JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI
HÉLÈNE MASSÉ

Recherche d'une loi de fécondité

Journal de la société statistique de Paris, tome 132, nº 1 (1991), p. 47-56
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1991__132_1_47_0>

© Société de statistique de Paris, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

III

ARTICLES

RECHERCHE D'UNE LOI DE FÉCONDITÉ

Paul DAMIANI
INSEE
Ancien secrétaire général
des Sociétés de Statistique de Paris et de France

Hélène MASSÉ
INSERM

On a essayé de déterminer une loi de fécondité donnant le taux de fécondité suivant l'âge de la mère. Pour cela, on a utilisé la méthode employée pour établir une loi de mortalité, dans laquelle on avait défini une nouvelle échelle des temps basée sur les variations de poids avec l'âge. La loi de fécondité trouvée a la même forme que la loi de mortalité. On a ensuite étudié les variations dans le temps des paramètres de cette loi.

We tried to find a law of fertility, giving fertility rate according mother's age. For this purpose, we used the same method as for searching a law of mortality, where we defined a new scale of time based on variations of weight according age. The law of fertility we found and the law of mortality have the same form. Then, we studied variations of this law of fertility according time.

INTRODUCTION

Le *taux de fécondité par âge* est le rapport du nombre annuel de naissances vivantes issues des femmes d'un groupe d'âge donné à l'effectif de ces femmes. On appelle *loi de fécondité par âge* une fonction analytique permettant de calculer les taux de fécondité en fonction de l'âge de la mère.

Pour déterminer une telle loi, nous avons été amené à définir une nouvelle échelle des temps basée sur les variations du poids du corps humain avec l'âge. C'est la méthode que nous avions utilisée pour évaluer des lois de mortalité.

Cette étude fait suite à un travail précédent [1], où nous avions analysé les distributions départementales de la fécondité. Nous avions fait apparaître deux types de fécondité, l'une liée à la jeunesse, l'autre à l'âge mûr.

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 132, n° 1, 1991

Temps propre et lois de mortalité

Nous rappelons, tout d'abord, la définition de la nouvelle échelle des temps proposée dans une étude précédente ainsi que les lois de mortalité que nous avons déduites [2].

Temps propre

Nous proposons un changement d'échelle des temps basé sur la théorie de la relativité restreinte. Nous remplaçons le temps observé t par un *temps propre* t_0 défini par :

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{P}{P_0} \tag{1}$$

où P, P_0 sont les poids d'un individu respectivement à l'âge t et à la naissance.

Cette formule s'applique également à la période comprise entre la conception et la naissance, en remplaçant le poids de l'individu par celui de l'ensemble : mère et fœtus. Le temps observé t est l'âge calculé à partir de la conception.

Si on appelle t_i et t_{i+1} les temps observés, P_i et P_{i+1} les poids observés correspondant aux temps propres t_{0i} et $t_{0,i+1}$, on a, en première approximation :

$$\Delta t_i = w_i \Delta t_{0i}$$

où : $$w_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2P_0}$$ est appelé *coefficient pondéral.*

Cette formule permet de calculer Δt_{0i} à partir de Δt_i, connaissant les variations de poids suivant le sexe et l'âge, tirées d'une étude précédente [3]. On détermine t_{0i} en supposant que l'origine du temps propre correspond à l'origine du temps observé, c'est-à-dire au moment de la conception.

Le tableau I donne, pour le sexe féminin, les valeurs de t et de w en fonction de t_0.

Lois de mortalité

On considère une population fermée que l'on suit de la conception à la mort et soumise à une mortalité donnée. On établit une table de mortalité comprenant les éléments suivants :

l_i, nombre de survivants à l'âge i,

d_i, nombre de décès entre i et $i + 1$.

Le *quotient annuel de mortalité* à l'âge i est la probabilité pour un individu d'âge i de mourir avant l'âge $i + 1$. Il a pour expression : $q_i = d_i/l_i$.

TABLEAU I
Temps observé et coefficient pondéral en fonction du temps propre, pour le sexe féminin

Temps propre $t_{0\imath}$ (1)	Temps observé $t_\imath$ (1)	Coefficient pondéral $w_\imath$
0	0	1,2389
0,5	0,392	1,7937
1	1,199	2,7474
1,5	2,688	4,1916
2	5,041	5,9612
2,5	8,375	8,1367
3	13,003	11,3190
3,5	19,609	16,0051
4	28,829	21,1834
4,5	40,275	23,9373
5	52,109	22,2586
5,5	62,238	17,6443
6	70,160	13,6799
6,5	76,190	5,5515

(1) Temps compté à partir de la conception.

Au quotient $q_\imath$ correspond, dans la nouvelle échelle des temps, le *quotient propre de mortalité* $q_{0\imath}$, défini par : $q_{0\imath} = q_\imath \, w_\imath$.

Sur les données de la période 1966-1970, on trouve expérimentalement la loi de mortalité par maladie ou loi de mortalité non accidentelle suivante, quel que soit le sexe :

$$\operatorname{Log} q_{0\imath} = -ct_\imath \exp\{-\lambda t_{0\imath}\} \qquad (2)$$

avec :

$$\lambda = 1,130$$
$$c = 12,8942$$

Avec la même méthode, nous avons établi, par la suite, des lois de mortalité par cause, une loi de mortalité accidentelle et une loi de mortalité générale, accidents inclus [4]. Ces lois sont de la même forme que la loi de mortalité par maladie indiquée ci-dessus.

LOI DE FÉCONDITÉ

Données de base

Les données de base sont les taux annuels de fécondité par groupes quinquenaux d'âge de la mère, entre 15 et 49 ans. Ces taux, calculés à l'occasion de chaque recensement, s'obtiennent à partir des effectifs par âge des femmes tirés du recensement et du nombre de naissances vivantes au cours d'une période de trois ans en général, entourant cette date. Ces taux étaient établis par la SGF (Statistique générale de la France) ; ils le sont maintenant par l'INSEE (Institut national de la statistique et des études économiques).

On a utilisé les données pour les recensements compris entre 1896 et 1982 [5] (voir tableau II).

TABLEAU II
Taux de fécondité suivant l'âge de la mère de 1896 à 1982
(Taux pour 1000 femmes)

Dates	Age de la mère						
	15-19ans	20-24 ans	25-29 ans	30-34 ans	35-39 ans	40-44 ans	45-49 ans
1895-97	25,5	127,0	168,0	133,0	88,0	36,2	5,3
1900-02	26,5	136,0	165,0	122,0	82,0	33,6	4,6
1905-07	27,0	132,0	153,0	116,0	70,6	30,2	4,1
1910-12	27,3	131,0	141,0	101,0	66,2	24,3	2,3
1920-22	23,7	132,0	156,0	109,0	65,6	24,7	2,3
1925-27	26,8	130,0	135,0	99,4	56,2	20,6	1,9
1930-32	31,1	130,0	128,0	87,9	52,4	18,0	1,6
1935-37	23,9	133,0	120,0	79,3	43,9	15,4	1,3
1946-47	22,1	150,0	187,0	134,0	78,8	26,3	2,3
1953-55	21,9	155,0	167,0	110,0	62,8	20,3	1,8
1961-63	23,3	172,0	183,0	110,0	54,7	19,3	1,3
1967-69	26,0	163,0	164,0	100,0	49,0	15,0	1,0
1974-76	25,0	129,0	129,0	68,0	30,0	8,0	1,0
1981-83	15,1	111,4	141,4	75,4	26,0	5,6	0,4

On notera que l'INSEE évalue maintenant des taux de fécondité par année d'âge de la mère, pour chaque année comprise entre deux recensements.

Notations

On appelle f_i le taux de fécondité par femme du groupe d'âge i. Ce taux est affecté à l'âge central x_i de ce groupe, c'est-à-dire au temps : $t_i = x_i + 0,75$, en exprimant x_i et t_i en années.

A ce taux, correspond, dans la nouvelle échelle des temps t_0, le *taux propre de fécondité* f_{0i}, défini par :

$$f_{0i} = f_i w_i$$

Expression de la loi de fécondité

On cherche, pour le taux propre de fécondité, une expression analogue à celle donnant le quotient propre de mortalité par maladie.

Après plusieurs essais, on trouve expérimentalement la loi suivante :

$$\operatorname{Log} f_{0i} = g(t_i - t_G) \exp\{-\varphi(t_{0i} - t_{0G})\} + h \qquad (3)$$

où t_G et t_{0G} représentant l'âge d'apparition des premières règles, dans les échelles t et t_0 respectivement.

Calculs pratiques

A partir du tableau de correspondance entre t_0, t et w, on évalue, par interpolation, les valeurs du taux de fécondité f et du coefficient pondéral w, pour différentes valeurs de t_0.

On calcule, ensuite, les valeurs correspondantes du taux propre f_0.

La formule (3) s'écrit :

$$y = b_1 u_1 + b_2 u_2 + h$$

en posant :

$$y = \operatorname{Log} f_0$$
$$u_1 = t \exp\{-\varphi t_0\}$$
$$u_2 = \exp\{-\varphi t_0\}$$

avec :

$$b_1 = g \exp\{\varphi t_{0G}\}$$
$$b_2 = -g t_G \exp\{\varphi t_{0G}\}$$

Pour différentes valeurs de φ, on calcule les coefficients de ce modèle de régression linéaire. On conserve la valeur de φ pour laquelle l'ajustement est le meilleur.

Ayant déterminé b_1 et b_2, on en tire :

$$t_G = -b_2/b_1$$

On évalue l'âge correspondant t_{0G} dans l'échelle t_0. L'âge compté à partir de la naissance a pour valeur : $x_G = t_G - 0,75$.

On en déduit enfin : $g = b_1 \exp\{-\varphi t_{0G}\}$.

Résultats

Le tableau III fournit les valeurs des paramètres de la loi de fécondité pour chaque recensement de 1896 à 1982.

TABLEAU III
Valeurs des paramètres de la loi de fécondité de 1896 à 1982

Dates	φ	x_G (1)	g	h
1895-97	1,4638	13,19	2,2577	– 7,2870
1900-02	1,4642	13,03	2,2543	– 7,2476
1905-07	1,4640	12,91	2,2873	– 7,4126
1910-12	1,4636	12,65	2,6196	– 8,5711
1920-22	1,4641	12,83	2,5102	– 8,1755
1925-27	1,4625	12,56	2,7266	– 8,9762
1930-32	1,4632	12,39	2,7039	– 8,9063
1935-37	1,4647	12,25	3,0137	– 9,9965
1946-47	1,4634	12,93	2,7863	– 9,0577
1953-55	1,4644	12,88	2,8478	– 9,4337
1961-63	1,4649	12,64	3,1089	–10,1870
1967-69	1,4633	12,15	3,3074	–10,6995
1974-76	1,4672	12,17	3,2856	–10,9374
1981-83	1,4658	12,06	4,0322	–13,4016

(1) En années à partir de la naissance

Compte tenu des erreurs d'observation et des évaluations faites dans les calculs, les résultats obtenus doivent être considérées comme des approximations des vraies valeurs des paramètres.

– *Age d'apparition des premières règles*, x_G. On note une diminution de cet âge qui passe de 13,19 ans en 1896 à 12,06 ans en 1982. Cette tendance est régulière en dehors des guerres qui provoquent une augmentation de cet âge : $x_G = 12,83$ en 1921 contre 12,65 en 1911 ; $x_G = 12,93$ en 1946 au lieu de 12,25 en 1936.

– *Coefficient* φ. Les variations sont très faibles. On constate une très légère augmentation dans l'ensemble ($\varphi = 1,464$ en 1896 et 1,466 en 1982). Les périodes de guerre occasionnent une baisse de la valeur de ce coefficient.

On peut admettre que φ est un paramètre de nature endogène lié à la structure interne de l'individu; son augmentation traduit une baisse de la fécondité.

– *Coefficient g.* On observe une augmentation de la valeur de g qui passe de 2,258 en 1896 à 4,032 en 1982. On peut supposer que g est un paramètre de nature exogène lié aux progrès de la médecine et aux conditions extérieures; son augmentation représente une augmentation de la fécondité.

– *Coefficient h.* Ce coefficient représente la valeur du logarithme du taux propre de fécondité à l'âge d'apparition des premières règles. Il y a diminution régulière de la valeur de h qui passe de $-7{,}287$ en 1896 à $-13{,}402$ en 1982.

Ces résultats sont illustrés par les graphiques 1 et 2, pour les paramètres x_G et φ.

ESSAI D'INTERPRÉTATION

Pour interpréter la loi obtenue, nous utiliserons le raisonnement employé pour justifier la loi de mortalité dans l'étude citée précédemment [2].

Définition de l'entropie

On considère une population fermée, de sexe féminin, suivie à partir de la conception. Soit l_0 le nombre de conceptions et l_i le nombre de survivants à l'âge t_{0i}. La probabilité d'atteindre l'âge t_{0i} est : $p_i = l_i/l_0$.

On note n_i le nombre de naissance entre t_{0i} et $t_{0,i+1}$. On suppose que n, le nombre total de naissances dans l'année, est constant. On a donc :

$$\sum n_i = n$$

Soit G_i le niveau d'énergie correspondant à la fécondité à l'âge t_{0i}. On fait l'hypothèse que l'énergie correspondant à l'ensemble des naissances est constante. On peut donc écrire :

$$\sum n_i G_i = G$$

La probabilité d'avoir la distribution de naissances $\{n_i\}$ a pour valeur :

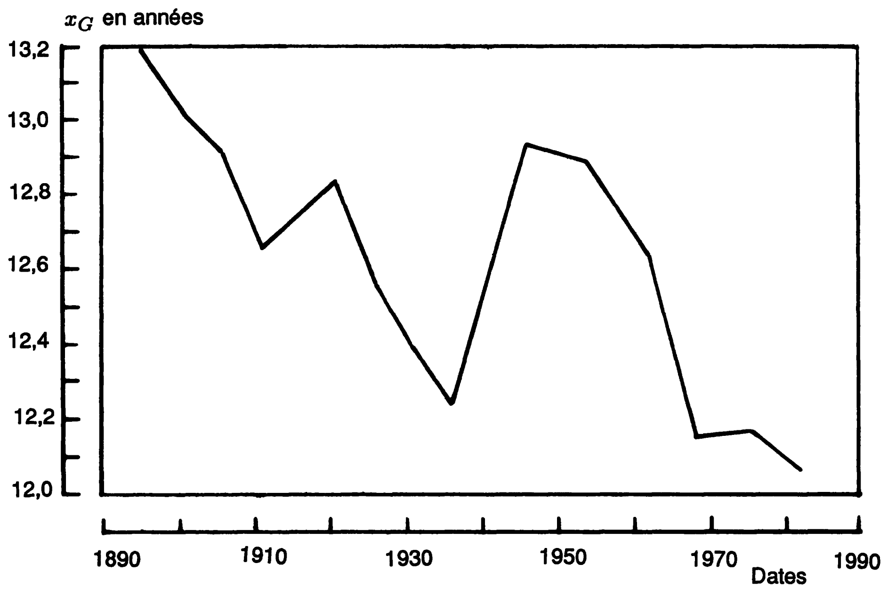
$$\mathcal{P} = \frac{n!}{\Pi n_i!}\,\Pi(p_i)^{n_i}$$

La vraisemblance a pour expression :

$$\text{Log}\,\mathcal{P} = \text{Log}\,n! - \sum \text{Log}\,n_i! + \sum n_i\,\text{Log}\,p_i$$

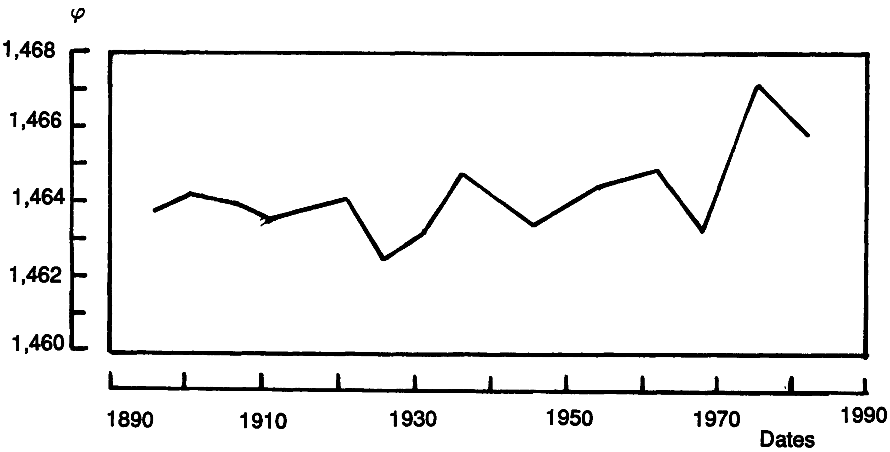
Graphique 1

Evolution dans le temps de l'âge d'apparition des premières règles, x_G



Graphique 2

Evolution dans le temps du coefficient φ



En appliquant la formule de Stirling : $\text{Log}\, n! \sim n \,\text{Log}\, n - n$, il vient :

$$\text{Log}\, \mathcal{P} \sim n \,\text{Log}\, n - \sum n_\imath \,\text{Log}\, \frac{n_\imath}{p_\imath}$$

On appelle *entropie* de la distribution la quantité :

$$S = k \,\text{Log}\, \mathcal{P}$$

où k est la constante de Boltzmann.

Répartition d'équilibre

Le système adopte la distribution la plus probable d'après le théorème du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire la distribution dont l'entropie est maximum.

On cherche les valeurs de $n_\imath$ telles que S est maximum avec les contraintes :

$$\begin{cases} \sum n_\imath = n \\ \sum n_\imath G_\imath = G \end{cases}$$

En appelant α et β deux multiplicateurs de Lagrange, la solution de ce système s'obtient en annulant la dérivée par rapport à $n_\imath$ de la fonction suivante :

$$F = S + \alpha \sum n_\imath + \beta \sum n_\imath G_\imath$$

Il vient : $$\frac{\partial F}{\partial n_\imath} = -k \left(\text{Log}\, \frac{n_\imath}{p_\imath} + 1 \right) + \alpha + \beta G_\imath = 0$$

d'où : $$\text{Log}\, \frac{n_\imath}{p_\imath} = \frac{\alpha}{k} - 1 + \frac{\beta}{k} G_\imath$$

Or : $$\frac{n_\imath}{l_\imath} = f_{0\imath} \text{ en première approximation.}$$

La relation précédente peut donc s'écrire :

$$\text{Log}\, f_{0\imath} = A + B\, G_\imath \tag{4}$$

On peut admettre que l'énergie élémentaire correspondant à une naissance à $t_{0\imath}$ est proportionnelle à $P_\imath / P_0$. Le niveau d'énergie correspondant atteint à l'âge $t_{0\imath}$ aura pour expression :

$$G_\imath = c \int_{t_{0G}}^{t_{0\imath}} \frac{P}{P_0}\, dt_{0\jmath} = c \int_{t_G}^{t_\imath} dt_\jmath = c(t_\imath - t_G)$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$\text{Log}\, f_{0\imath} = A + B'(t_\imath - t_G)$$

On retrouve l'équation (3), en prenant pour B' une expression de la forme :

$$B' = g \exp\{-\varphi(t_{0\imath} - t_{0G})\}$$

B est un facteur correctif représentant l'amoindrissement de la fécondité avec l'âge.

CONCLUSION

L'utilisation du temps propre, défini à partir des variations du poids avec l'âge, avait permis d'obtenir une forme particulièrement simple pour les lois de mortalité. On a montré, dans cette étude, que cette méthode fournissait une expression de même forme pour la loi de fécondité suivant l'âge de la mère.

L'autre intérêt de ce changement d'échelle des temps est de permettre d'analyser les différentes composantes de la loi. On a pu mesurer en particulier, la baisse depuis un siècle de l'âge d'apparition des premières règles.

RÉFÉRENCES

[1] DAMIANI P., MASSÉ H. Etude des distributions départementales de la fécondité. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 131, n° 2, 1990.

[2] DAMIANI P. Recherche d'une loi générale de mortalité. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 126, n° 2, 1985, 63-76.

[3] DAMIANI P. Evolution du poids du corps humain avec l'âge. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 118, n° 2, 1977, 154-164.

[4] DAMIANI P., MASSÉ H. Loi de mortalité par cause. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 128, n° 3, 1987, 163-170.
DAMIANI P. Loi de mortalité par accident. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 128, n° 4, 1987, 232-238.
DAMIANI P. Loi de mortalité générale, accidents inclus : expression analytique et variations dans le temps. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, tome 129, n° 3, 1988, 170-180.

[5] Pour les recensements de 1896 à 1962 :
Annuaire statistique de la France. Résumé rétrospectif 1966. INSEE.
Pour les recensements de 1968 à 1982 :
Données de démographie régionale 1968, 1975, 1982. Collection INSEE, D23, D82, D115.