JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JEAN-CLAUDE HENTSCH

Distribution de la monnaie fiduciaire entre les coupures. Les paramètres et l'indice des prix. La distribution normalisée

Journal de la société statistique de Paris, tome 126, nº 4 (1985), p. 139-144

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1985__126_4_139_0>

DISTRIBUTION DE LA MONNAIE FIDUCIAIRE ENTRE LES COUPURES
Les paramètres et l'indice des prix
La distribution normalisée

Jean-Claude HENTSCH
Banquier

Our 1983 hypothesis regarding the distribution of notes and coins is used to yield a parallel between the parameters of the distribution and the price index in France. It is also used as a standard to measure the relative circulation of individual notes or coins.

Un parallèle est établi entre l'indice des prix et les paramètres de la distribution des pièces et des billets en France selon notre hypothèse de 1983. Cette distribution sert aussi de norme de comparaison pour mesurer la circulation d'une coupure individuelle.

Nous avons formulé [5] l'hypothèse que la monnaie fiduciaire (pièces de monnaie et billets de banque) est distribuée entre les coupures en fonction de certaines règles que nous avons énoncées. Ces règles ne sont pas actuellement soutenues par des considérations théoriques et leur justification ne peut, semble-t-il, être apportée que par la méthode expérimentale. Nous cherchons donc à tirer de l'hypothèse de travail des conclusions qui puissent être mises à l'épreuve de la pratique.

1 — RAPPEL DE L'HYPOTHÈSE DE TRAVAIL

Notre hypothèse est arbitraire et a été choisie parce qu'elle permet le mieux de rendre compte des distributions que l'on rencontre dans la réalité. Elle peut être résumée en trois propositions :

a) Le montant M_j de circulation sous forme de chaque coupure de valeur faciale C_j peut être calculé par la formule $M_j = K(\sqrt{C_{j+1}} - \sqrt{C_j})$ où K est une constante.

b) Dans la formule ci-dessus, la circulation de la plus grosse coupure existante se calcule en remplaçant $\sqrt{C_{j+1}}$ par $\sqrt{L}$. Nous avons défini L, qui est presque toujours très supérieur à la plus grosse coupure, comme étant la « limite supérieure de la circulation », et nous avons montré que le total de la circulation est égal à $K\sqrt{L}$.

c) Si la circulation effective d'une coupure n'atteint pas la valeur calculée, le montant manquant se reporte en supplément sur la circulation de la coupure inférieure.

Rappelons encore que le paramètre L s'exprime en unité monétaire alors que la dimension du paramètre K est la racine carrée de cette même unité. Il est facile de comprendre que L représente la largeur du spectre monétaire alors que K est son amplitude, un simple facteur de proportionnalité. Pour mieux comprendre la nature de ces paramètres, faisons l'expérience mentale suivante : imaginons deux pays identiques ayant la même population, la même monnaie, etc. et procédons à la fusion des deux pays en question. Il est obligé qu'après cette opération le paramètre K soit le double de ce qu'il était dans chaque pays et que le paramètre L soit identique à ce qu'il était dans chacun des pays.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 126, n° 4, 1985.

Divers facteurs peuvent faire évoluer les paramètres L et K indépendamment l'un de l'autre : nous venons de montrer comment K peut varier sans que L augmente (accroissement de population, par exemple). Nous savons par certains exemples pratiques que L peut augmenter ou diminuer indépendamment de K : la généralisation des paiements par chèque bancaire et carte de crédit provoque un abaissement de L, le paiement des petits montants n'étant pas touché par cette évolution. Une élévation de L peut être provoquée par une thésaurisation accrue des grosses coupures. Lors des graves perturbations monétaires que nous avons connues il y a une quinzaine d'années, des achats importants de francs suisses furent faits aussi bien par les nationaux que par toutes catégories d'entités étrangères. Les autorités réagirent en plafonnant les montants que les étrangers pouvaient détenir en compte courant et il s'ensuivit un mouvement important de billets de banque vers les coffres. Pour la Banque centrale, c'était un moindre mal car les montants thésaurisés se trouvaient retirés du circuit économique. Pour ce qui nous concerne, notons qu'au cours de l'année 1972, le paramètre L augmenta de 26 % (alors que K^2 n'augmentait que de 5 %). Nous n'avons pas constaté d'effet de ce genre en France dans la période considérée ici alors que la rumeur faisait état à certains moments de gros retraits des comptes courants. Cela peut être dû à la compensation entre plusieurs effets mais plus probablement au fait que le niveau élevé des taux d'intérêt n'a pas permis une thésaurisation qui soit significative par rapport à la circulation totale. Distinguer les uns des autres les effets des divers facteurs qui agissent sur la circulation est une affaire complexe. Nous pensons que le fait de pouvoir décrire cette circulation par deux paramètres plutôt que par une seule mesure, constitue un progrès utile vers la compréhension des causes et des effets.

Étant donné que la dimension de nos paramètres est en relation avec l'unité monétaire, il importe de voir de quelle manière les paramètres évoluent en fonction du pouvoir d'achat. Nous montrons dans l'exemple qui suit une relation entre les valeurs successives de l'indice du coût de la vie, du paramètre L et du paramètre K.

2 — Comparaisons avec l'indice des prix

Les comparaisons que nous présentons portent sur la monnaie française à fin mars des années 1981 à 1985. Le calcul des paramètres a été effectué par un algorithme qui est décrit plus loin : même si la méthode utilisée comporte un peu d'arbitraire, elle est conforme à notre hypothèse et les résultats obtenus pour les cinq années sont strictement comparables entre eux. Par ailleurs, on peut considérer que les paramètres L et K sont *a priori* indépendants l'un de l'autre (entre L, K et la circulation totale, il y a deux variables indépendantes). Le tableau 1 indique pour les cinq années les valeurs de l'indice du coût de la vie, de K, de L, et du paramètre sans dimension $N = K/\sqrt{L}$.

TABLEAU 1

Année	Indice du coût de la vie mois de mars	Paramètres de la circulation à fin mars		
		K ($10^9\sqrt{\text{francs}}$)	L (francs)	$N = K/\sqrt{L}$ (10^6)
1981	272,3	1,40	11 400	13,0
1982	310,8	1,48	12 700	13,1
1983	338,7	1,55	14 300	13,0
1984	368,0*	1,60	15 300	12,9
1985	391,7*	1,64	16 200	12,9

* Nouvel indice corrigé par facteur moyen 2,514.

Une régression linéaire sur les logarithmes des valeurs du paramètre L rapportés aux logarithmes des valeurs de l'indice des prix donne une pente de 0,99 et un coefficient de corrélation de 0,99. Une régression portant sur le logarithme K par rapport au demi-logarithme de l'indice des prix fait apparaître une pente de 0,88 et un coefficient de corrélation de 1,00. Ces résultats doivent être interprétés avec réserve. On peut penser en particulier que la très bonne corrélation est due essentiellement à la relative brièveté de la période ainsi qu'à l'inertie du phénomène considéré. Nous pensons par contre qu'on peut considérer comme significatif le fait que pendant cette période la limite supérieure L du spectre monétaire soit restée proportionnelle à l'indice. Quant au fait que K ait été proportionnel à la racine carrée de l'indice élevée à la puissance 0,9, nous estimons probable sans pouvoir l'affirmer, que K^2 a été influencé de façon directement proportionnelle par la hausse des prix, mais a par ailleurs subi une influence dépressive, peut-être due à une légère baisse du niveau de vie global; cela signifierait qu'en 4 ans une baisse de K de l'ordre de 2 % s'est superposée à l'influence de l'indice. *Il n'est pas audacieux de dire que les comparaisons effectuées ci-dessus permettent de confirmer l'existence matérielle des paramètres de notre hypothèse de travail ainsi que la dimension physique de ces paramètres.*

3 — Circulations normalisées

Dans la distribution des billets de banque et des pièces d'un pays quel qu'il soit, *tout bouge :* certains facteurs économiques font évoluer l'ensemble de la circulation ou, indépendamment l'un de l'autre, les deux paramètres principaux que nous avons définis. Dans le même temps, d'autres facteurs font évoluer la circulation d'une coupure par rapport aux autres. Les plus importants de ces derniers facteurs sont l'émission de coupures nouvelles dont la circulation se développe graduellement, et inversement la désaffection du public pour un billet de banque de faible pouvoir d'achat. De très nombreux autres facteurs interviennent en fait, qu'ils soient de nature physique, psychologique ou économique et le rapport des circulations de deux coupures quelconques n'est jamais une constante, ce qui explique pourquoi il est si difficile de percevoir les règles générales qui gouvernent les circulations. Cela montre aussi tout l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer de *circulations normalisées* auxquelles les circulations effectives peuvent être comparées. Le calcul des paramètres de la distribution L et K nous a amené à définir un algorithme (décrit au paragraphe suivant) qui calcule une telle distribution normalisée. D'une part, cette distribution répond de façon exacte à la formule de notre hypothèse de travail et d'autre part, la distribution réelle peut en être déduite par un volume minimal de glissements de circulation d'une coupure sur une autre, toujours plus petite.

L'Autorité française a procédé ces dernières années à l'introduction de coupures nouvelles situées entre des coupures existantes, les 2, 20 et 200. De telles introductions sont relativement rares mais ont aussi été faites récemment en Italie et en 1956 en Suisse quand un billet de 10 fut introduit entre des 5 et 20 préexistants. De telles opérations sont l'occasion de montrer l'utilité de la distribution normalisée. On se rappellera que notre hypothèse prévoit que la circulation normale d'une coupure de 2 est proportionnelle à $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ et celle d'une pièce de 1 à $(\sqrt{2}-\sqrt{1})$. A la veille de l'introduction de la pièce de 2, sa circulation réelle est encore nulle et elle est intégralement représentée par des pièces de 1 excédentaires. Toutefois, en termes de distribution normalisée, le rapport de la circulation des 2 à celle des 1 est $(\sqrt{5}-\sqrt{2})/(\sqrt{2}-\sqrt{1})$ soit 1,98. Nous disposons donc d'une mesure précise, bien qu'arbitraire, pour mesurer le progrès de la circulation des nouvelles coupures. Sans entrer dans plus de détail, nous montrons dans le tableau 2 l'évolution des circulations de 1, 2, 10 et 20 francs en % des circulations normalisées.

On se rappellera [5] que les coupures proches du haut de la gamme présentent toujours une circulation si élevée qu'elle peut paraître anormale; c'est que non seulement la plus haute mais souvent une ou deux autres coupures sont utilisées comme coupure de réserve pour ce que nous avons appelé la thésaurisation courante. Notre calcul de la circulation normalisée est effectué en supposant que toutes les coupures ne sont que des coupures de fonction sauf la plus haute, seule à laquelle le calcul attribue le rôle de coupure de réserve. En réalité, elle n'est pas la seule à assumer ce rôle que nous avons aussi appelé « coupure-plafond ». Le tableau 3 montre quelles ont été les quotes-parts du plafonnement par les coupures de 100, 200 et 500 au cours de ces dernières années.

TABLEAU 2

Circulations réelles rapportées aux circulations normalisées à fin mars de chaque année

	1.—	2 —	10 —	20.—
1981	251	30	104*	
1982	236	38	285	21
1983	228	41	270	25
1984	220	45	268	25
1985	215	47	274	25

* Ce chiffre est calculé sans tenir compte de l'existence (potentielle) des 20, sans quoi on lirait 310.

Ce tableau montre l'évolution de la circulation des nouvelles coupures par rapport à l'ensemble Les chiffres indiquent les circulations réelles exprimées en % des circulations normalisées correspondantes. On constate que la circulation des 2 continue à croître plus que l'ensemble de la circulation, ce qui n'est pas le cas des 20.

TABLEAU 3

Plafonnement de la circulation par les plus grosses coupures (% de la circulation)

	50.—	100.—	200.—	500.—
1981	1	53		46
1982	0	53		47
1983	0	49	2	49
1984	0	40	10	50
1985	0	35	14	52

Nous nous représentons que les utilisateurs n'emploient pas tous ou pas toujours la gamme complète des coupures; il en résulte des accumulations sur plusieurs des coupures supérieures qui sont utilisées pour la thésaurisation courante. 52 % de la circulation atteint actuellement 500 ce qui implique une partie de la circulation des 200 comme coupure de fonction. Cette dernière coupure est utilisée aussi pour la thésaurisation et 14 % de la circulation s'y arrête. Le rôle de la coupure de 100, dominant il y a quelques années, est maintenant moindre et sa circulation a baissé même en valeur absolue. Elle fait néanmoins encore fonction de coupure plafond pour le tiers de la circulation

4 — Calcul des paramètres et des circulations normalisées

Pour calculer les circulations normalisées, c'est-à-dire celles qui correspondent exactement à la formule de notre hypothèse de travail tout en se rapprochant le plus possible des circulations réelles, on pourrait utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver la valeur du paramètre K qui permet le mieux de rapprocher les valeurs calculées de la réalité. Il faudrait effectuer ces calculs sur les logarithmes des circulations car il y a une trop grande différence d'ordre de grandeur entre les circulations des petites et des grandes coupures.

Nous avons toutefois choisi une approche tout à fait différente. Nous postulons en effet que « tout montant potentiel de circulation qui ne se sera pas matérialisé dans une coupure se reportera nécessairement sur une ou plusieurs coupures de nominal plus faible ». Nous voulons donc un algorithme qui respecte ce postulat. Cela veut dire que la circulation réelle doit pouvoir être déduite de la circulation normalisée par des reports de circulation vers des coupures plus petites ou encore que les circulations normalisées doivent pouvoir être liées aux circulations réelles par des reports de circulation vers des coupures plus hautes.

Nous appellerons « distribution normale » n'importe quel ensemble de circulations calculées selon la formule de notre hypothèse pour les coupures existantes et pour une valeur quelconque du paramètre K. Nous appellerons « distribution normalisée » celle des distributions normales qui se rapproche le plus de la distribution réelle. Le tableau 4 qui montre pour 1985 les circulations réelles, les circulations normalisées et les reports des unes sur les autres permettra de mieux comprendre l'explication. Avec ces conventions, l'algorithme d'approche peut être décrit comme suit :

1. Calculer les circulations normales M_j pour une valeur de K qui est certainement au-dessus de la réalité et les comparer à celles de la distribution réelle.

2. Si la circulation réelle d'une coupure est plus élevée que la circulation normale, l'excédent de circulation réelle est reporté sur la circulation réelle de la coupure supérieure voisine.

3. Le paramètre K est alors abaissé dans une certaine proportion; on refait les opérations 1) et 2) jusqu'à ce qu'on atteigne une valeur de K pour laquelle tous les montants de la distribution normale sont inférieurs aux montants de la distribution réelle, tous reports effectués. K sera alors plus petit que la valeur cherchée.

4. On revient alors à la valeur de K utilisée juste avant le dépassement; on reprend une série de réductions plus petites jusqu'à ce qu'il y ait à nouveau dépassement, etc. En pratique, nous réduisons la valeur de K par paliers de 10 %, puis de 1 %, enfin de 0,1 %.

Il faut préciser que ce processus d'ajustement ne concerne pas la plus haute coupure dont on ne peut calculer la circulation puisqu'à ce stade le paramètre L n'est pas encore connu. Une fois que l'approche de K est parfaite, on dispose d'une distribution « normalisée » ayant donné lieu au *minimum possible de déplacements de circulation vers une coupure plus élevée.*

Il faut prendre une précaution parce que les plus petites coupures ont souvent des circulations anormalement basses. Si nous faisions débuter les opérations d'ajustement en nous appuyant sur une coupure qui commence à tomber en désuétude, notre algorithme ajusterait la valeur de K sur un chiffre

TABLEAU 4

Circulation des différentes coupures (en milliards de francs) à fin mars 1985

Coupures	1	2	5	10	20	50	100	200	500
Circulations réelles	1,46	0,638	1,45	5,87	1,05	5,16	70,6	32,2	88,3
Additions		+ 0,781	+ 0,069		+ 3,72	+ 0,51	+ 0,87	+ 64,7	+ 83,4
Reports	− 0,781	− 0,069		− 3,72	− 0,51	− 0,87	− 64,7	− 83,4	
Circulations normalisées (*)	0,679	1,35	1,52	2,15	4,26	4,80	6,79	13,5	172

(*) K = 1,64 GF

Le tableau indique tous les reports nécessaires pour passer des circulations réelles aux circulations normalisées. Par la force des choses, un seul report est nul mais plusieurs sont insignifiants en termes relatifs Dans la distribution normalisée, la coupure de 500 est seule à assumer le rôle de coupure plafond ou coupure de thésaurisation courante, c'est ce qui motive les deux gros reports en haut de la gamme.

trop bas. Il importe donc d'éliminer quelques coupures du bas de la gamme avant de commencer l'opération. L'expérience obtenue par essais successifs est la meilleure base possible. Pour la présente étude, nous avons utilisé systématiquement la coupure de 1 franc comme point d'appui inférieur.

Une fois déterminée la valeur de K, on connaît aussi la circulation normalisée de $C_{\max}$, la plus haute coupure. La valeur de L est alors fixée par la formule

$$\text{circulation de } C_{\max} = K\,(\sqrt{L}-\sqrt{C_{\max}})$$

5 — Une autre approche

Le Pr E. Caianiello, de l'université de Salerne, considère [4] que l'ensemble des pièces et des billets constitue l'exemple le plus simple de « système hiérarchique autoréglé »; le système est « modulaire » si le rapport de deux coupures successives est une constante. On peut calculer dans ce cas que les montants se répartissent proportionnellement à la racine carrée des coupures si on postule que la valeur moyenne des éléments du système ne doit pas changer quand il subit certaines transformations (telles que de rajouter un niveau intermédiaire entre chaque niveau existant). Le caractère algébrique de cette approche a de grands avantages. Espérons qu'elle puisse être étendue aux systèmes imparfaitement modulaires que nous connaissons en réalité. Pour un système « modulaire », le résultat obtenu est identique à la formule de notre hypothèse.

Bibliographie

[1] J. C. Hentsch. — La circulation des coupures qui constituent une monnaie, *Journal de la Société de statistique de Paris,* n° 4, 1973.

[2] J. C. Hentsch. — Calcul d'un critère qualitatif pour les séries de valeurs définissant l'échelonnement des signes monétaires, *Journal de la Société de statistique de Paris,* n° 4, 1975.

[3] L.C. Payne and H.M. Morgan. — UK Currency needs in the 1980's, The Banker, April 1981.

[4] E.R. Caianiello, G. Scarpetta and G. Simoncelli. — A systemic study of monetary systems, International Journal General Systems, 1982, Vol. 8, pp. 81 92.

[5] J. C. Hentsch. — Distribution de la monnaie fiduciaire entre les coupures qui la représentent, *Journal de la Société statistique de Paris,* n° 4, 1983.

[6] J.S. Cramer. — Currency by denominations, University of Amsterdam, Actuarial Science and Econometrics, Report AE 10/83.