

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

P. VINCENSINI

**Sur les congruences stratifiables**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 13 (1934), p. 419-449.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1934\\_9\\_13\\_419\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13_419_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les congruences stratifiables :*

PAR P. VINCENSINI.

**Introduction.**

Les couples de congruences stratifiables, dont la notion relativement récente est due à M. G. Fubini (<sup>1</sup>), ont fait l'objet d'études approfondies de la part d'un certain nombre de géomètres, et plus particulièrement de MM. G. Fubini et S. Finikoff (<sup>2</sup>).

Deux congruences  $K$  et  $K'$  sont *stratifiables dans un sens* (ou forment un couple simplement stratifiable), si l'on peut établir entre leurs rayons une correspondance biunivoque telle que les  $\alpha'$  plans passant par un rayon quelconque de  $K'$  puissent recevoir, lorsque le rayon varie, une variation au cours de laquelle chacun d'eux enveloppe une surface ( $\Sigma$ ), le point caractéristique étant situé sur le rayon correspondant de  $K$ .

Les congruences  $K$  et  $K'$  sont *doublement stratifiables* (forment un couple stratifiable), si l'on peut intervertir les rôles de  $K$  et  $K'$  dans la définition ci-dessus.

Dans le Mémoire cité, M. Finikoff étudie d'une façon générale les propriétés des congruences doublement stratifiables, et le cas où les

(<sup>1</sup>) G. FUBINI, *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R* (Annali di Matematica pura ed applicata, série IV, t. I, 1921, p. 241-257).

(<sup>2</sup>) S. FINIKOFF, *Sur les congruences stratifiables* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 53, 1929, p. 313).

développables se correspondent dans deux congruences associées lui permet d'énoncer un grand nombre de résultats très remarquables.

Dans le Mémoire actuel, j'envisage surtout les couples de congruences  $K$  et  $K'$  *simplement stratifiables* : les plans passant par un rayon de  $K$  enveloppent  $\infty^1$  surfaces  $(\Sigma)$ , les points de contact étant situés sur le rayon correspondant de  $K$ .

On sait que, quelle que soit la congruence  $K$ , il existe une infinité de congruences  $K'$  formant avec  $K$  un couple simplement stratifiable.

La détermination de  $K'$  se ramène à l'intégration d'un système de trois équations aux dérivées partielles linéaires à quatre fonctions inconnues [équations (1) du paragraphe I].

On peut se donner arbitrairement l'une de ces fonctions et attribuer des valeurs arbitraires aux trois fonctions restantes pour  $u = z(v)$ ;  $a$  et  $c$  sont les deux paramètres fixant un couple quelconque de rayons associés dans  $K$  et  $K'$  et  $z$  est une fonction fixe arbitraire.

La grande généralité de la solution du problème peut laisser prévoir la possibilité de grouper les différentes congruences  $K'$  simplement stratifiables avec une congruence  $K$  arbitrairement donnée, en familles telles que l'on puisse, avec les rayons homologues d'une même famille, former des configurations géométriques variées.

La présente recherche traite des deux configurations les plus simples au point de vue projectif.

Envisageons les rayons des différentes congruences  $K'$  simplement stratifiables avec  $K$ , homologues d'un rayon déterminé de  $K$ . Il en existe une infinité qui sont dans un plan  $(\pi)$ . Lorsque le rayon envisagé dans  $K$  varie, les rayons homologues cessent d'être coplanaires. Je cherche à assembler les congruences  $K$  en familles telles que les rayons homologues des congruences d'une même famille soient constamment dans le même plan. La chose est possible si l'on choisit pour plan  $(\pi)$  le plan tangent à l'une quelconque des surfaces  $(\Sigma)$  enveloppées par les plans issus du rayon générateur de l'une quelconque des congruences  $K'$  simplement stratifiables avec  $K$ .

J'étudie ensuite un problème plus particulier et je recherche, parmi les congruences simplement stratifiables avec  $K$ , à rayons homologues coplanaires, dont il vient d'être question, celles qui jouissent de la propriété suivante : les rayons homologues situés dans un même

plan  $(\pi)$  restent constamment concourants en un point  $\omega$  de  $(\pi)$  lorsque  $(\pi)$  se déplace.

La solution de ce nouveau problème dépend d'une certaine équation aux dérivées partielles du deuxième ordre.

J'examine le cas où la congruence  $K$  est conjuguée à la surface  $(\Sigma)$  enveloppe des plans  $(\pi)$ . La considération des congruences  $K'$  à rayons homologues concourants dans  $(\pi)$  fournit sans effort une infinité de nouveaux couples de congruences stratifiables, transformés du couple de départ. L'étude de ces couples transformés permet d'obtenir autant de solutions que l'on veut du problème suivant :

*Déterminer les couples de réseaux tels que les tangentes aux courbes des deux réseaux se correspondent deux à deux dans une liaison de simple stratifiabilité.*

Le Mémoire cité de M. Finikoff contient des exemples de pareilles transformations de couples stratifiables. Ces exemples intéressent surtout le cas où le couple de départ est doublement stratifiable et conjugué.

La transformation que j'indique dans le Mémoire actuel s'applique au cas, plus général, d'un couple conjugué simplement stratifiable.

Je termine par l'examen du cas particulier où le couple de congruences  $(KK')$  est doublement stratifiable conjugué et harmonique, et je signale certaines configurations formées de quadruples conjugués doublement stratifiables, ou de tétraèdres dont les trois couples d'arêtes opposées décrivent des congruences doublement stratifiables conjuguées et harmoniques.

#### I. — Formules relatives aux couples de congruences simplement stratifiables.

Dans ce paragraphe, j'établis, d'après M. Finikoff (*Mémoire cité*), les formules fondamentales relatives aux couples de congruences simplement stratifiables dont il sera fait usage dans la suite.

La congruence  $(K)$  étant supposée rapportée à ses développables

[ $v = \text{const.}$ ,  $u = \text{const.}$ ], désignons par  $(x)$  et  $(y)$  les foyers du rayon  $(u, v)$ <sup>(1)</sup>.

On a les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} x_u = \varphi v \\ y_v = \tau x \end{cases} \quad \left( x_u = \frac{dx}{du}, \quad y_v = \frac{dy}{dv} \right),$$

où  $\varphi$  et  $\tau$  sont des fonctions des paramètres  $u$  et  $v$ .

La congruence  $(K')$ , formant avec  $(K)$  un couple simplement stratifiable, sera définie par les deux points  $(X)$  et  $(Y)$ , où l'un quelconque de ses rayons coupe les plans focaux correspondants du rayon homologue de la congruence  $(K)$ , plans qui sont définis par les points  $(x, y, x_u)$  et  $(x, y, y_v)$ .

Les coordonnées  $(X)$  et  $(Y)$  n'étant définies qu'à des facteurs communs près, nous pouvons poser

$$(2) \quad \begin{cases} X = p x + q y + x_u \\ Y = q_1 x + p_1 y + y_v \end{cases}$$

soit, en résolvant par rapport à  $x$  et  $y_u$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} x = X - p x - q y \\ y_u = Y - q_1 x - p_1 y \end{cases}$$

Soit  $(\pi)$  un plan issu du rayon  $(u, v)$  de  $(K)$ ; si  $(x + \lambda y)$  est le point où  $(\pi)$  coupe le rayon  $(u, v)$  de  $(K)$ , l'équation du plan est

$$(4) \quad (z, X, Y, x + \lambda y) = 0,$$

où le premier membre représente un déterminant dont les quatre lignes s'obtiennent en affectant les lettres, successivement, des indices 1, 2, 3, 4.  $z_i$  sont les coordonnées courantes du plan  $(\pi)$ .

Le point caractéristique du plan  $(\pi)$ , lorsque  $u$  et  $v$  varient, est déterminé par les trois équations

$$(5) \quad \begin{cases} (z, X, Y, x + \lambda y) = 0, \\ (z, X, Y, x + \lambda y)_u = 0, \\ (z, X, Y, x + \lambda y)_v = 0. \end{cases}$$

(1)  $(x)$  désigne les quatre coordonnées homogènes du point  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , et chaque équation, écrite pour  $x$ , en représente quatre.

Si  $(\pi)$  est l'un des plans qu'il faut associer au rayon  $(u, v)$  de  $\mathbf{K}$  pour que, conformément à la définition de la stratifiabilité, le point caractéristique du plan soit sur le rayon  $(x, y)$  de  $\mathbf{K}$ , on pourra poser,  $(Z)$  désignant le point caractéristique,

$$Z = x + \lambda y.$$

On exprimera que le couple  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  est simplement stratifiable, en écrivant que l'on peut déterminer une fonction  $\lambda(u, v)$  dépendant d'une constante arbitraire et vérifiant identiquement le système  $(\alpha)$ .

On trouve sans peine que  $\lambda$  doit satisfaire au système

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_u = -q_1 \lambda^2 - p_1 \lambda - z_1, \\ \lambda_v = -\sigma \lambda^2 - p \lambda - q. \end{cases}$$

Chaque solution des équations (3) donne une surface  $(\Sigma)$  enveloppée par le plan  $(\pi)$  [le point de contact étant sur  $(x, y)$ ], et pour que  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$  soient en liaison de stratifiabilité, il faut et il suffit qu'il existe  $\infty^1$  surfaces  $(\Sigma)$ .

Cela a lieu si la condition d'intégrabilité du système (3) est vérifiée identiquement.

En exprimant qu'il en est ainsi, on est conduit au système

$$(4) \quad \begin{cases} p_u - p_1 v = 2q q_1 - 2z \sigma, \\ q_u = p_1 q - p \sigma - z_1, \\ q_{1v} - p q_1 = p_1 \sigma - z_{1v}. \end{cases}$$

Toute solution  $(p, p_1, q, q_1)$  du système (4) définit, par ses coordonnées linéaires relatives au tétraèdre de sommets  $(x), (y), (x_1), (y_1)$ , le rayon générateur  $(X, Y)$  d'une congruence  $\mathbf{K}'$  formant avec  $\mathbf{K}$  un couple simplement stratifiable.

On voit quel est le degré de généralité de la solution. La congruence  $\mathbf{K}$  est arbitraire, et pour déterminer  $\mathbf{K}'$  on peut se donner *arbitrairement* l'une des quatre fonctions inconnues  $(p, p_1, q, q_1)$ ,  $p$  par exemple, puis attribuer aux trois fonctions restantes des valeurs arbitraires pour  $u = z(v)$ ,  $z(v)$  étant une fonction arbitrairement choisie.

Pour procéder à une étude approfondie des couples de congruences

stratifiables, il convient de connaître aussi les formules donnant les dérivées partielles de  $X$  et  $Y$ .

En calculant de deux façons différentes les dérivées secondes  $x_{uv}$  et  $y_{uv}$ , au moyen des équations (1) et (2), on trouve

$$(5) \quad \begin{cases} X_u = M_x - N_y - qY, \\ Y_v = N_x - M_y - q_1X, \end{cases}$$

avec

$$(6) \quad \begin{cases} M = p_u - q q_1 - \rho\sigma, \\ N = q_u - p_1 q - \rho_1 \rho - \rho_1 \sigma, \\ M_1 = p_{1v} - q q_1 - \rho\sigma, \\ N_1 = q_{1v} - p q_1 - \rho_1 \rho - \rho_1 \sigma. \end{cases}$$

Si les congruences  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$  sont en liaison de stratifiabilité, on déduit du système (4)

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad M - M_1 = 0,$$

de sorte que les formules (5) prennent la forme

$$(5') \quad \begin{cases} X_u = -M_x - qY, \\ Y_v = -M_y - q_1X. \end{cases}$$

Il reste à exprimer  $X_v$ ,  $Y_u$ . Nous écrirons, en introduisant huit nouvelles fonctions,

$$(7) \quad \begin{cases} X_v = -PX - QY - R_x - S_1, \\ Y_u = -QX - PY - S_1x - R_1y. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité des équations (5) et (7) sont :

$$(8) \quad \begin{cases} P_u = -QQ_1 - q q_1 - M, \\ P_{1v} = -QQ_1 - q q_1 - M_1, \\ Q_u = -P_1Q - Pq - q_1 - S, \\ Q_{1v} = -PQ_1 - P_1q_1 - q_{1v} - S_1, \\ R_u = -M_x - M_1(P - p) - QS_1 - S q_1 - N\sigma - N_1q, \\ R_{1v} = -M_{1x} - M_1(P_1 - p_1) - Q_1S - S q_1 - N_1\rho - N_1q_1, \\ S_u = -QR_1 - S p_1 - R_1\rho - M - M_1q - PX - X_v, \\ S_{1v} = -Q_1R - S_1p - R_1\sigma - (M_1 - M)q_1 - P_1X_1 - X_{1v}. \end{cases}$$

Pour le couple stratifiable dans un sens, on doit tenir compte

de ce que

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad M + M_1 = 0.$$

Moyennant ces hypothèses particulières, on a, pour un tel couple, le tableau de dérivées suivant :

$$(I) \begin{cases} x_x = -2y, & x_y = -X - px - qy, \\ y_x = -Y - q_1x - p_1y, & y_y = -\pi x, \\ X_x = -qY - Mx, & X_y = -PX - QY - Rx - Sx, \\ Y_x = -Q_1X - P_1Y - S_1x - R_1y, & Y_y = -q_1X - M_1. \end{cases}$$

Telles sont les formules fondamentales qui sont à la base du Mémoire de M. Finikoff.

M. Finikoff applique ces formules à l'étude du cas, particulièrement intéressant, où les congruences  $K$  sont conjuguées aux surfaces  $(\Sigma)$ .

J'aurai moi-même à envisager, d'un point de vue nouveau, les couples de congruences pour lesquels la condition ci-dessus est remplie. Je résume donc les résultats de M. Finikoff.

La forme quadratique fondamentale de la surface  $\Sigma(Z)$  est proportionnelle au déterminant

$$(Z, Z_x, Z_y, Z^2Z).$$

Un calcul simple montre que le déterminant précédent est proportionnel à la forme

$$(9) \quad \lambda(S_1 - R_1)du^2 + \alpha M_1 du dv + (\lambda R - S_1)dv^2.$$

Pour que la congruence  $K$  soit conjuguée à la surface  $(\Sigma)$ , il faut et il suffit que les lignes coordonnées forment sur  $(\Sigma)$  un réseau conjugué, ce qui se traduit par la condition

$$M = 0.$$

Le tableau (I) montre alors que

$$X_x = qY, \quad Y_y = q_1X.$$

Ces équations prouvent que les foyers du rayon  $(X, Y)$  de  $K'$  qui correspondent aux développables  $v = \text{const.}$ , et  $u = \text{const.}$  sont précisément les points  $X$  et  $Y$ . D'où ce résultat dû à M. Fubini (*loc. cit.*):



Si la congruence  $K$  d'un couple simplement stratifiable est conjuguée aux surfaces enveloppées  $(\Sigma)$ , la congruence  $K'$  est harmonique à  $(\Sigma)$ .

Les foyers du rayon de la congruence  $K'$  d'un couple de congruences  $(K, K')$  conjugué et harmonique aux surfaces enveloppées  $(\Sigma)$  sont dans les plans focaux de  $K$ .

On démontre d'ailleurs que, réciproquement (G. Fubini, *loc. cit.*), si les foyers d'une congruence sont situés dans les plans focaux homologues d'une autre congruence et si les développables se correspondent, les deux congruences sont en liaison de stratifiabilité (conjuguées et harmoniques).

Les congruences  $K'$  de l'espèce qui vient d'être signalée [formant avec  $K$  un couple stratifiable dans un sens, conjugué et harmonique aux surfaces enveloppées  $(\Sigma)$ ], s'obtiennent au moyen du système

$$(10) \quad \begin{cases} p_1 = p_1' + q_1 p_2' - q_2' \\ q_1 = p_2' q_2 - p_1' q_1' \\ q_2 = p_1' q_2' - p_2' q_1' \end{cases}$$

La congruence  $K$  est arbitraire. Il existe une infinité de congruences associées  $K'$ . Une congruence  $K'$  est entièrement déterminée si on lui impose la condition de contenir une surface gauche (arbitrairement donnée) correspondant à une surface gauche choisie dans  $K$ .

## II. — Congruences simplement stratifiables avec une congruence donnée, à rayons homologues coplanaires.

Envisageons une congruence quelconque  $K'$  simplement stratifiable avec  $K$ . Soit  $(X, Y)$  le rayon de  $K'$  correspondant au rayon  $(x, y)$  de  $K$ .  $X$  et  $Y$  sont, comme il a été expliqué au paragraphe précédent, les points où le rayon  $(X, Y)$  perce les plans focaux de  $K$  issus de  $(x, y)$ . Ces points sont définis par les formules (2) où  $p, q, p_1, q_1$  vérifient le système (4).

Moyennant (4) les équations (2) définissent  $x'$  valeurs pour  $\lambda$ . Adoptons l'une de ces valeurs et conservons-la dans la suite; nous



Le rayon  $(u, v)$  de  $\Theta$  sera dans  $(\pi)$ , si

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = X - mZ, \\ \tau = Y - nZ, \end{cases}$$

$m$  et  $n$  étant des fonctions à déterminer des deux variables  $u$  et  $v$ .

Remplaçant dans (12)  $\xi$  et  $\tau$  par leurs expressions (11),  $X$  et  $Y$  par leurs expressions (2), et  $Z$  par  $x + \lambda_2 y$ ,  $\lambda$  étant la fonction adoptée pour définir  $(\Sigma)$ , nous obtenons les deux équations

$$\begin{aligned} p'x + q'y &= (p - m)x - (q - m\lambda)y, \\ q'_1x + p'_1y &= (q_1 - n)x - (p_1 - n\lambda)y. \end{aligned}$$

Ces deux équations devant avoir lieu pour les quatre indices, nous aurons

$$(13) \quad \begin{cases} p' = p - m, & p'_1 = p_1 - n\lambda, \\ q' = q - m\lambda, & q'_1 = q_1 - n. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer que la congruence  $\Theta$  est simplement stratifiable avec  $\mathbf{k}$ .

La condition de stratifiabilité se traduit par le système suivant, analogue au système (4) du paragraphe I :

$$(14) \quad \begin{cases} p'_2 + p'_3 = \lambda q' q'_1 - \lambda_2 \tau, \\ q'_2 = p'_1 q' - p' \tau - \tau_1, \\ q'_3 = p' q'_1 - p'_1 \tau - \tau_2. \end{cases}$$

Récrivons le système (14) en y remplaçant  $p', p'_1, q', q'_1$  par leurs expressions (13). Nous obtenons, en tenant compte des équations (14) elles-mêmes,

$$(14') \quad \begin{cases} m_2 - n_2 \lambda - n \lambda_2 = \lambda q n - \lambda m \lambda q_1 - \lambda m n \lambda, \\ m_2 \lambda - m \lambda_2 = p_1 m \lambda - n \lambda q - m n \lambda^2 - m \tau, \\ n_2 = p n - m q_1 - m n - n \lambda \tau. \end{cases}$$

Si maintenant on tient compte des expressions (3) de  $\lambda_u$  et  $\lambda_v$ , on constate, après un calcul facile, que le système (14') peut s'écrire

$$\begin{aligned} m_2 &= m q_1 \lambda - n q - m n \lambda, \\ \lambda m_2 &= \lambda_1 m q_1 \lambda - n q - m n \lambda_1, \\ n_2 &= p n - m q_1 - m n - n \lambda \tau. \end{aligned}$$

et se réduit par suite au système des deux équations suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} m_x = mq_1\lambda - nq - m\lambda, \\ n_x = pn - mq_2 - mn - n\lambda. \end{cases}$$

Si les deux fonctions  $m$  et  $n$  vérifient le système (15), les équations (11), où  $p', p_1, q', q_1$  ont les expressions (13), définissent une congruence  $\Theta$ , simplement stratifiable avec  $K$ , dont le rayon  $(u, v)$  est, comme le rayon homologue de  $K$ , constamment situé dans le plan tangent correspondant  $(z)$  à  $(\Sigma)$ .

Le rayon générateur de  $\Theta$  est défini par les deux points :

$$(16) \quad \begin{cases} z = (p - m)x + (q - n\lambda)y - c, \\ x_1 = (q_1 - n)x + (p_1 - n\lambda)y - y_2. \end{cases}$$

On voit quel est le degré de généralité de la solution obtenue. On peut attribuer aux fonctions  $m$  et  $n$  solutions de (15) des valeurs arbitraires pour  $u = z(v)$ ,  $z$  étant une fonction arbitrairement choisie.

On est parti d'une congruence  $K$  déterminée [ $p, q, p_1, q_1$  fonctions déterminées vérifiant (1)], et l'on a adopté une valeur déterminée pour  $\lambda$ . En faisant varier ces éléments, on a le résultat suivant :

Les différentes congruences, formant avec une congruence arbitraire  $K$  un couple simplement stratifiable, peuvent être groupées en une infinité de familles telles que *les rayons homologues d'une même famille (correspondant à un même rayon  $r$  de  $K$ ) restent constamment dans le même plan lorsque  $r$  décrit  $K$ , le plan correspondant à chaque famille enveloppant l'une des surfaces  $(\Sigma)$  associées à  $K$ .*

**III. — Recherche des congruences  $\Theta$  simplement stratifiables avec  $K$ , à rayons homologues coplanaires et concourants.  
— Surfaces associées à un couple.**

Nous nous proposons maintenant de rechercher, parmi les congruences  $\Theta$  simplement stratifiables avec  $K$  appartenant à une même famille, celles qui jouissent de la propriété supplémentaire d'avoir leurs rayons homologues concourants.

( $\Sigma$ ) étant la surface enveloppée servant à définir la famille  $\Theta$ , les congruences ( $\Gamma$ ) cherchées, si elles existent, constituent une ou plusieurs familles incluses dans la famille  $\Theta$ , telles que tout plan tangent ( $\tau$ ) à ( $\Sigma$ ) coupe les différentes congruences ( $\Gamma$ ) d'une même famille suivant des faisceaux de rayons homologues concourants.

Notons que l'existence des familles ( $\Gamma$ ) n'est nullement assurée *a priori*.

En effet,  $m$  et  $n$  satisfont déjà au système (15). Astreindre les rayons homologues d'une famille de congruences  $\Theta$  à passer constamment par un même point de leur plan, revient à imposer une condition supplémentaire aux fonctions  $m$  et  $n$ . On aura donc à exprimer qu'un certain système en  $m$  et  $n$  est complètement intégrable. Les conditions d'intégrabilité feront intervenir des relations entre  $p, p_1, q, q_1, \lambda$ , et l'on pourrait craindre soit que ces relations soient incompatibles avec celles qui expriment la stratifiabilité, soit qu'elles limitent la détermination de  $p, p_1, q, q_1$ , de sorte que certaines surfaces enveloppes ( $\Sigma$ ) puissent seules contenir des faisceaux concourants de rayons homologues.

Il est assez remarquable qu'en vertu même des conditions de stratifiabilité, le problème que nous nous posons soit possible, et d'une infinité de façons, pour une surface enveloppée ( $\Sigma$ ) *arbitrairement choisie*.

$K$  étant donnée arbitrairement, et  $K'(p, p_1, q, q_1)$  étant l'une quelconque des congruences simplement stratifiables avec  $K$ , choisissons une solution  $\lambda$  du système (3) du paragraphe I, de façon à avoir une surface enveloppée ( $\Sigma$ ) bien déterminée.

L'ensemble des congruences  $\Theta$  simplement stratifiables avec  $K$ , dont les rayons ( $u, v$ ) sont situés dans le plan tangent correspondant ( $\tau$ ) à ( $\Sigma$ ), est défini par les formules (16), où  $m$  et  $n$  vérifient les relations (15).

Prenons sur le rayon ( $XY$ ) de  $K'$  un point  $\omega$  de coordonnées ( $X - zY$ ),  $z$  étant une fonction des deux paramètres  $u$  et  $v$ , et cherchons à déterminer  $z$  de façon que lorsque  $u$  et  $v$  varient,  $\omega$  soit constamment le sommet d'un faisceau formé par les rayons homologues d'une même famille de congruences  $\Theta$ .

Le rayon générateur d'une congruence  $\Theta$ , situé dans le plan ( $\tau$ ), est défini par les deux points ( $\bar{z}$ ) et ( $z$ ) du paragraphe précédent. Ce

rayon passera constamment par le point  $\omega$  si les fonctions  $m$  et  $n$  sont telles que l'on ait

$$\lambda - zY \equiv rz_1^2 - sz_2.$$

$r$  et  $s$  étant certaines fonctions de  $u$  et de  $v$ .

En tenant compte des expressions (12) de  $\xi$  et  $\tau$ , l'équation ci-dessus s'écrit

$$(r-1)\lambda + (z_1^2 - s)Y - (rm - sn)Z \equiv 0.$$

Cette équation doit avoir lieu pour les quatre indices: on en déduit

$$r=1, \quad s=-z_1, \quad m-zn=0.$$

Il faut donc, pour que le problème posé soit possible, que l'on puisse déterminer les fonctions  $m$  et  $n$  avec une constante arbitraire, de façon que leur rapport soit une fonction fixe  $z(u, v)$ .

Le sommet  $\omega$  du faisceau aura alors pour coordonnées

$$\omega \equiv \lambda - zY,$$

$z$  étant la fonction en question.

Le système à vérifier par  $m$  et  $n$  est le suivant :

$$(17) \quad \begin{cases} m_x \equiv m\gamma_1 \lambda - n\gamma_2 - mn\lambda, \\ n_x \equiv pn - m\gamma_2 - mn - n\lambda z, \\ m \equiv nz. \end{cases}$$

Les deux premières équations du système (17) sont les équations (15) qui expriment que les congruences envisagées appartiennent à la famille des congruences  $\Theta$  étudiées au paragraphe précédent.

Dans la troisième équation,  $z$  est une fonction à déterminer pour que le système admette une infinité de solutions en  $m$  et  $n$ .

Étudions les conditions d'intégrabilité du système (17).

Si l'on tient compte de la troisième équation dans les deux premières, et si l'on remplace dans la première équation  $m_x$  par  $n_x z + n z_x$ , le système peut s'écrire

$$(18) \quad \begin{cases} n_x \equiv \left( \gamma_1 \lambda + \frac{\gamma_2}{z} - \frac{z_x}{z} \right) n - \lambda n^2, \\ n_x \equiv (p - z\gamma_2 - \lambda z)n - z n^2, \\ n z \equiv n z. \end{cases}$$

Exprimons l'intégrabilité du système formé par les deux premières équations (18). En égalant les deux expressions de  $n_{,m}$ , nous obtenons après division par  $n$  <sup>(1)</sup> une équation de la forme

$$A n^2 - B n - C = 0.$$

Le calcul des coefficients donne

$$\begin{aligned} A &\equiv 0, \\ B &\equiv q - \lambda^2 \sigma - \lambda p - \lambda_{,s}, \\ C &\equiv \{p - \sigma q_s - \lambda \sigma\}_s - \left[ q_s \lambda - \frac{q}{\sigma} - \frac{\sigma_{,s}}{\sigma} \right]. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de l'expression de  $\lambda_{,s}$  fournie par la deuxième des équations (3) du paragraphe I, on voit que le coefficient B est identiquement nul, de sorte que l'unique condition d'intégrabilité du système (18) est  $C \equiv 0$ .

Développons la condition trouvée; nous obtenons une équation du deuxième ordre en  $\varphi$ , qui, compte tenu des équations (3) et (4), peut s'écrire

$$(19) \quad \varphi_{,ss} - \varphi_{,s} \varphi_{,s} - q_s \varphi^2 \varphi_{,s} - q \varphi_{,s} - q_{,ss} \varphi - (p_s - q q_s - \sigma \sigma_{,s}) \varphi^2 - q_s \varphi \equiv 0.$$

Pour toute solution  $\varphi$  de l'équation (19), le système (18) est complètement intégrable et donne  $m$  et  $n$  avec une constante arbitraire.

Les équations (16) du paragraphe II définissent alors  $\infty^1$  congruences simplement stratifiables avec K, formant une configuration telle que tout plan tangent à la surface ( $\Sigma$ ) [définie par la valeur adoptée pour  $\lambda$ ] coupe les  $\infty^1$  congruences suivant un faisceau de rayons homologues concourants.

A toute congruence K, arbitrairement choisie, on peut faire correspondre une infinité de configurations analogues. Chaque congruence K' simplement stratifiable avec K en livre une infinité dépendant des deux fonctions arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (19) et de la constante arbitraire attachée à  $\lambda$ .

Il est à noter que l'équation (19) ne contient pas  $\lambda$ . La même fonction  $\varphi$  solution de (19) sert donc à définir  $\infty^1$  configurations du type

---

<sup>(1)</sup>  $n \neq 0$ , sans quoi on aurait  $m = n = 0$  et l'on obtiendrait la congruence K'.

étudié [les plans des faisceaux de rayons homologues étant les plans tangents aux surfaces ( $\Sigma$ ) correspondant aux  $\alpha^1$  valeurs de  $\lambda$ ].

Cette dernière remarque conduit immédiatement à une autre configuration que l'on peut obtenir avec des rayons homologues de congruences simplement stratifiables avec  $K$ .

Les coordonnées du point  $\omega$  par lequel passent les rayons homologues des congruences ( $\Gamma$ ) correspondant à une fonction  $\varphi$  déterminée solution de l'équation (19) sont

$$\omega = X - \varphi Y,$$

soit, en tenant compte des expressions (2) de  $X$  et  $Y$  :

$$\omega \equiv (p_1x - q_1y - x_1) - \varphi(q_2x - p_2y - x_2).$$

Ces coordonnées ne dépendent pas de  $\lambda$ . Si donc on envisage les  $\alpha^1$  plans tangents aux différentes surfaces ( $\Sigma$ ) relatives à la congruence  $K(X, Y)$  aux points où ces surfaces coupent un même rayon  $r$  de  $K$ , le point  $\omega \equiv X - \varphi Y$ , qui est situé dans ces  $\alpha^1$  plans tangents, est le sommet de  $\alpha^1$  faisceaux de droites (chaque faisceau est situé dans l'un des plans tangents), chaque droite de l'un des faisceaux engendrant lorsque  $r$  varie une congruence simplement stratifiable avec  $K$ .

On définit ainsi  $\alpha^2$  droites concourantes, engendrant chacune, lorsque  $r$  varie, une congruence simplement stratifiable avec  $K$ , les  $\alpha^2$  rayons homologues ne cessant pas d'être concourants lorsque  $r$  varie.

En résumé, nous pouvons dire :

Il est possible de grouper les congruences simplement stratifiables avec une congruence donnée  $K$  en familles de  $\alpha^2$  congruences jouissant des propriétés suivantes :

*Les  $\alpha^2$  congruences formées par les rayons homologues de chaque famille sont formées par des droites issues d'un point  $\omega$ . A leur tour les  $\alpha^2$  congruences de chacune des familles ci-dessus peuvent être groupées en familles de  $\alpha^1$  congruences telles que les  $\alpha^1$  rayons homologues de chaque famille forment des faisceaux plans ayant pour sommets les points  $\omega$  correspondants.*

Une quelconque des familles de congruences simplement stratifiables avec  $K$  donnant lieu aux configurations qui viennent d'être indiquées,



se trouve déterminée dès que l'on a fixé une congruence particulière  $K'$  simplement stratifiable avec  $K$ , et que l'on a fait choix de la solution  $\zeta$  de l'équation du deuxième ordre (19) associée à  $K'$ .

Chaque fonction  $\zeta$  vérifiant (19) définit un point  $\omega$  sur chaque rayon de  $K'$ . L'ensemble des points  $\omega$  relatifs aux différents rayons de  $K'$  détermine une certaine surface  $\Omega_\zeta$  que nous dirons *associée* au couple  $(K, K')$ .

Chaque couple admet une infinité de surfaces associées dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument, définies par les équations

$$(20) \quad x = (p_1x' + q_1y' + r_1z') - \zeta(q_1x' + p_1y' + \lambda_1z').$$

#### IV. — Étude du cas particulier où la congruence de départ $K$ est conjuguée aux surfaces $(\Sigma)$ enveloppées.

Les considérations qui précèdent trouvent une application intéressante dans le cas où la congruence  $K$  est conjuguée aux surfaces  $(\Sigma)$  enveloppées par les plans issus des rayons de l'une des congruences  $K'$  simplement stratifiable avec  $K$ .

Envisageons plus particulièrement les configurations définies aux deux paragraphes précédents, dérivées de cette congruence  $K'$ .

Les quantités  $p, p_1, q, q_1$  sont alors liées par les équations (10) du paragraphe I que nous récrivons

$$(10) \quad \begin{cases} p_u = p_w = qq_1 - \zeta\sigma, \\ q_u = p_1q - p\zeta - \zeta_1, \\ q_w = pq_1 - p_1\zeta - \zeta_w. \end{cases}$$

On a vu au paragraphe I que les foyers des rayons de  $K'$  sont situés sur les tangentes aux courbes du réseau de  $(\Sigma)$  correspondant aux développables de  $K$ . Nous appellerons ce réseau le réseau  $(\Sigma)$ ;  $K'$  est *harmonique* au réseau  $(\Sigma)$ .

Soit  $\Theta$  l'une des congruences simplement stratifiables avec  $K$  dérivées de  $K'$  déterminées au paragraphe II, et  $(\Sigma)$  la surface enveloppée dont les plans tangents contiennent les rayons homologues de  $K'$  et

de  $\Theta$ . Parmi les  $\alpha'$  surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de  $\Theta$  figure évidemment la surface  $(\Sigma)$ .

Ainsi,  $\Theta$  est *simplement stratifiable* avec  $K$  et  $K$  est *conjugée* à l'une  $(\Sigma)$  des  $\alpha'$  surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de  $\Theta$  (donc à toutes les autres).

Il résulte alors d'un théorème de Fubini énoncé au paragraphe I que  $\Theta$  est *harmonique* au réseau  $(\Sigma)$ . Donc :

*Si  $K$  est conjugée à  $(\Sigma)$ , toutes les congruences  $\Theta$  sont harmoniques à  $(\Sigma)$ .*

La famille  $\Theta$  donne d'ailleurs la totalité des congruences harmoniques au réseau  $(\Sigma)$ .

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'au couple de congruences  $(K, K')$  on pouvait associer une famille de surfaces  $\Omega_z$ ,  $\Omega_z$  étant le lieu du point  $\omega$  du rayon  $(XY)$  de  $K'$  ( $\omega \equiv X - zY$ ),  $z$  étant une solution quelconque de l'équation (19), qui, dans le cas actuel, eu égard aux équations (10), s'écrit

$$(19) \quad z_{xx} - z_x z_{xx} - q_1 z^2 z_{xx} - q_2 z_x - q_{11} z^2 - q_2 z \equiv 0.$$

Chaque congruence  $K'$  simplement stratifiable avec  $K$  définit une famille de surfaces  $\Omega_z$ . Dans le cas actuel [ $K$  conjugée aux  $\alpha'$  surfaces  $(\Sigma)$  enveloppées par les plans issus des rayons de  $K'$ ], l'étude des surfaces  $\Omega_z$  présente un certain intérêt.

Avant d'aborder cette étude, nous avons besoin de rappeler une propriété connue des congruences harmoniques à un réseau donné.

Soit (fig. 2)  $(Z)$  un réseau quelconque admettant pour première et deuxième tangente  $(Z, R)$  et  $(Z, S)$ .

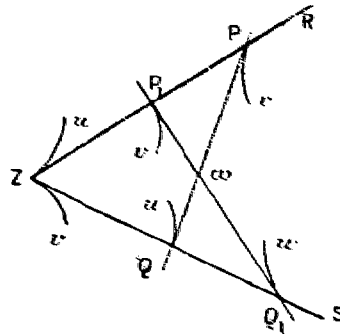
Désignons par  $(PQ)$ ,  $(P_1 Q_1)$  deux congruences quelconques harmoniques au réseau  $(Z)$ :  $P$  et  $P_1$  (deuxièmes foyers des deux congruences) sont situés sur la première tangente  $(Z, R)$  du réseau;  $Q$  et  $Q_1$  (premiers foyers) sont sur  $(Z, S)$ . Le point  $\omega$  où se coupent  $(PQ)$ ,  $(P_1 Q_1)$ , intersection des tangentes aux courbes  $c$  des réseaux  $(P)$ ,  $(P_1)$  [ou des tangentes aux courbes  $u$  des réseaux  $(Q)$ ,  $(Q_1)$ ] décrit un réseau conjugué à  $(PQ)$  et  $(P_1 Q_1)$ .

La droite d'intersection des plans tangents aux réseaux  $(P)$ ,  $(P_1)$ , passe par  $\omega$  et décrit une congruence harmonique à chacun des deux

réseaux; le point  $\omega$  est donc le premier foyer de cette congruence, et la droite en question ( $\omega T_1$ ) est la première tangente du réseau ( $\omega$ ).

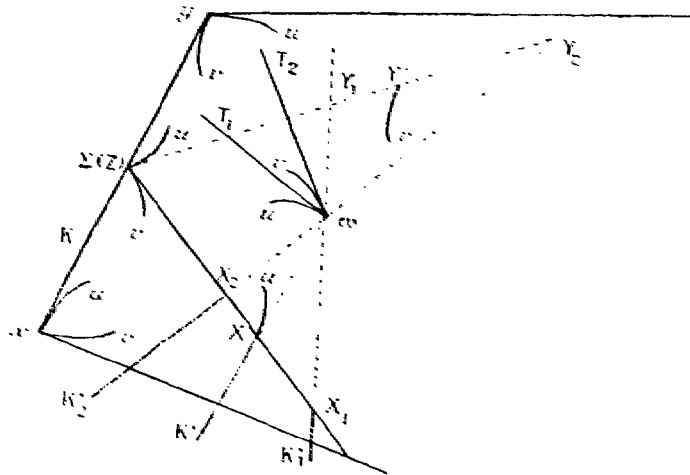
De même les plans tangents aux réseaux ( $\varphi$ ) et ( $\varphi_1$ ) se coupent suivant la deuxième tangente ( $\omega T_2$ ) du réseau ( $\omega$ ).

Fig. 2.



Cela étant, envisageons dans le plan tangent ( $X, Y, Z$ ) à l'une ( $\Sigma$ ) des surfaces enveloppées par les plans issus du rayon ( $X, Y$ ) de  $\kappa'$ , le

Fig. 3.



faisceau des rayons homologues des congruences  $\theta$  harmoniques à ( $\Sigma$ ) dont il est question plus haut, passant par le point  $\omega(X - \varphi Y)$  (fig. 3).

Soient  $K, K_1, K_2, \dots$  les rayons du faisceau. D'après la proposition qui vient d'être rappelée, les  $\infty^1$  congruences  $K, K_1, K_2, \dots$  sont conjuguées au réseau  $(\omega)$  [porté par la surface  $\Omega_z$ ]. Cette conclusion s'applique évidemment aux  $\infty^2$  congruences analogues à  $K, K_1, K_2, \dots$ , obtenues en remplaçant  $(\Sigma)$  par l'une quelconque des  $\infty^1$  autres surfaces enveloppées par les plans issus de  $(X, Y)$ .

On peut donc dire que le réseau  $(\omega)$  est conjugué à  $\infty^2$  congruences simplement stratifiables avec  $K$ , chacune de ces congruences étant harmonique aux  $\infty^1$  surfaces enveloppées correspondantes (aux réseaux portés par ces surfaces. Ainsi :

*Les congruences formant avec une congruence déterminée  $K$  un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique aux surfaces enveloppées, peuvent être groupées en familles de  $\infty^2$  congruences telles que les  $\infty^2$  congruences de chaque famille soient conjuguées à un même réseau.*

Ayant plus particulièrement égard à la congruence  $K(X, Y)$  qui a servi à définir la surface  $\Omega_z$  (le réseau  $\omega$ ) remplaçons  $\varphi$  par l'une quelconque des solutions de l'équation (19'). Nous obtenons ainsi une infinité de surfaces  $\Omega_z$  (dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument).  $K$  est conjuguée à toutes ces surfaces.

**V. — Sur une transformation des couples de congruences simplement stratifiables, conjugués et harmoniques aux surfaces enveloppées.**

Nous allons étudier d'un peu plus près les surfaces  $\Omega_z$  introduites dans les deux paragraphes qui précèdent.

Il est possible de rattacher à la considération de ces surfaces une méthode de transformation des couples de congruences simplement stratifiables conjugués et harmoniques aux surfaces enveloppées.

Un couple  $(K, K')$  étant connu, chaque solution  $\varphi$  de l'équation (19') du paragraphe IV définit deux nouveaux couples du même type. Les rayons homologues des deux couples enveloppent deux réseaux se correspondant de telle manière que les quatre tangentes aux courbes

des deux réseaux en deux points homologues quelconques fournissent deux couples simplement stratifiables conjugués et harmoniques comme le couple de départ  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$ .

On connaît des exemples particuliers de couples de réseaux se correspondant par tangentes homologues stratifiables.

Ainsi M. Finikoff, dans son Mémoire, signale que si deux congruences  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$  forment un couple conjugué doublement stratifiable, les réseaux déterminés par les développables de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$  sur deux surfaces enveloppées quelconques  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  sont dans la relation indiquée: les deux tangentes à l'un des réseaux donnent, avec les tangentes homologues de l'autre, deux nouveaux couples conjugués doublement stratifiables <sup>(1)</sup>.

Dans l'exemple ci-dessus, le couple  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  étant connu, à un réseau  $(\Sigma)$  déterminé on peut faire correspondre  $\infty^1$  réseaux  $(\Sigma')$  tels que le couple  $(\Sigma, \Sigma')$  soit stratifiable.

Dans le cas de la simple stratifiabilité, que nous allons examiner, à un réseau  $(\Sigma)$  on peut associer une infinité de nouveaux réseaux *dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument* et formant avec  $(\Sigma)$  des couples de réseaux conjugués et harmoniques simplement stratifiables.

Le couple simplement stratifiable  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  étant conjugué et harmonique, soit  $\Omega_2$  l'une des surfaces associées à ce couple [lieu du point  $\omega$  de la figure (3)].

Aux deux familles de développables de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}'$ , correspond sur  $\Omega_2$  un certain réseau  $(\omega)$  [voir paragraphe IV].

Soient  $\omega T_1$  et  $\omega T_2$  les deux tangentes de ce réseau.  $\omega T_1$  est la tangente à la courbe  $v = \text{const.}$  (première tangente);  $\omega T_2$  est la deuxième tangente.

Envisageons (fig. 3) l'une quelconque  $(\mathbf{K}'$  par exemple) des  $\infty^1$  congruences  $\mathbf{K}', \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots$ , simplement stratifiables avec  $\mathbf{K}$  dans un couple harmonique et conjugué, et dont les rayons homologues

<sup>(1)</sup> Si deux réseaux se correspondent de manière que leurs tangentes forment deux couples de congruences stratifiables (simplement ou doublement), nous dirons qu'ils forment un couple stratifiable de réseaux.

Si les tangentes homologues des deux réseaux décrivent des congruences stratifiables conjuguées et harmoniques, nous dirons que les réseaux sont conjugués et harmoniques (simplement ou doublement).

concourent dans chaque plan tangent  $(\pi)$  à l'une des surfaces enveloppées  $\Sigma(Z)$ , au point  $\omega$  correspondant.

$(Y)$  étant le deuxième réseau focal de  $K'$ , nous avons vu au paragraphe IV (théorème rappelé), que le plan tangent en  $Y$  au réseau en question contient la première tangente  $\omega T_1$  au réseau  $(\omega)$ . Comme ce qui vient d'être dit pour  $(Y)$  se répète pour les deuxièmes réseaux focaux des  $\infty^1$  congruences,  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ , on voit que les plans tangents aux différentes surfaces  $(Y), (Y_1), (Y_2), \dots$ , aux points où ces surfaces sont coupées par la tangente  $(ZY)$  à la courbe  $u$  du réseau  $(\Sigma)$  enveloppé par  $(\pi)$  forment un faisceau d'axe  $\omega T_1$ .

Il résulte de là que *les premières tangentes des deux réseaux  $(\Sigma)$  et  $(\omega)$  se correspondent dans une liaison de stratifiabilité.*

En envisageant les premiers réseaux focaux  $X, X_1, X_2, \dots$ , des congruences  $K', K'_1, K'_2, \dots$ , on voit que leurs plans tangents aux points où ils sont coupés par la deuxième tangente du réseau  $(\Sigma)$  forment un faisceau d'axe  $\omega T_2$ . Les deuxièmes tangentes des deux réseaux  $(\Sigma)$  et  $(\pi)$  se correspondent donc elles aussi dans une liaison de simple stratifiabilité.

Nous avons trouvé le moyen de faire correspondre, par l'intermédiaire de la fonction  $\varphi$  solution de (19'), au réseau  $(\Sigma)$ , un autre réseau  $(\omega)$  formant avec  $(\Sigma)$  un couple simplement stratifiable (au sens précisé plus haut).

Chaque solution  $\varphi$  de (19') donne un réseau simplement stratifiable avec  $(\Sigma)$ . Les différents réseaux  $(\omega)$  ainsi obtenus sont d'ailleurs tous conjugués à la congruence  $K'$  qui a servi à former l'équation (19') comme on l'a observé à la fin du paragraphe IV.

Il est clair que l'on peut faire jouer à chacune des congruences  $K'_1, K'_2, K'_3, \dots$  le rôle particulier que l'on a fait jouer à  $K'$ . Chacune de ces congruences fournit une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre analogue à (19'), définissant une infinité de nouveaux réseaux  $(\omega)$  tous simplement stratifiables avec le réseau  $(\Sigma)$ .

Il y a plus. Envisageons le couple simplement stratifiable formé par les congruences engendrées par les tangentes homologues  $(Z, Y)$  et  $(\omega T_1)$  [nous pourrions dire  $(ZX)$  et  $(\omega T_2)$ ] aux deux réseaux  $(\Sigma)$  et  $(\omega)$ . Le réseau  $(\omega)$  est conjugué à la congruence formée par les deuxièmes tangentes à l'un quelconque des deuxièmes réseaux

focaux  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  des congruences  $K', K'_1, K'_2, \dots$ . On sait alors que la congruence décrite par la première tangente  $\omega T$ , au réseau  $(\omega)$  est harmonique aux réseaux  $Y, Y_1, Y_2, \dots$ .

Donc, les différents couples de congruences simplement stratifiables transformés du couple initial  $(KK')$  sont eux aussi des couples *conjugués et harmoniques aux surfaces enveloppées* comme le couple initial.

Il résulte de là que les différents réseaux transformés du réseau  $(\Sigma)$  par l'intermédiaire de l'une quelconque des congruences  $K', K'_1, K'_2, \dots$ , et des équations (19') associés, forment avec  $(\Sigma)$  des *couples de réseaux simplement stratifiables conjugués et harmoniques*.

Notons que les points des différents réseaux associés à  $(\Sigma)$  sont tous situés dans le plan correspondant de  $(\Sigma)$ .

On peut évidemment, en envisageant deux congruences correspondantes de l'un quelconque des couples de réseaux que l'on vient d'obtenir, leur faire jouer le rôle que l'on a fait jouer à  $K$  et  $K'$ , et l'on conçoit ainsi la possibilité de poursuivre indéfiniment le procédé de transformation.

#### VI. -- Congruences doublement stratifiables.

Une congruence  $K$  arbitrairement donnée ne fait généralement pas partie d'un couple de congruences doublement stratifiables.

Les congruences doublement stratifiables forment une classe spéciale. Les notations étant celles du paragraphe I si l'on exprime que les rôles des congruences  $K$  et  $K'$  peuvent s'échanger, les formules du paragraphe I conduisent aux équations suivantes (*voir FINKOFF, Mémoire cité*) pour déterminer une congruence  $K(x, y)$  rentrant dans un couple doublement stratifiable et les congruences  $K'(p, q, p_1, q_1)$  associées

$$(21) \quad \begin{cases} x_x = \xi, y, & x_y = X - p, x - q, y, \\ y_x = Y - q_1, x - p_1, y, & y_y = \sigma, x, \\ X_x = q, Y - M, x, & X_y = -P, X - Q, Y - R, x, \\ Y_x = -Q_1, X - P_1, Y - R_1, y, & Y_y = q_1, X - M, y. \end{cases}$$

équations auxquelles il faut adjoindre

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_x = qq_x - \gamma\tau - M, & P_x = QQ_x - qq_x - M, \\ p_{x'} = q'q_{x'} - \gamma'\tau' - M, & P_{x'} = Q'Q'_{x'} - q'q'_{x'} - M, \\ q_x = p_x q - p_x^2 - \gamma_x, & Q_x = P_x Q - P_x q - q_x, \\ q_{x'} = p_{x'} q' - p_{x'}^2 - \gamma_{x'}, & Q_{x'} = P_{x'} Q' - P_{x'} q' - q_{x'}, \\ R_x = -M, & -M_1 P - p_x, \\ R_{x'} = -M_{x'}, & -M_1 P_{x'} - p_{x'}, \\ R_\gamma = R_x Q = 2M q, \\ R_{Q_x} = R_\gamma \tau = 2M q_x. \end{array} \right.$$

Nous avons vu au paragraphe II qu'une congruence  $K$  étant arbitrairement donnée, on peut grouper les congruences  $K'$  simplement stratifiables avec  $K$  en familles telles que les rayons homologues d'une même famille (correspondant au même rayon  $r$  de  $K$ ) restent constamment dans le même plan lorsque  $r$  décrit  $K$ , le plan correspondant à chaque famille enveloppant l'une des surfaces  $(\Sigma)$  associées à  $K$ .

Ce résultat général s'applique au cas particulier où  $K$  fait partie d'un couple doublement stratifiable (couple stratifiable).

Chaque congruence  $K'$  simplement stratifiable avec  $K$  fournit, comme on l'a vu au paragraphe II, une infinité de congruences  $\Theta$ , définies par les équations (15) et (16) jouissant de la propriété indiquée.

Mais, si  $K'$  forme avec  $K$  un couple stratifiable, rien ne dit que parmi les congruences  $\Theta$  (dont  $K'$  fait partie) il y en ait d'autres que  $K'$  formant avec  $K$  un couple stratifiable.

De même, et à plus forte raison, on ne peut pas affirmer *a priori* que l'on puisse grouper les congruences  $\Theta$  en familles analogues à celles du paragraphe III, à rayons homologues coplanaires et concurrents, les congruences de chacune de ces familles formant avec  $K$  un couple stratifiable.

Nous allons envisager le cas particulièrement intéressant où le couple  $(K, K')$  est un couple *conjugué et harmonique*,  $(\Sigma)$  étant l'une des surfaces enveloppées par les plans issus des différents rayons de  $K'$ , les développables de  $K$  et  $K'$  correspondent à un réseau conjugué de  $(\Sigma)$  [réseau  $(\Sigma)$ ];  $K$  est conjugué au réseau  $(\Sigma)$  et  $K'$  est harmonique à ce même réseau. Chaque rayon de  $K'$  est dans un certain plan tangent  $(\pi)$  à  $(\Sigma)$ . Nous allons rechercher d'abord les congruences



autres que  $K'$  dont les rayons sont situés dans les plans tangents à  $(\Sigma)$  et qui forment avec  $K$  un couple stratifiable conjugué et harmonique. Nous chercherons ensuite à grouper les congruences obtenues, en familles à rayons homologues concourants, afin de réaliser si possible une transformation des couples stratifiables conjugués et harmoniques analogue à celle étudiée au paragraphe IV.

Si le couple  $(KK')$  est conjugué et harmonique, on aura comme l'on sait dans les équations (21) et (22)

$$M = 0 \quad (17)$$

On voit alors sans peine que les deux systèmes (21) et (22) peuvent se mettre sous les formes (18)

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 = 2\lambda, & x_2 = \lambda - 2\sigma - q_1\tau, \\ y_1 = \lambda - q_1\sigma - p_1\tau, & y_2 = \tau\sigma, \\ \lambda_1 = q\lambda, & \lambda_2 = p\lambda - 2\lambda - \sigma, \\ \lambda_3 = -\sigma\lambda - p_1\lambda - \tau, & \lambda_4 = q_1\lambda. \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} p_1 = p_1\sigma - q_1\tau - \tau, \\ q_1 = p_1q - p_1\tau - \tau, & q_1 = p_1q - p_1\tau - \tau, \\ q_2 = p_1q_1 - p_1\tau - \tau, & q_2 = p_1q_1 - p_1\tau - \tau. \end{cases}$$

Une congruence  $\Theta$  étant définie par les équations (12) du paragraphe II (fig. 1)

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda - mZ, \\ x_2 = \lambda - nZ. \end{cases}$$

$\Theta$  formera avec  $K$  un couple stratifiable conjugué et harmonique si les équations (21) restent vérifiées lorsqu'on remplace  $p, q, p_1, q_1$  par les quantités  $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1$  définies par les équations (13) que nous récrivons

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{p} = p - m, & \tilde{p}_1 = p_1 - m\tilde{z}, \\ \tilde{q} = q - m\tilde{z}, & \tilde{q}_1 = q_1 - m. \end{cases}$$

(1) Les congruences d'un couple stratifiable sont des congruences  $R$  (congruences  $W$  particulières dont les développables interceptent sur chaque nappe de la surface focale un réseau conjugué isotherme).

(2) Pour le détail du calcul, voir S. FINSTER, *Mémoire cité*.

Or, on a vu au paragraphe II que trois des équations (24) sont vérifiées si  $m$  et  $n$  vérifient le système

$$(15) \quad \begin{cases} m_x = m q_1 \tilde{\lambda} - m q - m m \tilde{\lambda}, \\ n_x = p m - m q_2 - m m - m \tilde{\lambda} \tau. \end{cases}$$

Il reste à exprimer que les fonctions  $m$  et  $n$  vérifient aussi les trois équations restantes

$$(15') \quad \begin{cases} p_x = p_1 \tau, \\ q_x = p q - p_1 \tau - \tau_1, \\ q_{1,x} = p_1 q_1 - p \tau - \tau_1. \end{cases}$$

En remplaçant dans (25)  $p, q, p_1, q_1$  par leurs expressions (13), et en tenant compte de ce que, par hypothèse,  $p, q, p_1, q_1$  vérifient le système (24), le système (25) s'écrit

$$(25) \quad \begin{cases} m_x = m \tilde{\lambda} - m \tilde{\lambda}, \\ m \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda} m_x = p m \tilde{\lambda} - m q - m^2 \tilde{\lambda} - m \tilde{\lambda} \tau, \\ n_x = p_1 m - q_1 m \tilde{\lambda} - m^2 \tilde{\lambda} - m \tau. \end{cases}$$

La première équation (26) est vérifiée en vertu des équations (15) et de l'expression de  $\tilde{\lambda}$ , donnée au paragraphe I

$$(26) \quad \begin{cases} \tilde{\lambda}_x = -q_1 \tilde{\lambda}^2 - p_1 \tilde{\lambda} - \tau_1, \\ \tilde{\lambda} = \tau \tilde{\lambda}^2 - p \tilde{\lambda} - q. \end{cases}$$

Quant au système des deux dernières équations (26), il peut s'écrire en égard à cette même expression de  $\tilde{\lambda}$ ,

$$(15'') \quad \begin{cases} m_x = m p_1 - m^2 - m \tau - m \tau \tilde{\lambda}, \\ n_x = p_1 m - q_1 m \tilde{\lambda} - m^2 \tilde{\lambda} - m \tau. \end{cases}$$

Les congruences  $\Theta$  que nous recherchons existeront donc si le système des quatre équations (15) et (15'') est compatible en  $m$  et  $n$ .

Si l'on compare les deux expressions de  $m_x$  et celles de  $n_x$  en tenant compte des équations (15), (15''), (24) et des expressions (3) de  $\tilde{\lambda}_x$  et  $\tilde{\lambda}$ , on constate, après un calcul qui ne présente aucune difficulté, que les conditions de compatibilité des équations (15) et (15'') sont identiquement vérifiées.

$m$  et  $n$  peuvent donc être calculées avec deux constantes arbitraires. Ainsi :

Si une congruence  $K$  fait partie d'un couple stratifiable conjugué et harmonique  $(K, K')$ , et si  $(\Sigma)$  est l'une des surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de  $K'$ , il existe  $\infty^2$  congruences formant avec  $K$  un couple stratifiable conjugué et harmonique et telles que chaque plan tangent à  $(\Sigma)$  les coupe suivant  $\infty^2$  rayons homologues.

**VII. — Congruences formant avec une congruence donnée des couples stratifiables conjugués et harmoniques à rayons homologues coplanaires et concurrents. — Transformation des réseaux  $R$ .**

Dans ce paragraphe, nous rechercherons s'il est possible de grouper les  $\infty^2$  congruences  $\Theta$  déterminées au paragraphe précédent, en familles de  $\infty^1$  congruences telles que tout plan tangent  $(\pi)$  à  $(\Sigma)$  coupe chaque famille suivant un faisceau de  $\infty^1$  rayons homologues concurrents.

*A priori* le problème semble impossible. Nous allons voir qu'on peut le résoudre, et que chacune des  $\infty^2$  congruences  $\Theta$  dont il est question ci-dessus fournit  $\infty^1$  familles de congruences jouissant de la propriété indiquée.

$K$  étant l'une des  $\infty^2$  congruences  $\Theta$  déterminées au paragraphe précédent,  $X$  et  $Y$  désignant toujours les points où un rayon quelconque de  $K'$  perce les plans focaux correspondants de  $K$ , envisageons comme au paragraphe III le point  $\omega$  du rayon  $(X, Y)$  de coordonnées

$$\omega = X - \varepsilon Y,$$

$\varepsilon$  étant une fonction des deux paramètres  $u$  et  $v$ .

Nous avons vu que l'on peut déterminer la fonction  $\varepsilon$  [solution de l'équation (19')] de façon que  $\omega$  soit le sommet d'un faisceau formé par les rayons homologues de  $\infty^1$  congruences simplement stratifiables avec  $K$ .

L'équation (19') a été obtenue en étudiant l'intégrabilité du système (17). Ici, nous désirons que les  $\infty^1$  congruences coupées par les différents plans tangents  $(\pi)$  à  $(\Sigma)$  suivant des faisceaux de sommets  $\omega$ , forment avec  $K$  un couple *doublement stratifiable conjugué et harmonique*. Aux équations (17') du paragraphe III il faudra donc adjoindre les deux équations (15') du paragraphe précédent.

Il faudra donc, pour que l'on puisse grouper les  $\infty^2$  congruences  $\Theta$  du paragraphe VI en familles de  $\infty^1$  congruences coupées par chaque plan  $(\tau)$  suivant un faisceau de rayons homologues concourants, qu'il soit possible d'intégrer le système suivant aux fonctions inconnues  $m$ ,  $n$ ,  $\varphi$ , la solution laissant subsister une constante arbitraire dans les expressions de  $m$  et  $n$  :

$$(27) \quad \begin{cases} m_u = mq_1\lambda + nq + m\lambda, \\ n_u = pn + mq_1 + mn + n\lambda\sigma, \\ m_v = \lambda mp + m^2 + n\varphi + m\sigma\lambda, \\ n_u = p_1n + q_1n\lambda + n^2\lambda + m\sigma, \\ m = n\varphi. \end{cases}$$

Remplaçons  $n$  par  $\frac{m}{\varphi}$  dans la deuxième et la quatrième des équations (27). Après un calcul simple, ces deux équations deviennent respectivement

$$(28) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{\varphi}\right)_v = -\frac{p}{\varphi} - \frac{\varphi}{\varphi^2} + q_1, \\ \left(\frac{1}{\varphi}\right)_u = \frac{p_1}{\varphi} - \frac{q}{\varphi^2} + \sigma. \end{cases}$$

Si le système (28) est intégrable, la première et la troisième des équations (27) (qui forment un système intégrable) donneront  $m$  avec une constante arbitraire, après quoi la dernière équation donnera  $n$ .

On aura donc, comme on le voulait,  $m$  et  $n$  avec une constante arbitraire.

Or, si l'on exprime que le système (28) est intégrable, en égalant les deux expressions de  $\left(\frac{1}{\varphi}\right)_{uv}$ , on constate [eu égard aux équations (24)] que la condition d'intégrabilité est identiquement satisfaite. Les équations (28) donneront donc  $\varphi$  (avec une constante arbitraire). Une fois la fonction  $\varphi$  choisie, on aura  $m$  avec une constante arbitraire, puis  $n = \frac{m}{\varphi}$ .

Pour chaque valeur de la constante figurant dans les expressions de  $m$  et  $n$ , on aura une congruence  $\Theta$  dont le rayon générateur est défini par les deux points  $\xi$ ,  $\tau_1$  dont les coordonnées ont les expressions (16) du paragraphe II :

$$(16) \quad \begin{cases} \xi = (p - m)x + (q - m\lambda)y + z, \\ \tau_1 = (q_1 - n)x + (p_1 + n\lambda)y + z_u. \end{cases}$$

Les  $\alpha'$  valeurs de la constante arbitraire dont dépendent  $m$  et  $n$ , définissent  $\alpha'$  congruences  $\Theta$  doublement stratifiables avec  $K$ , conjuguées et harmoniques aux surfaces enveloppées, et telles que les différents plans tangents à  $(\Sigma)$  déterminent dans ces  $\alpha'$  congruences  $\alpha'$  rayons homologues concourant au point  $\omega \equiv X - \zeta Y$ .

Les points  $\omega$  relatifs aux différents rayons  $(X, Y)$  de  $K'$  engendrent une surface  $\Omega_\zeta$  [associée au couple  $(K, K')$ ].

Chaque valeur de la constante figurant dans  $\zeta$  donne une surface associée, et la congruence  $K'$  est conjuguée aux différents réseaux qu'elle détermine sur les  $\alpha'$  surfaces associées (voir § V).

Plaçons-nous maintenant plus spécialement au point de vue de la transformation des couples de réseaux stratifiables comme nous l'avons fait au paragraphe V.

Nous avons vu que si  $\omega T_1$  et  $\omega T_2$  sont respectivement la première et la deuxième tangente du réseau  $(\omega)$  (fig. 3),  $\omega T_1$  correspond à la première tangente du réseau  $\Sigma(Z)$  dans une liaison de simple stratifiabilité [les rayons homologues étant conjugués et harmoniques au réseau  $(\Sigma)$ ]; et l'on a un résultat analogue pour les deuxièmes tangentes des réseaux  $(\omega)$  et  $(\Sigma)$ .

Il y a lieu de se demander, dans le cas actuel, si la liaison de stratifiabilité entre les deux couples de tangentes homologues des réseaux  $(\omega)$  et  $(\Sigma)$  ne serait pas *double* au lieu de *simple*.

Prenons les coordonnées du point  $\omega$  sous la forme

$$\omega = \frac{1}{\zeta} X - Y.$$

$\omega T_1$  est définie par les deux points

$$\left(\frac{1}{\zeta} X - Y\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\zeta} X - Y\right)_\Sigma.$$

En tenant compte de l'expression (28) de  $\left(\frac{1}{\zeta}\right)_\Sigma$  et en remplaçant  $X_u$  et  $Y_u$  par leurs expressions (23), on constate immédiatement que  $\omega T_1$  passe par  $(r)$ .

De même  $\omega T_2$  passe par  $(r)$ . Donc, dans le cas actuel, le plan  $(x, y, \omega)$  est tangent à la surface  $\Omega_\zeta$ ; comme le résultat subsiste pour toutes les valeurs de la constante qui rentre dans  $\zeta$ , on voit que les différentes surfaces  $\Omega_\zeta$  ne sont autres que les *surfaces enveloppées*

par les plans issus des rayons de  $K$  ayant leurs points caractéristiques sur les rayons correspondants de  $K'$ .

Il suffit alors de se reporter au Mémoire de M. Finikoff (§ VI) pour voir que les deux couples de tangentes homologues des réseaux  $(\Sigma)$  et  $(\omega)$  se correspondent dans une liaison de *double stratifiabilité*, et que le réseau  $(\omega)$  est, comme le réseau  $(\Sigma)$ , un réseau  $R$  [les congruences des tangentes sont des congruences  $R$ ].

Notre méthode générale de transformation des réseaux simplement stratifiables étudiée au paragraphe V se réduit ici à une méthode de transformation des réseaux  $R$  indiquée par M. Finikoff.

Nous ferons observer qu'une surface enveloppée  $(\Sigma)$  associée à  $K$  étant choisie, chacune des congruences  $\Theta$  étudiées au paragraphe VI (on a vu qu'il y en a  $\infty^2$ ) peut jouer le rôle de  $K'$ . Comme à  $K'$  sont associées  $\infty^1$  surfaces  $\Omega_z$ , on voit que les développements du paragraphe actuel font correspondre à un réseau  $(R)$  porté par  $(\Sigma)$   $\infty^2$  réseaux de la même espèce.

#### VIII. — Quadruples doublement stratifiables conjugués et harmoniques attachés à un couple.

Envisageons un couple doublement stratifiable conjugué et harmonique  $(KK')$ . Désignons toujours par  $x, y$  les foyers de  $K$ , et par  $X, Y$  ceux de  $K'$ .

Soient  $(Z)$  et  $(\omega)$  les points décrivant deux surfaces enveloppées par les plans issus respectivement de  $K$  et de  $K'$  (*fig. 4*).

Nous avons vu au paragraphe précédent que le point  $\omega$  est le sommet d'un faisceau de droites situées dans le plan tangent  $(Z, X, Y)$  à la surface  $(Z)$ , chacune de ces droites décrivant une congruence formant avec  $K$  un couple doublement stratifiable conjugué et harmonique.

Il suffit d'échanger les rôles  $K$  et  $K'$  pour voir qu'à son tour le point  $Z$  est le sommet d'un faisceau, situé dans le plan  $(\omega, x, y)$ , dont les différents rayons décrivent des congruences formant avec  $K'$  des couples doublement stratifiables conjugués et harmoniques.

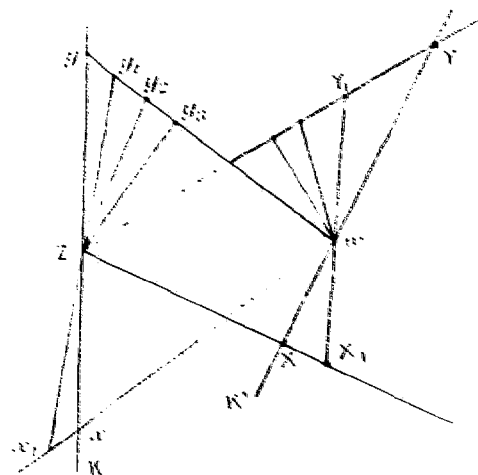
Le point  $Z$  joue le même rôle sur tous les rayons  $(Z, y_1), (Z, y_2), \dots$  du premier des deux faisceaux dont il vient d'être ques-

tion, car, pour toutes les congruences  $(Z, y)$ ,  $(Z, y_1)$ ,  $(Z, y_2)$ , ...,  $(Z)$  est l'une des surfaces enveloppées par les plans issus de  $K'$ .

De même,  $\omega$  joue le même rôle sur tous les rayons du faisceau  $(\omega, Y)$ ,  $(\omega, Y_1)$ ,  $(\omega, Y_2)$ , ...

Il résulte immédiatement de là que si l'on considère un rayon quelconque du faisceau de sommet  $(Z)$ , et un rayon quelconque du fais-

Fig. 4.



ceau de sommet  $(\omega)$ , soient  $(Z, y_1)$  et  $(\omega, Y_1)$ , on obtient un couple de congruences doublement stratifiables conjugué et harmonique tout comme le couple de départ  $(KK')$ .

Le couple  $(\omega, Y)$  et  $(Z, y)$  étant un couple du même type, comme on l'a vu au paragraphe précédent, on peut dire que le quadrilatère gauche  $(Z, y_1, \omega, Y_1)$  jouit de cette propriété que ses deux couples d'arêtes opposées engendrent chacun des couples de congruences doublement stratifiables conjugués et harmoniques. Ils forment ce que M. Finikoff appelle un *quadruple stratifiable conjugué et harmonique*.

En associant un rayon quelconque du faisceau  $(Z)$  à un rayon quelconque du faisceau  $(\omega)$ , on voit donc qu'il est possible de déduire d'un quadruple doublement stratifiable conjugué et harmonique donné  $(Z, y, \omega, Y)$ ,  $\infty^2$  nouveaux quadruples de la même espèce.

On peut faire jouer à chacun de ces  $\infty^2$  quadruples transformés le

rôle du quadruple initial, et obtenir de la sorte une configuration renfermant autant de quadruples du genre indiqué que l'on veut.

Les congruences de tous ces quadruples sont des congruences R, et leurs nappes focales des surfaces R de Tzitzéica-Demoulin.

Envisageons un couple quelconque stratifiable extrait des deux faisceaux (Z) et ( $\omega$ ). Soient ( $x_1$ ) et ( $y_1$ ) les foyers du rayon issu de (Z); ( $X_1$ ) et ( $Y_1$ ) les foyers du rayon issu de ( $\omega$ ).

Les droites ( $x_1 X_1$ ) et ( $y_1 Y_1$ ) d'une part, ( $x_1 Y_1$ ) et ( $y_1 X_1$ ) d'autre part, engendrent deux nouveaux couples de congruences [les couples associés L et L', N et N' de M. Finikoff].

Les congruences ( $x_1 Y_1$ ), ( $y_1 X_1$ ) ont les mêmes surfaces focales que le couple ( $x_1 y_1$ ), ( $X_1 Y_1$ ); ce dernier couple étant formé de congruences R, il résulte d'un théorème de M. Finikoff que le couple associé ( $x_1 Y_1$ ), ( $y_1 X_1$ ) est un couple stratifiable conjugué et harmonique comme le couple ( $x_1 y_1$ ), ( $X_1 Y_1$ ).

Mais alors, d'après un autre théorème de M. Finikoff, le deuxième couple associé ( $x_1 Y_1$ ), ( $y_1 X_1$ ) appartient au même type que les deux premiers, de sorte que les trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre ( $x_1 y_1 Y_1 X_1$ ) forment un triple de couples stratifiables conjugués et harmoniques.

Les quatre surfaces focales ( $x_1$ ), ( $y_1$ ), ( $X_1$ ), ( $Y_1$ ) sont des surfaces R avec deux, et par suite  $\infty^1$  réseaux R.

Si l'on se rappelle maintenant qu'on peut remplacer le rayon ( $x_1 y_1$ ) par un rayon quelconque du faisceau (Z), et de même ( $X_1 Y_1$ ) par un rayon quelconque du faisceau ( $\omega$ ), on voit qu'à partir d'un couple stratifiable conjugué (KK'), et une fois les deux surfaces enveloppées (Z) et ( $\omega$ ) fixées, on peut construire  $\infty^2$  triples de couples stratifiables conjugués et harmoniques.

En faisant varier les deux surfaces enveloppées (Z) et ( $\omega$ ), on obtient  $\infty^1$  triples analogues.

Les surfaces focales de ces  $\infty^1$  triples sont autant de surfaces (R) possédant chacune  $\infty^1$  réseaux isothermes conjugués.

