de recherche à l'Institut Orléannais de Finance et Consultant auprès de Finance Consult SA

1. Ce travail a été effectué à Europerformance, en collaboration avec M. Alain Ernewein, Directeur Général. Nous remercions pour leurs commentaires et suggestions G. Gallais-Hammono, professeur à l'Université d'Orléans et directeur de l'Institut Orléannais de Finance, ainsi que Mme Pontier, MM. Lepingle et Schreiber, Professeurs de probabilités à l'Université d'Orléans. Les erreurs contenues dans ce texte sont toutefois de la seule responsabilité des auteurs.

INTRODUCTION

Cette dernière décennie a connu un essor spectaculaire des Sociétés d'Investissement à Capital Variable (Sicav), tant par leur nombre que par le montant des fonds gérés (862 fin 1989 pour un total d'actifs de 1271,6 Milliards de francs, contre 165 et un total d'actifs de 104,5 Milliards de francs fin 1982²). Ce succès auprès des trésoriers d'entreprise et d'un large public de particuliers est dû à l'attrait de ce type de Fonds Communs de Placements (FCP), aussi bien par leur performance comparée à celle de l'épargne classique ou individuelle, que par la diversité de leur politique de gestion (horizon de placement, marchés, secteurs de marché et vecteurs de placement, etc)³.

Mais leur nombre sans cesse croissant, cette diversité même de gestion des Sicav, rendent difficile justement à ceux qui en assurent le succès, le choix du produit le mieux adapté à leurs besoins : ce d'autant plus que les indicateurs de performance et risque auxquels le public a accès⁴ sont insuffisants pour leur permettre, d'une part d'apprécier le risque total, le risque spécifique⁵ de la Sicav ainsi que la rentabilité espérée et, d'autre part, de juger *ex post* des performances des fonds investis. (voir P. Poncet, Lettre d'information n° 39 de l'AFFI, mars 1990).

Les Sicav étant des portefeuilles, on pourrait penser que, pour pallier ces lacunes et donner aux investisseurs des moyens sûrs de comparaison et de choix, et aux gestionnaires des instruments d'analyse et de contrôle, il suffirait d'utiliser pour ce faire les théories du portefeuille développées depuis une trentaine d'années à partir des travaux de Markovitz (1952), Sharpe (1964) et Lintner (1965).

L'ennui est que, d'une part certaines Sicav sont par essence des portefeuilles non assez diversifiés (dans le sens des risques), ou « trop diversifiés » (on pense aux internationalement diversifiées). De ce fait, on trouve comme A. Wilkie (1990) qu'une seule droite de marché (SML) ou un plan moyenne-variance provenant d'un seul indice ne sont pas suffisants pour rendre compte des performances de ces portefeuilles et pour les comparer entre eux.

D'autre part, le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers (en anglais : Capital Asset Pricing Model (CAPM), ou l'Arbitrage Pricing Theory (APT)), comme le disent dans leurs articles Dybvig et Ross (1985), Roll et d'autres auteurs, ont été étudiées, testées, et ont fait l'objet de critiques d'ordre théorique, ou ont purement été rejetées sur des bases empiriques dans plus d'articles qu'il ne peut en être fait état ici.

2. Source : *Note Mensuelle Organismes de Placements Collectifs en Valeurs Mobilières* (OPCVM), Europerformance, janvier 1990.

3. Voir en annexe la liste des catégories de Sicav françaises, telle qu'elle est définie par Europerformance, et leurs contraintes de gestion ou placement (source : fiches signalétiques et Commission des Opérations de Bourse COB).

4. Une revue des indicateurs accessibles au public peut être trouvée dans un rapport de MM. T. Canel et B. Gautier à Europerformance.

5. La déclaration d'appartenance à une catégorie de SICAV rend obligatoire une certaine composition du portefeuille et par cela le rend non totalement diversifié.

Le problème auquel on se propose d'apporter des solutions est celui de définir une classification des Sicav françaises, et des critères ou indicateurs de performance et risque, en nous basant sur les derniers développements à notre connaissance de la théorie. Ceux-ci devraient être suffisamment pertinents pour que, en paraphrasant Roll (1978), ils soient « acceptables » aux acteurs et intervenants du marché, ainsi qu'aux observateurs désintéressés.

L'article est composé de trois parties :

Une première partie, assez théorique, dont il suffit de retenir pour suivre le reste de l'article :

- 1) la représentation spatiale dans le cas de deux indices,
- 2) que le produit scalaire dans l'espace des variances-covariances des risques est la covariance,
- 3) que l'ensemble des portefeuilles efficients du plan SMP, représentant les portefeuilles composés de l'actif sans risque et des actifs représentant les indices, est la droite de plus grande pente de ce plan,
- 4) la détermination de l'indicateur CG, donnant la part des risques dans le risque total, corrigé du risque résiduel de la Sicav,
- 5) la détermination de la mesure CGZ, donnant par unité de risque, la rentabilité supérieure ou inférieure au plan SMP.

Une deuxième partie à dominance statistique donne la méthodologie employée; enfin une troisième partie est consacrée aux tests et à l'interprétation des résultats.

I. DÉFINITION DES INDICATEURS

0. *Préambule*

Si l'on devait définir ces indicateurs dans un cadre mathématique strict, d'une part la totalité des pages allouées à cet article n'y suffirait pas, et d'autre part, au lieu de servir l'exposé, une telle démarche nuirait plutôt, à notre avis, à sa clarté.

De plus nous pensons que la démarche géométrique adoptée pour définir ces indicateurs est un moyen relativement simple pour expliquer des concepts assez compliqués ⁶.

Enfin disons que le cadre différentiel stochastique, dans lequel on se place, et que l'on ne va qu'esquisser ici, nous fournit de façon naturelle et support géométrique utilisé.

6. Le lecteur intéressé par ces indicateurs et qui ne serait pas tout à fait satisfait par une telle approche pourrait trouver dans G. Chamberlain et M. Rothschild (1983), Chamberlain (1983), D. Duffie et W. Zeme (1989), I. Karatzas et S. Shreve (1988), I. Karatzas (1989), et I. Karatzas et All (1989), les éléments manquants dans cet exposé.

1. Des considérations mathématiques

Situons-nous dans un marché financier modélisé par l'existence d'un actif sans risque P_o dont le prix à tout instant est donné par :

$$dP_o(t) = r_o(t) \quad \text{avec} \quad P_o(0) = 1$$

et d'un brownien n -dimensionnel $B = (B_k, 1 \leq k \leq n)$ sur un espace de probabilité (Ω, F, P) représentant toutes les sources de risque du marché, et tel que n est au moins égal au nombre d'actifs risqués disponibles sur le marché.

(H1) – Supposons qu'il existe k indices observables du marché ou segments du marché, dont les variables $((X_{i,t}), 1 \leq i \leq k)$ les représentant sont des processus de diffusion de *Ito* vérifiant l'équation différentielle stochastique :

$$dX_{i,t} = a_{i,t} dt + \sigma_{i,t} dW_{i,t} \quad (1.1)$$

où les $(W_{i,t})$ sont des browniens obtenus comme combinaison linéaire des B_k avec des coefficients normés non aléatoires ($X_i = \ln P_i$ si on utilise des prix P_i).

On note par $\rho_{i,j}(t) (\neq 1)$ le coefficient de corrélation entre $W_{i,t}$ et $W_{j,t}$ ⁷.

(H2) – Supposons que les Sicav françaises sont des portefeuilles de ce marché dont les valeurs liquidatives (P_t) sont des fonctions déterministes de classe C^2 des variables $((X_{i,t}), 1 \leq i \leq k)$ et d'une variable (Y_t) particulière à chaque Sicav, suivant un processus de diffusion de *Ito* et vérifiant :

$$dY_t = b_{i,t} dt + \sigma_{r,t} dW_{r,t}$$

où $(W_{r,t})$ est aussi un brownien obtenu de façon analogue aux $(W_{i,t})$ et $\rho_{i,r}(t) (\neq 1)$ pour tout i .

Remarquons qu'*a priori* (Y_t) n'est pas observable et peut contenir des informations quant au mode de gestion de la Sicav, ou des informations sur des variables n'intervenant pas dans les indices. On peut par ailleurs dire que l'idée sous-jacente à la mise en place de ces hypothèses est de

7. Le fait d'avoir supposé les (X_i) observables implique que l'on peut, en théorie et sous certaines conditions, estimer (a_i) et (σ_i) . (cf. KK. Aase et Guttorp (1987, 1)) ou D. Florens-Zmirou (1987, 14). En particulier sur $[0, T]$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2^N} (X_i(nt2^{-N}) - X_i((n-1)t2^{-N}))^2 = \int_0^t \sigma_{i,s}^2 ds \quad \text{pour tout } t,$$

$t \in [0, T]$, et évidemment si $\sigma_{i,s}$ est constante sur $[0, t]$, et égale à σ_i

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{2^N} (X_i(nt2^{-N}) - X_i((n-1)t2^{-N}))^2 = \sigma_i^2$$

pallier partiellement deux critiques : l'une adressée à l'APT : incapacité de déterminer en général, de façon pratique, tous les facteurs de risque; l'autre au CAPM : ambiguïté des évaluations des performances à travers certains indices de marché, voire l'incapacité de juger de ces performances dans le cas, par exemple de portefeuilles diversifiés sur plusieurs marchés internationaux (cf. A.D. Wilkie (1990, 2)).

Avec ces hypothèses, en utilisant le lemme de *Ito* multidimensionnel, les rentabilités de ces Sicav vérifient :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \alpha_t dt + \sum_{i=1}^k \sigma_{i,t} S_{i,t} dW_{i,t} + \sigma_{r,t} S_{r,t} dW_{r,t} \quad (1.2)$$

où encore : $d(\ln P_t) = e_t dt + \sum_{i=1}^k \sigma_{i,t} S_{i,t} dW_{i,t} + \sigma_{r,t} S_{r,t} dW_{r,t}$

où $S_i = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial X_i}$ et $S_r = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial Y}$ sont les sensibilités des valeurs liquidatives par rapport aux variables $(X_{i,t})$, ($1 \leq i \leq k$) et (Y_t) respectivement ⁸.

Pour faire le lien avec la droite de marché (ou Security Market Line) notée dans la suite SML, et expliquer la représentation géométrique annoncée, rappelons que l'espace L^2 , des variables aléatoires sur un certain espace probabilisé, de variance finie, est un espace de Hilbert quand on le munit de son produit scalaire naturel :

$$(X|Y) = E(XY) = \text{Cov}(X, Y) + E(X)E(Y), \quad X \in L^2, Y \in L^2 \quad (1.4)$$

de sa norme associée : $\|X\|_2^2 = E(X^2) = V(X) + E(X)^2$, et de l'égalité p.s. des variables (c'est-à-dire, $X \stackrel{\Delta}{=} Y$ si et seulement si : $\|X - Y\|_2 = 0$).

Considérons alors le modèle statique à une période, P_t étant connu à l'instant t , obtenu à partir des discrétisées de $(\ln P_t)$:

$$\ln \frac{P_{t+h}}{P_t} = \int_t^{t+h} e_s ds + \sum_{i=1}^k \int_t^{t+h} \sigma_{i,s} S_{i,s} dW_{i,s} + \int_t^{t+h} \sigma_{r,s} S_{r,s} dW_{r,s} \quad (1.5)$$

Soit, en supposant $h = 1$ et tous les paramètres constants sur $[t, t+1[$ égaux à leur valeur en t , en notant $R_{t,1}$ la rentabilité sur $[t, t+1[$, $R_{t,1} = \ln \frac{P_{t+1}}{P_t}$, et $\varepsilon_{r,t} = \sigma_{r,t} S_{r,t} (W_{r,t+1} - W_{r,t})$, puis en réarrangeant et en regroupant les termes, on obtient :

$$R_{t,1} = f_t \cdot 1 + \sum_{i=1}^k S_{i,t} (X_{i,t+1} - X_{i,t}) + \varepsilon_{r,t} \quad (1.6)$$

8. Les expressions de α_t et e_t , et le lien les unissant ne sont pas donnés ici car devenus des classiques. Dans Ph. Boursin, H. Burger, R. Pierre et N. Zamfirescu (1990), on peut trouver leurs expressions, ainsi que certaines méthodes vectorielles que l'on va utiliser ici.

et $\varepsilon_{r,t} = \sigma_{r,t} S_{r,t} (W_{r,t+1} - W_{r,t})$, puis en réarrangeant et en regroupant les termes, ont obtenu :

$$R_{t,1} = f_t \cdot 1 + \sum_{i=1}^k S_{i,t} (X_{i,t+1} - X_{i,t}) + \varepsilon_{r,t} \quad (1.6)$$

On reconnaît alors, du fait que le $k + 1$ -uplet $((X_i), Y)$ est gaussien, de par la définition des $(W_{i,t})$ et $(W_{r,t})$, le « Factor Structure » de S.A. Ross (1976), de R. Roll et S.A. Ross (1980), de G. Chamberlain et M. Rothschild (1983) à la différence près que les X_i et Y ne sont pas orthogonaux entre eux.

Remarquons de plus que si les paramètres $S_{i,t}, \sigma_{i,t}, S_{r,t}, \sigma_{r,t}$ etc ne sont pas constants sur $[0, T]$, la variance conditionnelle des $\varepsilon_{r,t}$ étant égale à $S_{r,t}^2 \sigma_{r,t}^2$, les sensibilités et *a priori* les primes de risque dépendront du temps. (Ce type de problème, mis en évidence par des tests statistiques et des considérations théoriques

et empiriques, a été traité dans bon nombre d'articles (méthodes ARCH, ARCH-M, GARCH, etc.), dont quelques uns sont donnés en référence à la fin de celui-ci).

Enfin, le fait que le $k + 1$ -uplet $((X_i), Y)$ soit gaussien et que les coefficients soient supposés non aléatoires entraîne que $R_{t,1}$ est une variable gaussienne.

$$\text{Notons } \Delta_1 W_{i,t} = W_{i,t+1} - W_{i,t}, \quad \Delta_1 W_{r,t} = W_{r,t+1} - W_{r,t}.$$

Alors, $E(\Delta_1 W_{i,t}) = E(\Delta_1 W_{r,t}) = 0$ et $\text{Var}(\Delta_1 W_{i,t}) = \text{Var}(\Delta_1 W_{r,t}) = 1$, et si on réarrange (1.6) dans sa forme initiale (1.5) (avec les mêmes hypothèses de constance des paramètres sur $[t; t + 1]$), on a :

$$R_{t,1} = e_t \cdot 1 + \sum_{i=1}^k \sigma_{i,t} S_{i,t} \Delta_1 W_{i,t} + \sigma_{r,t} S_{r,t} \Delta_1 W_{r,t} \quad (1.6')$$

La normalité de la variable aléatoire $R_{t,1}$ et (1.6'), montrent qu'elle peut être décomposée dans L^2 , sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(\Delta W_{i,t})$ et $\Delta W_{r,t}$, muni du produit scalaire induit (la covariance), et le sous-espace orthogonal de dimension 1, engendré par l'actif sans risque. De ce fait, on peut la représenter sans perte d'information dans l'espace de dimension $k + 2$ espérance/sous-espace de corrélation.

Enfin, pour finir cette longue partie théorique, rappelons que dans un espace de Hilbert, si (e_i) est une base dénombrable d'un sous-espace, on peut construire par le procédé de Hilbert-Schmidt, une base orthonormale, en se fixant l'ordre des vecteurs (e_i) . Dans notre optique, cet ordonnancement, sera motivé par l'idée que l'on aura de la provenance du risque principal, secondaire, etc.

2. Représentation géométrique et définition des indicateurs

2.1 Lien avec le SML

Supposons que P_t soit uniquement fonction de $(X_{1,t})$ et (Y_t) et plaçons-nous en t . Alors, avec les mêmes hypothèses de constance des paramètres sur $[t, t + 1[$ on a :

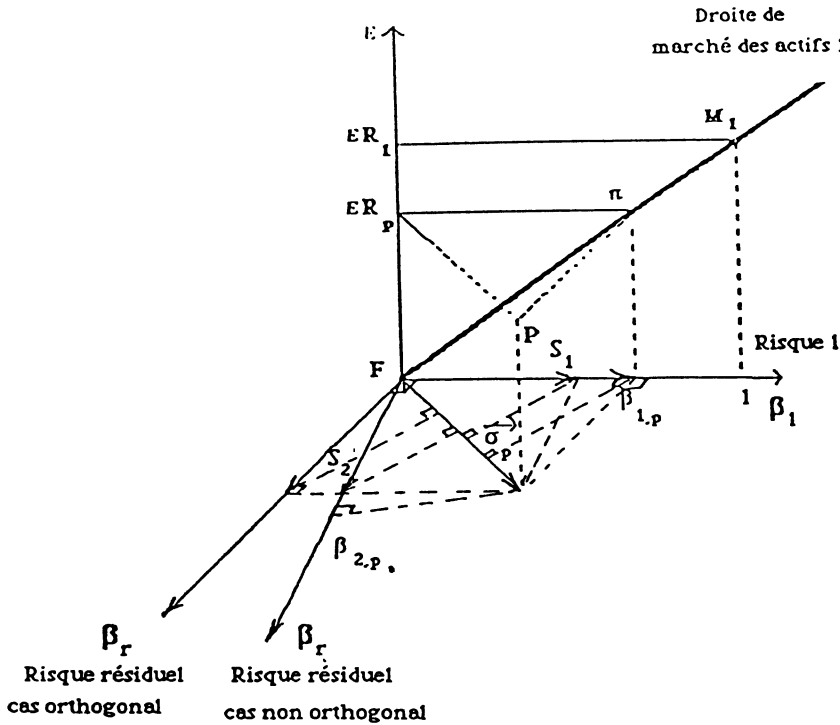
$$R_{t,1} = f_t \cdot 1 + S_{1,t} \Delta_1 X_{1,t} + \varepsilon_{r,t} \tag{2.1}$$

Les projections de $R_{t,1}$ sur $\Delta_1 W_{1,t}$ et $\Delta_1 W_{r,t}$ sont alors :

$$(R_{t,1} | \Delta_1 W_{1,t}) \Delta_1 W_{1,t} = \text{Cov}(R_{t,1}, \Delta_1 W_{1,t}) \Delta_1 W_{1,t} \quad \text{comme } E(\Delta_1 W_{1,t}) = 0.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_{t,1}, \Delta_1 W_{1,t}) &= \frac{\text{Cov}(R_{t,1}; \Delta_1 X_{1,t})}{\sigma_{1,t}^2} \sigma_{1,t} \\ &= \beta_{p,1}(t) \cdot \sigma_{1,t} \\ &= S_{1,t} \sigma_{1,t} + \rho_{1,r}(t) S_{r,t} \sigma_{r,t} \end{aligned}$$



De même, la projection sur $\Delta_1 W_{r,t}$ est :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_{t,1}, \Delta_1 W_{r,t}) &= \frac{\text{Cov}(R_{t,1}, \Delta_1 Y_t)}{\sigma_{r,t}^2} \sigma_{r,t} = \beta_{p,y}(t) \cdot \sigma_{r,t} \\ &= S_{r,t} \sigma_{r,t} + \rho_{1,r}(t) S_{1,t} \sigma_{1,t} \end{aligned}$$

On a donc les identités remarquables suivantes :

$$\begin{cases} \beta_{p,1}(t) = S_{1,t} + \rho_{1,r}(t)S_{r,t}\frac{\sigma_{r,t}}{\sigma_{1,t}} & (\sigma_{1,t} \neq 0) \\ \beta_{p,Y}(t) = S_{1,t} + \rho_{1,r}(t)S_{r,t}\frac{\sigma_{1,t}}{\sigma_{r,t}} & (\sigma_{r,t} \neq 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1 Remarques

1) On voit que, seulement dans le cas où les deux risques sont orthogonaux ($\rho_{1,r} = 0$) le bêta d'un portefeuille par rapport au marché (représenté ici par $(X_{1,t})$) est la sensibilité du cours par rapport à ce marché.

Ainsi dans le cas où le risque résiduel n'est pas orthogonal au risque de « l'indice », par simple MCO (Moindre Carrés Ordinaire), on n'obtient pas exactement la sensibilité du portefeuille par rapport au marché.

2) L'espérance et variance de $R_{t,1}$ sont données, en prenant les espérances conditionnelles par rapport à toute l'information connue en t , par :

$$E(R_{t,1}|\mathcal{F}_t) = f_t \text{ et } V(R_{t,1}) = S_{1,t}^2\sigma_{1,t}^2 + 2\rho_{1,Y}(t)\sigma_{1,t}\sigma_{r,t}S_{1,t}S_{r,t} + S_{r,t}^2\sigma_{r,t}^2$$

avec l'hypothèse de constance des paramètres sur $[t, t + 1]$.

3) Enfin, en écrivant l'expression de f_t , on voit que, même si $b_{r,t} = 0$ pour tout t , et $\sigma_{r,t}$ constante, c'est-à-dire que (Y_t) est d'espérance nulle et, à une constante près, un brownien « pur », cela ne veut pas dire que la variable Y n'influence pas l'espérance de rendement du portefeuille! Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que la sensibilité du portefeuille par rapport à cette variable soit nulle et de ce fait ε_r l'est aussi.

Dans ce cas, on a :

(i) $R_{t,1} = f_{1,t} + S_{1,t}\Delta_1 X_{1,t}$ (ce qui, comme on va le voir, revient à dire que P est uniquement constitué de l'actif sans risque et de « l'indice » de marché)

(ii) $V_t(R_{t,1}) = S_{1,t}^2\sigma_{1,t}^2$ et $\beta_{p,1}(t) = S_{1,t}$.

On peut alors utiliser (ii) dans ce cadre pour expliquer les mesures de Jensen et Fama ainsi que l'utilisation de l'indice de Treynor. Disons seulement que si le marché était uniquement constitué de X_1 et Y , et si Y n'est pas un actif négociable, on est alors en présence d'un marché incomplet. Ceci est typiquement le cas où il n'est pas possible de construire un portefeuille constitué de l'actif sans risque et de X_1 qui est complètement immunisé (voir Karatzas (1989)); la Pareto optimalité est niée (cf. D. Duffie et W. Zame (1989)) et le CAPM ne peut être utilisé tel que (voir G. Geanakoplos et M. Shubik (1990)). Tout ceci pour dire que l'on ne peut pas, d'un revers de main, ignorer, dans ce contexte, le risque résiduel et supposer que seul le risque X_1 est rémunéré.

Enfin, pour être complets, montrons que les points de la droite FM_1 dans le plan espérance-(risque 1) sont les représentations des portefeuilles P

constitués uniquement de l'actif sans risque et X_1 ; c'est-à-dire $P = \lambda P_o + (1 - \lambda)X_1$ avec les interprétations usuelles de λ ($0 \leq \lambda \leq 1$, part de P_o et part de X_1 , $\lambda < 0$ endettement au taux sans risque, et $\lambda > 1$ vente à découvert sur l'actif X_1).

F représente sur la droite espérance, le taux sans risque $r_o(t) (= E \left(\frac{dP_o}{P_o} \right))$, M_1 est la projection de X_1 sur le plan engendré par l'actif sans risque et le risque $\Delta_1 W_{1,t}$.

En effet de $P = \lambda P_o + (1 - \lambda)X_1$, on déduit : $\frac{\Delta_1 P_t}{P_t} = \lambda \frac{P_{o,t}}{P_t} \frac{\Delta_1 P_{o,t}}{P_{o,t}} + (1 - \lambda) \frac{X_{1,t}}{P_t} \frac{\Delta_1 X_{1,t}}{X_{1,t}}$ où P_t , $P_{o,t}$ et $X_{1,t}$ sont connus à l'instant t et tous les paramètres sont supposés constants sur $[t, t + 1[$. (On remarque bien sûr que $\lambda \frac{P_{o,t}}{P_t} + (1 - \lambda) \frac{X_{1,t}}{P_t} = 1$ et que $\frac{P_{o,t}}{P_t}$ et $\frac{X_{1,t}}{P_t}$ sont d'interprétation évidente).

On a alors :

$$E \left(\frac{\Delta_1 P_t}{P_t} | \mathcal{F}_t \right) = \lambda \frac{P_{o,t}}{P_t} E \left(\frac{\Delta_1 P_{o,t}}{P_{o,t}} | \mathcal{F}_t \right) + (1 - \lambda) \frac{X_{1,t}}{P_t} E \left(\frac{\Delta_1 X_{1,t}}{X_{1,t}} | \mathcal{F}_t \right)$$

en remplaçant $\lambda P_{o,t} = P_t - (1 - \lambda)X_{1,t}$, on a :

$$E \left(\frac{\Delta_1 P_t}{P_t} \right) - r_{o,t} = (1 - \lambda) \frac{X_{1,t}}{P_t} (E \left(\frac{\Delta_1 X_{1,t}}{X_{1,t}} | \mathcal{F}_t \right) - r_{o,t}), \tag{2.4}$$

puis si on calcule $\beta_{p,X_1} = \frac{\text{Cov} \left(\frac{\Delta_1 P_t}{P_t} \right)}{\sigma_{1,t}^2} = (1 - \lambda) \frac{X_{1,t}}{P_t}$.

On voit que (2.4) est l'équation du CAPM : $E \left(\frac{\Delta_1 P_t}{P_t} \right) - r_{o,t} = \beta_{p,X_1} (E \left(\frac{\Delta_1 X_{1,t}}{X_{1,t}} | \mathcal{F}_t \right) - r_{o,t})$ et que, dans le repère $(F, \Delta_1, X_{1,t}, \Delta_1 Y_{1,t})$, ceci est exactement la traduction du fait que le portefeuille P est sur la droite FM_1 .

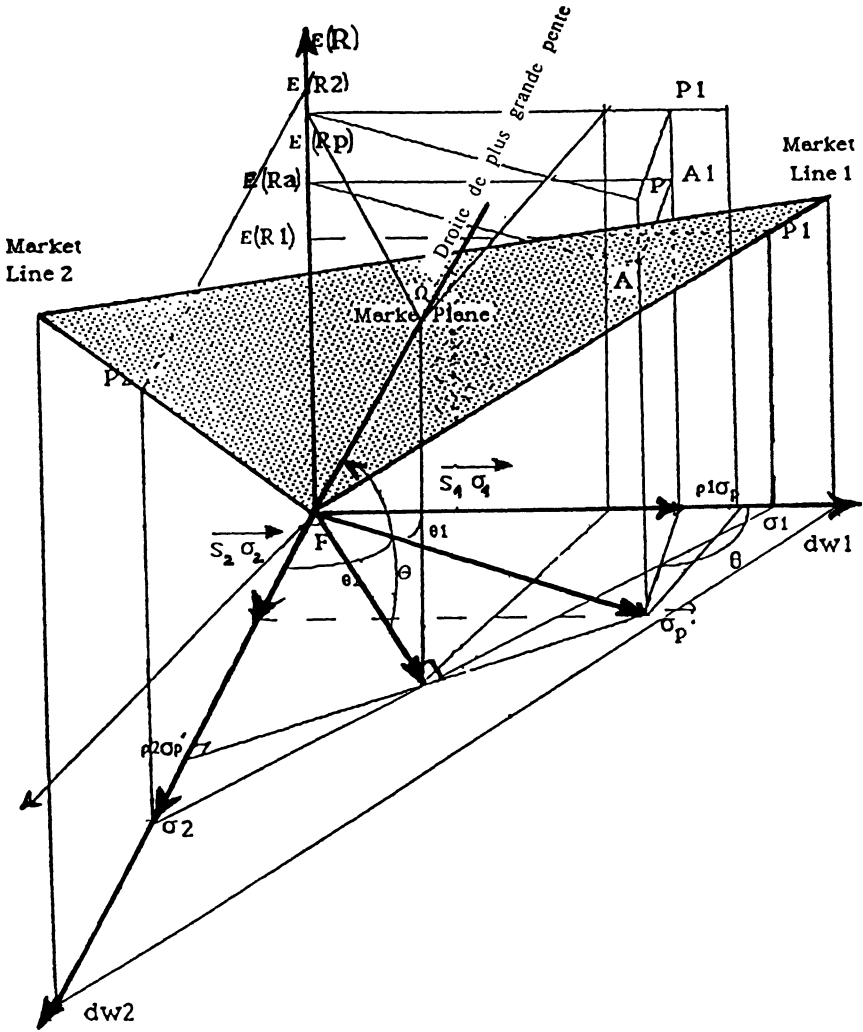
2.2 Cas du SMP (Security Market Plane)

Supposons que (P_t) est uniquement fonction de $(X_{1,t}, X_{2,t})$ et (Y_t) , alors :

$$R_{t,1} = f_t \cdot 1 + S_{1,t} \Delta_1 X_{1,t} + S_{2,t} \Delta_1 X_{2,t} + \varepsilon_{r,t}. \tag{2.5}$$

Les mêmes calculs que ceux faits ci-dessus montrent que :

1) Les points du plan FP_1P_2 représentent les portefeuilles constitués de l'actif sans risque, de X_1 et X_2 .



2) Les bétas sont :

$$\begin{cases}
 \beta_{p,X_1}(t) = S_{1,t} + \rho_{1,2}(t)S_{2,t} \frac{\sigma_{2,t}}{\sigma_{1,t}} + \rho_{1,r}(t)S_{r,t} \frac{\sigma_{r,t}}{\sigma_{1,t}} \\
 \beta_{p,X_2}(t) = S_{2,t} + \rho_{1,2}(t)S_{1,t} \frac{\sigma_{1,t}}{\sigma_{2,t}} + \rho_{2,r}(t)S_{r,t} \frac{\sigma_{r,t}}{\sigma_{2,t}} \\
 \left(\beta_{p,Y_1}(t) = S_{r,t} + \rho_{1,r}S_{1,t} \frac{\sigma_{1,t}}{\sigma_{r,t}} + \rho_{2,r}(t)S_{2,t} \frac{\sigma_{2,t}}{\sigma_{r,t}} \right)
 \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas où $K > 2$ ces formules se généralisent facilement.

La mise entre parenthèse du troisième bêta a une signification : on pense que la prise en compte de plusieurs indices réduirait l'erreur d'appréciation

(représentée ici par Y), jusqu'à pouvoir « ignorer » la présence de celle-ci. Sinon, cela reviendrait à dire que le marché représenté par tous les indices possibles est incomplet, et la remarque 2.1.3 s'appliquerait alors. Enfin, Y n'étant pas observable, l'estimation de ses paramètres n'est plus possible. On a pensé alors à effectuer une projection sur l'espace engendré uniquement par les risques provenant de X_1 et X_2 et de l'actif sans risque. Le problème qui se pose dans ce cas est que la variance (ou risque) du projeté n'est plus *a priori* celle du portefeuille initial.

La question quantitative qu'on se pose alors est : si on prend uniquement X_1 et X_2 comme variables explicatives, le risque du projeté est-il grandement différent de celui du portefeuille initial ? Ce problème peut être rapproché en fait de celui que l'on peut trouver dans Fama (1990).

Pour pouvoir résoudre ces problèmes, un indicateur (CG) provenance de risque donnant la proportion de chaque risque dans le risque total du portefeuille a été défini. De plus, cet indicateur paraît intéressant en tant que tel : en effet, sachant que certains secteurs du marché sont, à certaines époques, plus risqués que d'autres, cela pourrait aider les investisseurs dans le choix de la Sicav la plus appropriée ; d'autre part, comme on l'a testé, cela permet de classer par risque globalement, puis par sous-catégories, les Sicav entre elles.

Une remarque importante doit être faite ici : dans le cas d'existence d'un actif sans risque, si le portefeuille X_1 est efficient, alors la frontière efficiente est la SML1. Dans le cas du Market Plane, l'un au moins des portefeuilles (ou les deux) est nécessairement non efficient dans le sens suivant : Si on définit comme portefeuille efficient le portefeuille qui, pour une espérance de rentabilité donnée, réalise la variance minimale, on voit qu'alors, l'ensemble des portefeuilles efficients du plan (formés de l'actif sans risque, de X_1 et de X_2) est la droite de plus grande pente du plan (*cf.* figure).

Or $\rho_{1,2} \neq 0$, et donc X_1 et X_2 ne peuvent être ensembles sur la droite de plus grande pente.

En conclusion, deux mesures de performance peuvent être définies :

1) Une mesure (CGZ) généralisant celle du Treynor au cas bi-dimensionnel : il s'agit de mesurer par rapport à un portefeuille du plan de même risque σ'_p , la sur-rentabilité ou sous-rentabilité par unité de risque.

2) Une mesure qui reprend la mesure de Sharpe, mais la compare à l'angle de la droite de plus grande pente du plan, et non plus à l'angle de la SML. (Evidemment si P est dans le plan lui-même et s'il n'est pas efficient, son angle sera moindre). Ceci pourrait constituer un test, pour un portefeuille du plan de son efficience. Remarquons que dans le cas X_1, X_2, \dots, X_k l'ensemble des portefeuilles formés de $P_0, X_1, X_2, \dots, X_k$ est un hyperplan (si on choisit $(F, 0, 0, \dots, 0)$ comme origine), et l'ensemble des portefeuilles efficients sera un sous-espace vectoriel de dimension $k - 1$. D'autre part, un portefeuille efficient formé de P_0, X_1, X_2, X_3 n'est pas forcément efficient dans P_0, X_1, X_2 . Cela implique que l'on peut avoir un portefeuille efficient pour deux indices

mais non efficient par rapport à chacun des indices. Mais dans tous les cas, sa projection sera toutefois au-dessus de la SML de chaque indice (propriété de la droite de plus grande pente). Remarquons aussi que des portefeuilles non efficientes du plan SMP peuvent avoir aussi une projection au-dessus des SML.

2.4 Analogie : cas continu

Bien que $dW_{i,t}$ et $dW_{R,t}$ ne soient pas des variables aléatoires, et donc en toute rigueur, on ne peut utiliser ce qui a été fait précédemment, l'extension suivante rend possible l'analogie instantané et la même interprétation géométrique. Revenons à la formule (1.5) :

$$\Delta_h \ln P_t = \ln \left(\frac{P_{t+h}}{P_t} \right) = \int_t^{t+h} e_s ds + \sum_{i=1}^k \int_t^{t+h} \sigma_{i,s} S_{i,s} dW_{i,s} + \int_t^{t+h} \sigma_{R,s} S_{R,s} dW_{Y,s}$$

Comme $\int_t^{t+h} \sigma_{i,s} S_{i,s} dW_{i,s}$ et $\int_t^{t+h} \sigma_{R,s} S_{R,s} dW_{Y,s}$ sont des différences de martingales, on définit : (en utilisant les processus croissants associés)

$$E(dW_{i,t}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(\Delta_h W_{i,t}) = 0,$$

$$V(dW_{i,t}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E((\Delta_h W_{i,t})^2) = 1$$

$$E(d \ln P_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(\Delta_h \ln P_t | F_t)$$

$$V(d \ln P_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E((\Delta_h \ln P_t)^2 | F_t)$$

Remarque : En fait en considérant un intervalle $[0, T]$ et L_T^2 l'espace des processus X , adaptés à l'augmentation sous P de la filtration engendrée par B tels que : $E\left(\int_0^T X^2(s, w) ds\right) < \infty$, on peut pour tout processus de diffusion de Ito de cet espace considérer :

$$E(dX_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(\Delta_h X_t | F_t) \text{ et } V(dX_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E((\Delta_h X_t)^2 | F_t)$$

Dans ce cas on a que l'interprétation géométrique reste vraie et :

$E(d \ln P_t) = e_t$; $\text{Cov}(dW_{i,t}, dW_{j,t}) = \rho_{i,j}(t)$; $V(d \ln P_t) =$ forme quadratique associée à la matrice variance covariances.

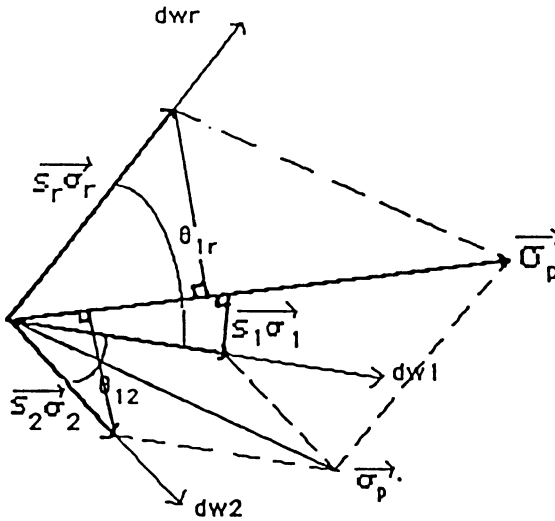
3. DÉFINITION MATHÉMATIQUE DES INDICATEURS

3.1 *L'indice CG* : c'est la projection orthogonale du risque pris par le portefeuille sur l'indice de référence i , sur le risque du portefeuille P , normalisée par ce risque du portefeuille.

$$CG_i = \frac{S_i \sigma_i \rho_i}{\sigma_p}$$

avec : $\rho_i = \text{corr}(R_i, R_p)$
 = angle entre σ_i et σ_p
 σ_i = Ecart-type (R_i)
 σ_p = Ecart-type (R_p)

S_i : sensibilité du portefeuille à l'indice i
 (Sur le dessin, dW_r représente le risque résiduel).



3.2 La sensibilité S_i : ⁹ elle est définie par : $S_i = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial X_i}$

où : P est la valeur du portefeuille, X_i caractérisant l'indice de référence.

3.3. Le PRD : $\text{PRD} = \frac{(R_p - S_1 * R_1)}{S_1 * \sigma_1}$

Il s'agit d'une *prime de risque* par rapport à un seul indice de référence quand on considère la *droite* appelée Security Market Line. Cette notion de droite de marché est à rapprocher de ce qui est formulé dans la théorie du CAPM. L'indicateur PRD est égal à la différence de rentabilité entre le portefeuille et celle escomptée rémunérant le risque pris par le portefeuille sur ce marché, normalisée par le risque relatif au marché de référence.

9. (Un développement théorique et statistique sur l'estimation des sensibilités peut être trouvé dans Canel, Gauthier et Zamfirescu (1991))

3.4 Le CGZ

Cet indicateur, dans le cas de deux indices, est lié à la prime de risque par rapport à un plan (appelé Security Market Plane), et il est calculé par une méthode analogue à celle du PRD, en tenant compte d'un marché bi-indiciel.

$$CGZ = \frac{(R_p - R_a)}{\sigma'_p} = \frac{R_p - R_2 * \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} * \frac{\sigma'_p}{\sigma_2} + R_1 * \rho * \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} * \frac{\sigma'_p}{\sigma_1} - R_1 * \rho_1 * \frac{\sigma'_p}{\sigma_1}}{\sigma'_p}$$

$$\sigma'_p = \sqrt{(S_1\sigma_1)^2 + (S_2\sigma_2)^2 + 2 * S_1S_2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

R_i $i = 1$ ou 2 rentabilité respective des actifs 1 et 2

R_p rentabilité de la Sicav sur la période considérée

R_a rentabilité du portefeuille de même risque et situé sur le market plane

S_i $i = 1$ ou 2 sensibilité de la Sicav par rapport aux actifs 1 et 2

σ_i $i = 1$ ou 2 volatilité des valeurs des actifs 1 et 2

σ'_p volatilité du portefeuille déduit de la Sicav en éliminant le risque résiduel

σ_p volatilité de la Sicav ou risque total

ρ_i $i = 1$ ou 2 corrélation entre le portefeuille et l'indice de référence i

ρ corrélation entre les deux sources de risque prises en compte

II. DESCRIPTION STATISTIQUE ¹⁰

DU MODÈLE ET INTERPRÉTATION DES INDICATEURS

1. Une stabilité temporelle de différents indicateurs

Ces remarques font référence à l'étude qui fera l'objet la dernière partie.

1.1 Les indices de référence

La stabilité dans le temps des différents indicateurs de marché a été supposée dans notre modèle lors de l'estimation de la sensibilité : on a ainsi ignoré les phénomènes dûs à l'hétéroscédasticité quand il a été supposé

10. Toutes les égalités et inégalités sont au sens statistique du terme (on écrira \triangleq , \triangleq , \triangleq)

ex post que la corrélation entre les deux indicateurs de marché ainsi que les risques associés, et les sensibilités des portefeuilles par rapport aux indices de référence sur une période donnée, étaient constants.

Une telle hypothèse de travail se vérifie en général si l'on ne tient pas compte de l'année 1987, où le krach a eu une forte influence sur la volatilité du CAC240. Si l'on désire aller plus loin dans les calculs, une programmation du type ARCH pourrait se révéler alors nécessaire : le problème est alors de savoir si les résultats obtenus méritent une telle étude. De tests sur les estimations faites ont montrés que si l'hypothèse d'autocorrélation des processus était acceptée et intégrée dans les calculs, les résultats étaient alors significatifs à 95% ; c'est pourquoi les problèmes d'hétéroscédasticité seront laissés de côté par la suite.

Les indicateurs

Les indicateurs CG provenance de risque ainsi que les sensibilités connaissent en général de faibles fluctuations, car ces paramètres sont directement liés à la composition du portefeuille et au marché de référence sur lequel ils doivent se situer en principe.

2. Calcul des rentabilités

Les rentabilités sont de type logarithmique, et sont calculés sur des périodes différentes selon la nature de la Sicav : trois mois pour les produits actions et obligations, et une semaine pour les produits court-terme. Les données (valeurs liquidatives et indices de référence) retenues sont celles de chaque vendredi depuis la fin de l'année 1986 (historique sur 169 données).

La volatilité d'un actif sera considérée comme étant une mesure du risque, et elle est calculée sur la série de rendements.

3. Guide de lecture des indicateurs

3.1 L'indice CG

D'une manière générale, l'indicateur CG nous fournit un pourcentage relatif d'influence-risque provenant d'un taux de référence donné : c'est, en quelque sorte, une sensibilité au risque comme on l'a dit en 1.1. Du fait même de son expression mathématique, cet indice n'est pas *a priori* borné par 1¹¹. Au sein de la formulation de l'indice CG, la corrélation et la sensibilité sont en fait les seuls paramètres qui peuvent être négatifs, et donc ce seront eux qui permettront d'analyser cet indice de référence en termes de provenance du risque. Cet indicateur CG vérifie une propriété d'additivité, lorsque l'on rajoute un nouveau type de produit au marché de référence. La somme totale

11. Il est aussi possible de penser que l'on puisse obtenir un CG négatif avec une sensibilité négative par rapport à un indice donné sur une certaine période.

des CG par rapport à tous les types de risques présents dans le portefeuille est égale à 1.

Interprétons maintenant les divers cas possibles que nous pouvons rencontrer sur cet indice CG

1) Un indice CG *négatif* par rapport à un actif A peut signifier que le gérant a inclus dans son portefeuille des actifs conditionnels (par exemple des options de produit A). En effet, les taux usuels du marché financier, court et long terme, sont en général fortement dépendants et corrélés comme l'a montré une ACP (Analyse en Composantes Principales).

On peut de ce fait déduire qu'un indice CG négatif par rapport à un indice financier ne peut s'expliquer vraisemblablement que par une sensibilité négative, qui traduit que le portefeuille a eu sur la période considérée une attitude opposée à celle du marché étudié.

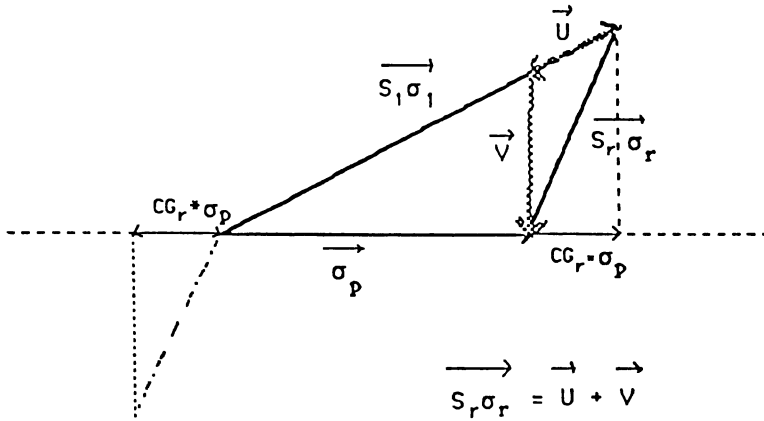
D'après l'ACP évoquée ci-dessus, il est possible de montrer qu'un spread (par définition, la différence entre un taux long et un taux court) est indépendant du taux court (TMP) sur des durées suffisamment longues. Ce spread aurait pu être utilisé comme deuxième variable pour définir un plan des risques dans le cas particulier des Sicav Court Terme Monétaires, où la marge peut être considérée comme un facteur de gestion des gérants.

Cependant, nous n'utiliserons dans la suite de notre étude que des indices suffisamment significatifs et reconnus par les gérants de portefeuilles eux-mêmes pour calculer nos indices de performance. C'est pourquoi nous pouvons nous attendre à n'avoir en pratique que des CG positifs.

2) Considérons maintenant un cas particulier resté jusqu'à présent en suspens, celui où $CG \hat{>} 1$: quelle interprétation donner alors à un pourcentage, bien sûr relatif, qui serait supérieur à 100% ?

Plaçons-nous dans le cas où nous ne considérons qu'un seul indice de référence : le risque de portefeuille est alors la somme vectorielle d'un vecteur risque référence et d'un vecteur risque résiduel.

Algébriquement, CG_r (r : résiduel) compense alors le fait que CG_1 (1 : taux ou indice de référence considéré) soit supérieur à 1, la somme des CG pour toutes les sources de risque valant 1. Cela signifie que le risque étalon 1 est sur-représenté au sein du portefeuille. Cela peut s'interpréter vectoriellement en remarquant que le vecteur-risque résiduel est en fait la somme d'un vecteur U anticolinéaire au vecteur-risque étalon (par exemple un Put sur l'actif 1), et dont le CG est justement celui qui compense le fait que CG_1 soit supérieur à 1, et d'un vecteur risque V orthogonal au risque propre du portefeuille (CG nul). Le vecteur risque principal est alors corrigé par ce vecteur U dans la nouvelle décomposition risque du portefeuille, ce qui donne un CG_1' égal à 1. Dans la présentation et la sortie de nos résultats par la suite, nous donnerons un CG égal à 1 dès que celui-ci dépasse 1.



3.2 Le PRD

C'est un indicateur de performance des Sicav relatif à un indice type (ie : positif ou négatif selon la performance du gérant).

Appelons R_p le rendement de la Sicav et R_a le rendement moyen prévu sur le marché de référence, les deux rendements étant relativisés par leurs risques.

Si $R_p \overset{\Delta}{\approx} R_a$, alors il s'agit d'un produit purement indiciel.

Si $R_p \overset{\Delta}{>} R_a$, alors la Sicav a obtenu un meilleur rendement que le marché de l'indice de référence (dû peut être à des investissements sur d'autres marchés ou segments de marchés non parfaitement corrélés à celui-ci).

Si $R_p \overset{\Delta}{<} R_a$, alors il y a sous-performance sur la période considérée, sans doute due à la rémunération du risque résiduel.

3.3 L'indicateur CGZ

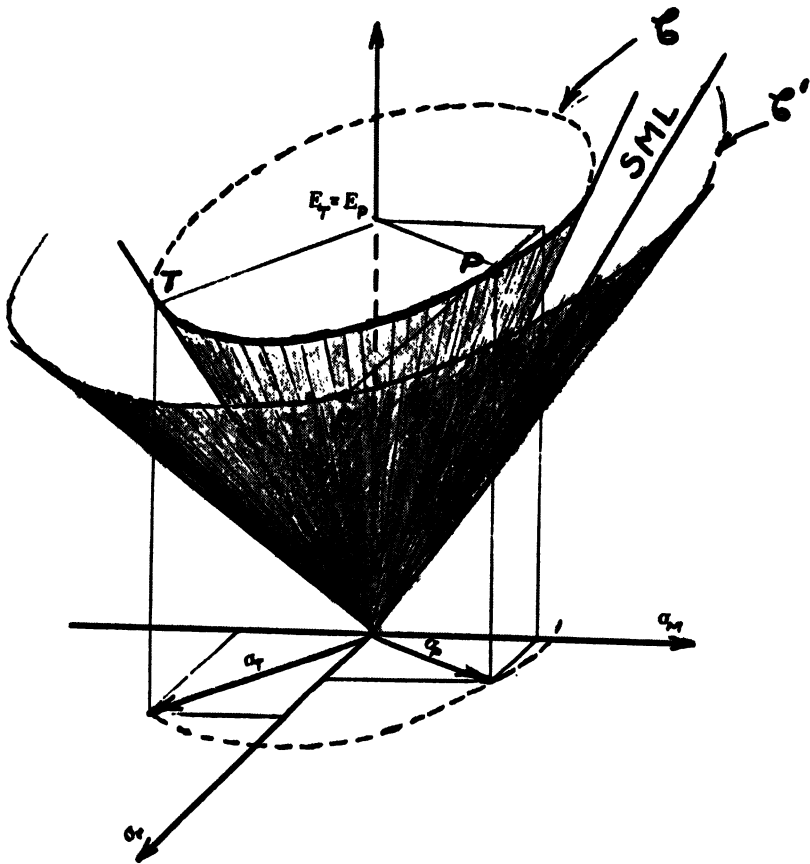
Pour rendre claire l'interprétation de cette mesure, supposons que les deux indices ont des risques orthogonaux. Alors, comme A (cf. figure du SMP) est le point du plan SMP de même risque σ'_p que le portefeuille, on a : $E(R_a) = \beta_{1,p}E(R_1) + \beta_{2,p}E(R_2)$ dans le repère $(F, 0, 0)$. Donc :

$$E(R_a) - R_f = \beta_{1,p}(E(R_1) - R_f) + \beta_{2,p}(E(R_2) - R_f)$$

ce qui est l'expression du « CAPM » en dimension 2. Le $\delta = E(R_p) - E(R_a)$ a la même interprétation pour $\delta \overset{\Delta}{=} 0, \delta \overset{\Delta}{>} 0, \delta \overset{\Delta}{<} 0$ que dans le cas PRD.

Dans le cas à deux risque indiciels, on voit que l'indicateur de Sharpe donne l'angle de FP par rapport au plan des risques, mais non la direction du risque. Ainsi des portefeuilles de même valeur du Sharpe peuvent avoir des vecteurs de risque de directions différents (cf. dessin ci-contre), qui peuvent même être anticorrélés à la limite.

L'indicateur de Treynor, quand à lui, prend en compte spécifiquement une seule provenance de risque : tous les portefeuilles de même rentabilité, et de même projection sur l'axe de ce risque, ont un Treynor identique. De façon intuitive, le CGZ est *presque* un Sharpe combiné avec un Treynor, car il combine les deux types d'information de ces indices, et élimine leurs carences dans ce contexte.

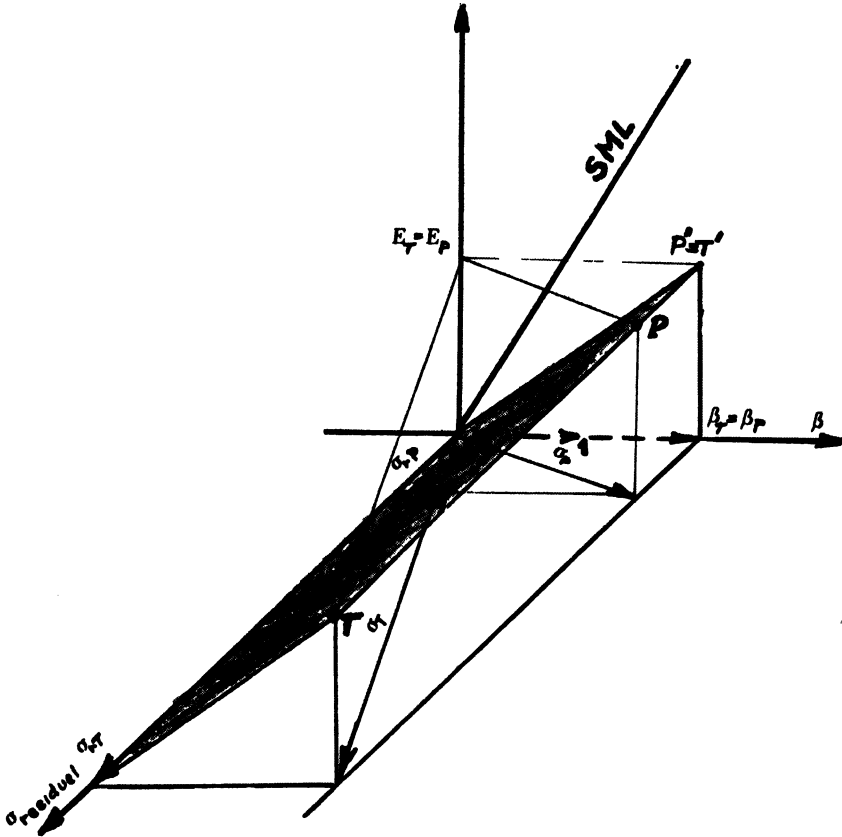


Notes sur l'indice de Scharpe :

1) Dans la représentation spatiale classique : espérance/risques ci-dessus, il est facile de voir que tous les portefeuilles ayant un même indice de Scharpe se situent sur la surface d'un même cône C . De ce fait, si l'indice de Scharpe de ces portefeuilles est supérieur à celui du « marché », leurs projections sur

le plan espérance/variance du « marché », contenant la SML, se situent *au dessus* de celle-ci (propriété qui « démontre » géométriquement le Théorème 1 de Dybvig et Ross (1985)). De la même façon géométrique on voit que la réciproque de ce théorème est fautive. Il suffit pour ceci de prendre un cône C' correspondant à un indice de Scharpe inférieur à celui du « marché » et de prendre un portefeuille sur C' (par ex. P_1) dont la projection est au-dessus de la SML.

2) Dans la même représentation, on peut voir que l'indice de Scharpe ne prend pas en compte la « direction » du risque du portefeuille. Ainsi deux portefeuilles ayant des volatilités et rentabilités espérées identiques (donc même indice de Scharpe) peuvent être : l'un corrélé positivement avec le « marché » et l'autre anticorrélé avec ce même « marché » ! Il est donc essentiel, si on utilise l'indice de Scharpe pour comparer des portefeuilles entre eux, que ceux-ci soient *de la même catégorie* pour que cette comparaison ait une signification.



Notes sur l'indice de Treynor :

1) Dans la même représentation spatiale il est tout aussi facile de voir que tous les portefeuilles qui ont un même indice de Treynor se situent sur la surface (ici noircie) d'un même prisme.

2) De même on remarque que l'indice de Treynor *ne rend pas compte* de la dimension du risque résiduel et de ce fait du *risque global* du portefeuille. Par exemple *P* et *T* sont deux portefeuilles de rentabilités espérées identiques et mêmes bêtas, projections orthogonales sur l'axe du risque de « marché », (donc de même indice de Treynor), qui possèdent des volatilités grandement différentes. Ceci implique qu'une mauvaise spécification du facteur commun expliquant le risque des portefeuilles peut amener à des comparaisons des performances, à travers l'indice de Treynor, plus que hasardeuses.

Dans le cas, où le vecteur risque résiduel n'est pas négligeable (mauvaise représentation du risque du portefeuille sur le marché type de référence), l'indice de performance est alors peu significatif d'une performance réelle globale de la Sicav : tout le problème est donc de définir des marchés suffisamment significatifs en terme de risque pour pouvoir comparer les Sicav entre elles; l'indice CG permet alors de repérer ces cas extrêmes : c'est un indice qui permet de vérifier la bonne foi du gérant quant à l'appartenance de la Sicav au sein d'une catégorie ou famille de référence, et aux objectifs de gestions affichés.

III. ANALYSE DES RÉSULTATS :

UNE MÉTHODOLOGIE OUVRANT DE NOUVELLES PERSPECTIVES DE CLASSIFICATION ET DE MESURE DE PERFORMANCE

1. Une classification des Sicav

Cette nouvelle méthodologie vise également à obtenir une meilleure classification des Sicav. Ainsi nous avons comparé la catégorie des Sicav Actions Françaises de la COB ¹², aux classements obtenus pour ces Sicav en tenant compte d'une part de la nature Actions Françaises et d'autre part des spécificités, qui sont définies par les politiques de gestion.

Ce second classement permet de distinguer les Sicav purement actions françaises des Sicav Actions Françaises « Immobilières » ¹³.

Pour réaliser cette étude, nous avons utilisé deux indices de marché : le CAC240 considéré comme spécifique des actions françaises, et l'indice AGEFI IMMO ¹⁴ représentatif des produits liés au secteur immobilier. L'échantillon

12. Commission des Opérations de Bourse.

13. Sicav immobilières et foncières : investies dans des actions de sociétés immobilières et foncières, en SICOMI, en SII. Souvent 50% de valeurs françaises.

14. Indice AGEFI IMMO : indice base 100 au 31.12.81 de valeurs cotées au RM de la bourse de Paris et spécialisées dans l'immobilier et le foncier (hors valeurs du bâtiment).

est composé de 49 Sicav Actions Françaises classification COB, dont 30 Sicav déclarées actions françaises et 19 Sicav diversifiées plus spécifiquement déclarées Immobilières.

1.1 Un premier examen des différents indicateurs

Les différentes caractéristiques ne sont ici estimées pour chaque Sicav qu'à partir d'un passé de 42 mois pour être le plus significatives possibles (les résultats calculés sur des périodes plus courtes, tout en étant du même ordre de grandeur, sont plus instables).

Nous noterons : indice 1 : CAC240 ; indice 2 : AGEFI IMMO.

(Les corrélations sont calculées entre le portefeuille et l'indice de référence choisi).

a) Nous avons obtenu le tableau synoptique A (*cf.* annexes) pour la classification COB actuelle.

Le test de significativité de Student utilisé sur les variables montre (*cf.* A), qu'à l'exception du PRD2, les indicateurs de performance sont peu stables d'une Sicav à l'autre dans cette catégorie COB, de même que les autres indicateurs : Treynor et Sharpe (voir fin 2°). On notera aussi une moins grande représentativité en risque sur l'indice 2, avec une forte volatilité, ce qui montre que des Sicav à risques plus ou moins marqués sur le marché immobilier coexistent dans cet échantillon.

b) Selon le nouveau classement :

Actions Françaises : tableau B (annexes)

Notons maintenant que l'ensemble des variables est nettement plus stable, et en particulier le CG2, les sensibilités et les corrélations. On constate que la variable explicative dominante est l'indice de marché des actions, ici le CAC240, comme en témoignent les fortes valeurs du CG1 et de la sensibilité 1.

Actions Françaises Immobilières : tableau C (annexes)

Les indicateurs de provenance de risque CG1 et CG2 sont moins stables que dans l'échantillon des Sicav Actions Françaises, du fait d'une plus grande diversité des compositions des portefeuilles. Le CAC240 reste toutefois la source principale du risque.

Analyse des performances : tableau D (annexes)

Les indicateurs de Treynor, de Sharpe et les PRDi, CGZ, voient leur instabilité diminuer dans les nouvelles catégories. On remarquera aussi que, dans la catégorie actions françaises immobilières, les performances par rapport au CAC240 sont en moyenne de 0,75 et d'une grande instabilité, alors que celles calculées par rapport à l'indice Agéfi-Immo sont de l'ordre de 2,53 et assez stables dans leur ensemble.

A ce point de l'étude, nous remarquons que la nouvelle classification semble plus homogène au niveau des divers indicateurs caractéristiques introduits ;

c'est le cas en particulier des indicateurs : CG, corrélation, sensibilité, volatilité, qui sont plus significatifs au sein de chaque nouvelle catégorie.

1.2 Recherche et étude des facteurs discriminants

a) Etude des corrélations

Le but de cette étude est de déterminer un certain nombre de facteurs directement interprétables, et permettant de caractériser simplement des classes de Sicav.

En réalisant une analyse en composantes principales (pour l'ensemble de l'échantillon) sur chacun des trois types de marchés : CAC240, AGEFI IMMO, CAC 240 + AGEFI IMMO, deux groupes distincts se sont alors dégagés; ils correspondent d'ailleurs aux deux classes définies précédemment. Les principaux facteurs discriminants relevés sont les sensibilités et, dans une moindre mesure, les indices CG et les corrélations. Les variables liées aux performances des gérants ont été écartées car elles ne garantissent pas l'appartenance à un type de Sicav.

Remarques

Nous ne retiendrons pas dans la suite les corrélations, qui contiennent une information de proximité des risques entièrement contenue par ailleurs dans le CG; De plus, les sensibilités et CG sont plus explicites car ils apportent une quantification précise en terme de rentabilité-risque.

A noter également la bonne corrélation entre les divers indicateurs de performance sur les différents types de marchés considérés, ce qui a d'ailleurs déjà été signalé par Rafournier (1989).

b) Vers une nouvelle méthodologie d'identification

En tenant compte du pouvoir discriminant des deux indicateurs sensibilité et CG nous classons alors les Sicav en fonction des facteurs retenus (deux dans le cas du Security Market Line : CG et sensibilité, trois pour le Security Market Plane : sensibilités par rapport aux deux indices et CG1+CG2) grâce à une CAH (Classification Ascendante Hiérarchique).

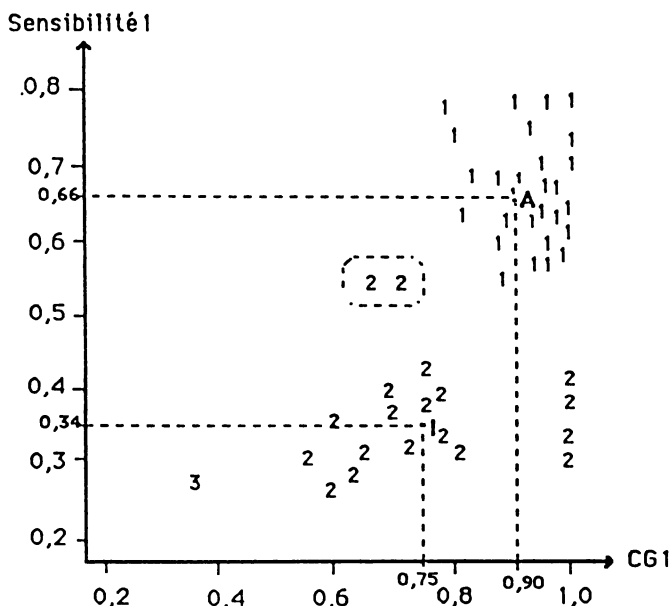
Remarque

Bien que cette étude, soit limitée aux seules Sicav Actions Françaises, elle est généralisable à l'ensemble des portefeuilles. La seule restriction réside dans le fait qu'il faut respecter une certaine homogénéité dans les modes de calcul liés aux indices et aux valeurs liquidatives des Sicav (diversité des horizons et modes de calcul selon l'indice choisi).

Cette méthode appliquée à l'ensemble des Sicav AF de la COB par rapport au marché défini par le CAC240 a donné les résultats suivants :

L'observation des niveaux d'agrégation du dendrogramme conduit à distinguer trois classes :

- une classe 1 constituée à 100% de Sicav Actions Françaises (correspondant à la nomenclature de notre classement) ;
- une classe 2 constituée à 90% de Sicav Immobilières (présence de 2 Sicav Actions Françaises dans cette classe) ;
- un singleton 3 (une Sicav Immobilière)



Notes : 1 observation cachée. Les points moyens de chaque nouvelles catégories sont représentés sur le graphique : A : point moyen des Sicav Actions-Françaises, I : point moyen des Sicav Immobilières.

Métrique $\Delta 1/S2$; règle de partitionnement de Ward; données : 30 Sicav Actions Françaises, 19 Sicav Immobilières - Valeurs liquidatives du 28/12/86 au 31/07/90.

Représentation graphique :

On notera la présence au sein de la classe (2) de 4 Sicav prenant tout leur risque sur la SML du CAC240 : cela n'est guère surprenant car certaines entreprises du secteur immobilier peuvent être particulièrement sensibles aux fluctuations de ce marché.

En utilisant la même méthode avec deux indices, les résultats obtenus ont montré que l'on pouvait lever l'indétermination et différencier les deux types de Sicav avec une fiabilité de 100%.

Conclusion

Les études menées ci-dessus montrent que la classification établie par la COB peut donc être améliorée en utilisant les indicateurs précédemment définis. Dans le cas étudié, on retrouve d'ailleurs, à deux SICAV près sur l'échantillon de départ, ce qui a été réalisé de façon purement qualitative en consultant les objectifs de gestion et les fiches signalitiques fournies par les gérants de Sicav.

Si l'on désire ensuite, établir un Rating sur chacune des catégories de Sicav ainsi constituées, un indicateur de bonne représentation du portefeuille au sein du marché considéré sera nécessaire pour pouvoir relativiser les différentes mesures obtenues. Il sera calculé à partir des sensibilités et des indices CGI provenance de risque.

2. Analyse et interprétation des classements obtenus avec les nouveaux indices de performance (sur 42 mois)

Dans leur article, Dybvig et Ross (1985), ont développé une analyse des mesures de performance par rapport à la SML utilisant des indices non-éfficients. Ils ont conclu à la non coïncidence des critères moyenne-variance et droite de marché, même en présence d'un taux sans risque. D'autre part, ils ont montré que le classement utilisant la SML est sensible au choix de l'indice utilisé, au point que, pour deux indices inefficients proches l'un de l'autre, et proches d'un indice vraiment éfficient, il peut en fait être renversé. Ceci jette un doute sérieux quant à la capacité du critère utilisant la SML de juger de la performance des portefeuilles. Comme il a été dit en conclusion de l'article, une telle analyse nous dit plus sur l'indice que l'on utilise que sur le portefeuille que l'on évalue.

2.1 Les Sicav Immobilières

Pour corroborer les résultats rappelés plus haut, et montrer l'influence du choix de l'indice dans le classement des Sicav par le critère de la SML, on a étudié les 19 Sicav Immobilières en utilisant respectivement les indices CAC240 et Agéfi Immo comme indices de marché.

Nous avons obtenu des classements, selon les deux types de marchés spécifiques considérés, dont la corrélation est de l'ordre de 0,71, ce qui représente le plus mauvais indice de corrélation dans nos différents tests d'adéquations des classements.

Les types de marchés considérés influent sur les corrélations : bonne corrélation entre le Sharpe et le CGZ, qui est d'ailleurs supérieure à celle entre Sharpe et le PRD1 ou encore entre le Sharpe et le PRD2.

Les indices de performance « globaux » (CGZ ou Sharpe) sont plus fortement corrélés avec les indicateurs liés au marché CAC240, qu'avec ceux calculés sur l'AGEFI IMMO : cela s'explique par une plus forte représentativité de la Sicav sur le premier de ces deux marchés.

Tableau des corrélations (Spearman) des divers classements obtenus entre les anciens et nouveaux indices de performance :

Indices	Treynor	Treynor 2	Sharpe	PRD1	PRD2	CGZ
Treynor 1	–	0,851	0,975	0,954	0,823	0,984
Treynor 2	0,851	–	0,891	0,745	0,944	0,823
Sharpe	0,975	0,891	–	0,910	0,891	0,947
PRD1	0,954	0,745	0,910	–	0,71	0,963
PRD2	0,823	0,944	0,891	0,71	–	0,788
CGZ	0,984	0,823	0,947	0,963	0,788	–
Test d'indépendance de seuil critique à 95% : $\rho_c = 0,46$						

Pour expliquer pourquoi certains classements s'inversaient selon les indices de performance choisis, nous avons considérés comme nouvelle variable la différence obtenue entre deux classements, que nous croisons avec différents paramètres susceptibles d'être significatifs.

Les tests ont montrés que seuls les indicateurs provenance de risque pouvaient avoir une influence significativement non nulle.

Tableau des corrélations

Différence de classements	CG1 (CAC240)	CG2 (AGEFI)	CG1 + CG2
Treynor 1-PRD1	(1') 0,183 NS	(3) -0,348 NS	-0,102 NS
Treynor2-PRD2	-0,076 NS	-0,02 NS	-0,079 NS
Treynor1-CGZ	0,207 NS	0,003 NS	0,176 NS
Treynor2-CGZ	(4) 0,510 S	(4) -0,687 S	-0,077 NS
Sharpe-CGZ	(4) 0,554 S	(4) -0,234 NS	(2) 0,291 NS
Sharpe-PRD1	(1) 0,469 S	(3) -0,429 S	0,076 NS
Sharpe-PRD2	-0,321 NS	(1) 0,700 S	0,245 NS
Test d'indépendance de seuil critique à 90% : $\rho_c = 0,30$ S : Significatif/ NS : Non Significatif			

(1) Dès lors qu'une Sicav a une forte part de risque présente sur le marché spécifique i (défini par des actions françaises ou des actifs liés au

secteur immobilier), l'ordre des classements Sharpe et PRDi est changé de façon significative. Le classement obtenu avec un autre indicateur, qui ne tient pas compte de la provenance du risque (Sharpe), est indépendant de cette provenance de risque. La corrélation est alors positive. Si le second classement est effectué avec un Treynor(1'), les corrélations obtenues sont moins significatives, mais restent cependant positives, car l'indicateur de Treynor tient compte en partie de la provenance de risque à travers son bêta.

(2) Si le marché de référence est défini par les deux indices, le classement obtenu avec prise en compte de la provenance des risques est également changé de façon significative par rapport à celui du Sharpe.

(3) Il existe un phénomène de substitution entre les risques. En effet, les résultats montrent que, sur le type de Sicav immobilières, presque tout le risque est expliqué par le marché bi-indiciel : d'où un effet de substitution qui impose que le classement de la performance liée au CAC240 soit alors meilleur que celui du Sharpe ou Treynor quand la part de risque provenant de l'AGEFI IMMO augmente.

(4) Les résultats montrent que le risque propre du CAC240 (sa volatilité) est le double de celui de l'AGEFI sur notre période d'étude. A cause de la propriété de substitution décrite en (3), pour une sensibilité égale sur chacune des 2 SML (ce qui est aussi observé en pratique), on a alors un risque pris sur le CAC240 qui est le double de celui pris sur l'AGEFI. La valeur du CGZ, et donc son classement, est meilleure quand le CG1 croît, et réciproquement moins bon quand le CG2 augmente (à rendement et volatilité du portefeuille constants).

2.2 Les Sicav Actions Françaises (classements qualitatifs)

L'interprétation de ces résultats est la même que celle énoncée plus haut dans le III.B.2). Les tableaux (*E* et *F*) correspondants sont donnés en annexe.

3. Comment réaliser une classification ?

Réaliser une classification pose de nombreux problèmes méthodologiques :

(1) Faut-il privilégier une approche qualitative des Sicav pour définir leur position dans une catégorie ? (fiches signalitiques, objectifs de gestion).

(2) Au contraire, doit-on étudier leurs comportements (valeurs liquidatives) pour ensuite constituer des classes homogènes ?

En pratique, une bonne solution consisterait à obtenir des classes principales selon le critère (1), puis tenir compte de (2) pour pouvoir établir des classes plus fines. En outre, la méthode (2) permet de cautionner la dénomination de la Sicav et de vérifier les déclarations du gérant quant aux produits sur lesquels il investit réellement.

La définition d'outils de mesures de performance-risque sur des marchés de référence donnés nous permet ainsi de réaliser une meilleure comparaison entre les véritables performances des gérants.

CONCLUSIONS

Un certain nombre de critiques peuvent être faites à nos indicateurs et mesures. Parmi les plus sérieuses, et on en est conscient, sont celles liées aux problèmes de l'hétéroscédasticité que l'on n'a pas inclus dans nos modèles au niveau des covariances, comme dans G.W. Schwert et P.J. Seguin (1990) ou autres. De plus, aucune allusion n'est faite aux primes de risque du marché et aux fonctions d'utilité¹⁵ (cela est dû au but de cet article, et non à un fait volontaire). Enfin, s'agissant de certaines Sicav internationalement diversifiées, ou investies sur des secteurs étroits du marché, il aurait été possible d'inclure des processus ponctuels dirigés par des Poissons. Les Sicav ayant dans leur portefeuille des actifs optionnels auraient pu être mieux prises en compte (dissymétrie dans la distribution de probabilité). Mais dans le cas d'une addition de Poissoniens ou d'actifs conditionnels à volatilité non constante, le processus des prix des actifs actualisé (au taux sans risque) par : $\exp(-\int_0^t r_{o,s} ds)$, n'est plus une martingale complète et il n'y a plus de couverture parfaite, mais seulement « optimale » dans le sens d'une minimisation du « risque résiduel ».

Ceci étant dit, on pense néanmoins avoir répondu en partie au problème posé :

- en tenant compte du risque résiduel;
- en définissant des indicateurs (PRD, CGZ) basés sur la prise en compte de multi-indices (ce qui devrait minimiser le risque d'un mauvais choix de l'indice, résoudre en quelque sorte la question de l'indice du Marché, et répondre aux critiques adressées à l'utilisation d'une seule SML);
- en définissant un indicateur CG permettant de déterminer la source de risque prépondérante dans la volatilité du portefeuille.

Enfin, disons non sans humour, que si Ph. Dybvig et S.A. Ross (1985) ont raison en disant que la principale qualité du CAPM, et à laquelle il doit sa survie, est l'utilisation de la position d'un portefeuille par rapport à la SML, le CGZ survivra aussi, s'il voit le jour sur le marché, comme en substance, vu sous l'angle géométrique, il s'agit de mesurer la position par rapport à un plan.

15. Pour se replacer dans ce contexte se rapporter aux articles de D. Duffie et W. Zame (1989) et I. Karatzas, J. Lehoczky, S. Shreve, Gan Lin Xu (1989)

RÉFÉRENCES

- AASE K.K. et GUTTORP P. « Estimation in Models for Security Prices », *Scandinavian Actuarial Journal*, 1987, 211-224
- AFTALION F. et PONCET P. « Gestion collective : le salaire du risque », *Haute Finance*, 1990..
- AKGIRAY V. « Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns : Evidence and Forecasts », *Journal of Business*, 1989, 55-80.
- BOLLERSLEV T. et ENGLE R.F. et WOLDRIDGE J.M. « A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariance », *Journal of Political Economy* 1988, 116-131.
- BOURVIN P. et BURGER H. et ZAMFIRESCU N.S. « Une Mesure des Emprunts à Taux Variable définie par un mélange de Méthodes Actuarielles et Stochastiques », *Acte du Colloque*, Colloque International AFIR, Paris, 1990.
- CANEL T. et GAUTIER B. et ZAMFIRESCU N.S. « Une mesure de Performance-Risque des Sicav », *Actes du Congrès*, Colloque International de l'AFFI, Louvain.
- CHAMBERLAIN G. « Funds, Factors and Diversification in Arbitrage Pricing Models », *Econometrica*, 1305-1323.
- CHAMBERLAIN G. et ROTHCHILD « Arbitrage, Factor Structure and Mean-Variance Analysis on Large Markets », *Econometrica*, 1983, 1281-1304.
- DUFFIE D. et ZAME W. « The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model », *Econometrica*, 1989, 1279-1297.
- DYBVIK P. et ROSS S. « The Analysis of Performance Measurement Using a Security Market Line », *Journal of Finance*, June, 1985, 401-416.
- ENGLE R.F. « Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation », *Econometrica*, 1982, 987-1008.
- ENGLE R.F. LILIE D. et ROBINS R. « Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : The Arch-M Model », *Econometrica*, 1987, 391-407.
- FAMA E. « Stock Returns, Expected Returns and Real Activity », *Journal of Finance*.
- FERSON W. KANDEL S. et STAMBAUGH R. « Tests of Asset Pricing with Time - Varying Expected Risk Premiums and Market Betas », *Journal of Finance*, 1987, 201-219.
- FLORENS-ZMIROU D. « Approximate Discrete-Time Schemes for Statistics of Diffusion », *Statistics*, 1987.
- GALLAIS-HAMONNO G. et GALLAIS-HAMONNO F. « La supériorité de la gestion collective de l'épargne mobilière : analyse méthodologique et application aux sicav », *Consommation*, 1970.
- GEANAKOPOLOS J. et SHUBIK M. « The Capital Asset Pricing Model as a General Equilibrium with Incomplete Markets », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 1990.
- GIBBONS M.R. et FERSON W. « Testing Asset Pricing Models with Changing Expectation and an Inobservable Market », *Journal of Financial Economics*, 1985, 217-236.
- GIBBONS M.R. ROSS S. et SANKEN J. « A Test of the Efficiency of a Given Portfolio », *Econometrica*, 1987, 1121-1152.
- KARATAS I. LEHOCZKY J. SHREVE S. et GAN-LIN X. « Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market », preprint, septembre, 1989.
- KARATAS I. et SHREVE S. « *Brownian Motion and Stochastic Calculus* », New York : Springer Verlag, 1988.
- RAFOURNIER B. « Mesure, Stabilité et Déterminants de la Performance des Sicav Actions diversifiées », *Journal de la Société Statistique de Paris*, 1989, 133-148.

- ROLL R. «Ambiguity when Performance is Measured by the Security Market Line», *Journal of Finance*, 1989, 1051-1069.
- SCHWERT G.W. et SEGUIN P.J. Heteroskedasticity in Stock Returns *Journal of Finance*, 1990, 1129-1155.
- SHANKEN J. «Mutivariate Proxies and Asset Pricing Relation», *Journal of Financial Economics*, 1987, 91-110.
- WILKIE A.D. «Modern Portfolio Theory – Some Acturial Problems», *Actes du Colloque*, Colloque International AFIR, Paris, 1990.

ANNEXES

A *Classification COB*

Variables	moyennes	écart-types
rentabilité	0,098	0,054
volatilité	0,148	0,053
corrélation 1	0,908	0,128
corrélation 2	0,517	0,144
sensibilité 1	0,535	0,167
sensibilité 2	0,375	0,082
CG1	0,842	0,153
CG2	0,209	0,123
CG1 + CG2	1,051	0,158
PRD1	0,434	0,497
PRD2	2,129	1,153
CGZ	0,536	0,618

(pas de pondération par les actifs)

B *Actions Françaises*

Variables	moyennes	écart-types
rentabilité	0,098	0,057
volatilité	0,180	0,036
corrélation 1	0,972	0,019
corrélation 2	0,463	0,094
sensibilité 1	0,656	0,068
sensibilité 2	0,413	0,064
CG1	0,903	0,100
CG2	0,148	0,033
CG1 + CG2	1,051	0,120

C *Actions Françaises Immobilières*

Variables	moyennes	écart-types
rentabilité	0,098	0,051
volatilité	0,097	0,029
corrélation 1	0,807	0,160
corrélation 2	0,603	0,168
sensibilité 1	0,343	0,059
sensibilité 2	0,314	0,073
CG1	0,746	0,174
CG2	0,304	0,153
CG1 + CG2	1,050	0,208

D *Analyse des performances*

Variables	AF COB moyenne écart-type	AF moyenne écart-type	Immobilières moyenne écart-type
Sharpe	0,865/0,781	0,638/0,597	1,223/0,912
Treynor1	0,285/0,346	0,172/0,166	0,464/0,469
Treynor2	0,287/0,383	0,268/0,450	0,317/0,253
PRD1	0,434/0,497	0,232/0,335	0,752/0,551
PRD2	2,129/1,153	1,872/0,948	2,534/1,347
CGZ	0,536/0,618	0,273/355	0,951/0,721

*Tableau E des corrélations (Spearman)
des divers classements obtenus entre
les « anciens et nouveaux » indices de performance*

Indices	Treynor 1	Sharpe	PRD1
Treynor1	–	0,989	0,959
Sharpe	0,989	–	0,934
PRD1	0,959	0,934	–

Test d'indépendance de seuil critique à 95% : $\rho_c = 0,36$

F *Tableau des corrélations*

Différence de classements	CG1 (CAC240)
Treynor1-PRD1	0,322 S
Treynor1-CGZ	0,351 S
Sharpe-CGZ	0,308 NS
Sharpe-PRD1	0,280 NS

Test d'indépendance de seuil critique à 90% : $\rho_c = 0,310$

S : Significatif ; NS : Non significatif

Les catégories de Sicav suivantes ont été obtenues à partir de l'étude des fiches signalétiques et des objectifs annoncés de gestion, disponibles pour chacun des produits. Ce type de classification a été établi par la société Europerformance.

Sicav court terme
Monétaires ¹ Régulières ² Sensibles ³
Sicav obligations
Françaises – Capitalisation ou R. annuel ⁴ – Revenu trimestriel-mensuel ⁵ A vocation internationale A vocation européenne
Sicav actions ou diversifiées
Actions françaises Diversifiées françaises Actions internationales Diversifiées à vocation internationale Europe Etats-Unis Japon/Asie/Pacifique Or et matières premières Immobilières et foncières

¹ *Sicav monétaires* : Sicav « court terme » qui affichent un objectif de gestion corrélé avec un ou plusieurs indicateurs du marché monétaire.

² *Sicav régulières* : Sicav « court-terme » qui donnent la priorité à la régularité de l'évolution de la valeur liquidative.

³ *Sicav sensibles* : Sicav « court-terme » dont la valeur liquidative affiche une sensibilité aux variations des cours de bourse.

⁴ *Sicav obligations françaises* : de capitalisation ou à revenu annuel qui capitalisent les revenus distribuables ou distribuent un dividende par an.

⁵ *Sicav à revenu trimestriel ou mensuel* : Sicav dont les revenus sont distribués trimestriellement ou mensuellement.