JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VITO VOLTERRA

Sur la théorie des ondes liquides et la méthode de Green

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 1-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la théorie des ondes liquides et la méthode de Green ;

CONFÉRENCE DE M. VITO VOLTERRA (1).

1. On me permettra, au début de cette Conférence, quelques remarques générales sur les méthodes, remarques qui permettront au moins de situer le problème étudié dans l'ensemble de la Physique mathématique.

Dans une Conférence que j'ai faite en 1920 à Strasbourg, au Congrès International des Mathématiciens, j'ai eu l'occasion de noter certaines analogies entre le développement historique de la Mécanique et celui de la Physique mathématique.

La première se constitue pendant la période de la Renaissance. Sa

(1) Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. Joseph Pérès qui a bien voulu rédiger avec tant de clarté cette conférence faite en 1931 à Paris dans l'Institut de Mécanique des Fluides en mettant en rapport le sujet traité avec les idées que j'avais exposées en 1920 à Strasbourg au Congrès des Mathématiciens.

création est motivée par des problèmes pratiques tels que ceux que pose, par exemple, l'invention de l'artillerie; mais ses progrès dépendent, essentiellement, de ceux du calcul infinitésimal qui donne les méthodes adéquates pour exprimer les lois de la dynamique et pour en tirer les conséquences. Elle atteint son plein développement avec Lagrange qui, dans sa Mécanique analytique, unifie et systématise, en un tout organique, les résultats acquis.

Les diverses branches de la Physique mathématique ont de même leur origine dans des questions techniques. L'art de la construction amène à préciser les lois de la résistance des matériaux, puis la théorie générale de l'élasticité. L'usage des machines à feu donne lieu à des recherches qui aboutissent, d'une part, avec Sadi Carnot, à la thermodynamique, et, d'autre part, à la théorie de la propagation de la chaleur développée par Fourier. Tout récemment, la découverte de la navigation aérienne a déterminé un progrès capital de la Mécanique des fluides. Mais la poussée la plus active qui ait agi sur la Physique mathématique est probablement celle qui se rapporte à l'énorme extension acquise par la théorie et les applications pratiques de l'électricité : dans ce domaine, expérimentation et analyse mathématique ont été intimement rapprochées et les théories qui se sont succédées ont fini par déborder le cadre de la physique mathématique classique.

Si nous laissons de côté ces développements modernes, qui suivent des voies bien différentes (¹), nous constatons que toutes les recherches de la Physique mathématique classique reposent sur l'étude des équations aux dérivées partielles. Le développement de cette branche de l'analyse a constitué l'instrument puissant qui a permis l'étude théorique de l'élasticité, de la chaleur, de l'électricité, de l'hydrodynamique, etc. C'est au moment où d'Alembert, Fourier, Poisson, Cauchy commencent à faire un usage courant des équations aux dérivées partielles que s'ouvre la période vraiment féconde de la Physique mathématique.

Dans la Conférence déjà citée j'ai indiqué comment on pourrait

---

(¹) Au moment où la Conférence de Strasbourg a été prononcée ils n'avaient pas encore pris l'essor qu'ils ont à présent.

concevoir une *Physique analytique*, réalisant, pour des théories développées le plus souvent sous forme monographique, une synthèse et une systématisation actuellement possible.

Dans l'ensemble on pourra distinguer deux méthodes principales. L'une, à laquelle on peut attacher le nom de Fourier, obtient la solution générale sous forme de série de solutions simples. L'autre, qui remonte à Poisson, Green, Kirchhoff, utilise des intégrales portant sur toutes les valeurs des données au contour. Dualité qui se retrouve dans d'autres théories modernes : on peut ainsi concevoir l'espace fonctionnel comme espace à une infinité continue de dimensions ou comme espace à une infinité dénombrable de dimensions (lorsqu'on définit les fonctions par les coefficients de développements en série d'un type bien déterminé).

A la méthode de Green on peut rattacher celle des caractéristiques. Ce n'en est, en apparence, qu'une modification, mais l'intérêt de la notion de caractéristiques est si grand et elle joue un tel rôle dans l'intégration des équations, qu'une séparation s'impose qui n'est pas artificielle, mais correspond à quelque chose de substantiel. Incidemment, notons que cette méthode a peut-être contribué à préparer la voie aux théories de la relativité, en ce qu'elle implique la nécessité de regarder le temps comme une coordonnée.

La notion de caractéristique conduit à la distinction, bien connue, des équations différentielles en trois types : elliptique, hyperbolique et parabolique. Mais il faut reconnaître que la classification doit être appliquée plutôt aux problèmes qu'aux équations dont ils dépendent, car les données aux limites jouent un rôle essentiel dans cette classification. Que la classification en question soit délicate, c'est ce dont on se rendra compte à propos des développements sur la théorie des ondes dans les liquides qui forment l'objet de cette conférence : comme on le verra par la suite, le problème concerne trois variables spatiales et le temps; mais l'équation aux dérivées partielles correspondante est l'équation de Laplace à trois variables, c'est-à-dire l'équation la plus simple du type elliptique; le temps n'intervient que dans les conditions au contour. Ces conditions sont telles que le problème peut être rapproché, dans sa solution, de problèmes concernant des équations du type hyperbolique ou parabolique.

2. Soit un liquide homogène soumis à des forces données et occupant un certain volume limité, en partie par des parois solides, en partie par des surfaces libres pour lesquelles la pression est constante. Nous étudierons les petites oscillations de ce liquide à partir d'un état d'équilibre stable.

Désignons par xyz les coordonnées d'une molécule à l'état d'équilibre et par

$$x' = x + \xi, \qquad y' = y + \eta, \qquad z' = z + \zeta$$

les coordonnées de la même molécule à l'instant t du mouvement; les déplacements $\xi\eta\zeta$ sont des fonctions, à déterminer, de $xyzt$; nous ferons l'hypothèse que ces déplacements sont petits ainsi que leurs dérivées.

Les équations fondamentales de l'hydrodynamique, prises sous la forme de Lagrange, s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \frac{P}{\rho}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en désignant par P la pression, par ρ la densité et en supposant que les forces de masse admettent le potentiel V. Puisque

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \cdots,$$

il reste, *en se bornant aux termes principaux :*

(1) $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \frac{P}{\rho}\right), \qquad \cdots;$$

la condition d'incompressibilité

$$\frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)} = 1$$

se réduisant, dans les mêmes conditions, à

(2) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Soit $\Phi(xyzt)$ le potentiel des déplacements

$$\xi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial z};$$

d'après la condition d'intégrabilité, ce sera une fonction harmonique de xyz :

$$\Delta_2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

et les équations fondamentales (1) se réduiront à l'équation unique

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - V + \frac{P}{\rho} = c(t), \tag{4}$$

la constante d'intégration au second membre étant constante par rapport à xyz seuls. C'est l'équation qui détermine la pression P, en fonction de $xyzt$ quand on connaît le potentiel des vitesses.

Pour déterminer ce dernier on a l'équation de Laplace et des conditions aux limites qu'il reste à préciser.

Il est clair tout d'abord qu'en tout point d'une paroi rigide fixe on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0,$$

n désignant la normale à la paroi.

Soit enfin une surface libre. C'était une surface libre d'équilibre lorsque le fluide était au repos de sorte que V y avait la valeur constante V_0. Par rapport aux variables xyz une telle surface libre est caractérisée par l'équation

$$V = V_0.$$

A l'instant t la molécule (xyz) a pris les déplacements ξ, η, ζ, de sorte que la valeur de V, à faire figurer dans (4), est

$$V(x + \xi, y + \eta, z + \zeta),$$

c'est-à-dire

$$V = V_0 + \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Posons :

$$\lambda^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda \cos n x,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \cos n y,$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \lambda \cos n z$$

et enfin

$$V = V_0 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

n étant la normale à la surface libre (considérée en faisant abstraction des déplacements très petits du fluide) normale que nous orienterons vers l'intérieur du fluide.

Sur cette surface libre la pression doit avoir une valeur constante P_0 de sorte que (4) entraine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - V_0 - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{P_0}{\rho} = c(t),$$

d'où, puisque Φ n'est définie qu'à une fonction arbitraire de t près,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Notons de plus que, comme il est bien connu, V doit croître lorsqu'on quitte la surface libre du côté de la normale positive. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial n} > 0;$$

mais

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos n x + \frac{\partial V}{\partial y}\cos n y + \frac{\partial V}{\partial z}\cos n z = \lambda,$$

de sorte que λ est positif.

En résumé il vient, pour déterminer la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, potentiel des déplacements, les conditions

$$\text{(A)} \qquad \Delta_2 \Phi = 0$$

dans tout le domaine occupé par le fluide :

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

à toute paroi fixe ;

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

à toute surface libre ($\lambda > 0$).

3. Nous pouvons faire une comparaison entre le problème que nous venons de considérer et d'autres problémes de physique mathématique.

Le problème des vibrations d'un milieu élastique dépend de l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta_2 U ;$$

celui de la propagation de la chaleur conduit à

$$(6) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a \Delta_2 V ;$$

enfin les problèmes du potentiel et des températures stationnaires dans les milieux isotropes dépendent de l'équation de Laplace

$$(7) \qquad \Delta_2 W = 0.$$

Ces trois équations sont respectivement des trois types hyperbolique, parabolique et elliptique.

La question que nous avons considérée dans le paragraphe précédent relève du cas elliptique en tant que le potentiel Φ vérifie l'équation de Laplace (A). Mais elle diffère essentiellement, pour les données aux limites, des problèmes du potentiel et des températures stationnaires. L'une des conditions aux frontières (C) introduit en effet une nouvelle variable, le temps, comme dans les cas de la propagation de la chaleur ou des vibrations élastiques : il reste cependant une différence puisque (5) et (6) ont leurs caractéristiques réelles.

Nous avons déjà dit qu'il y avait deux méthodes principales pour aborder ces problèmes.

La première est celle de la séparation des variables (ou des solutions simples).

Dans le cas de l'équation (5) on posera

$$U = u(x, y, z) \sin mt, \tag{8}$$

m étant une constante. Il vient

$$m^2 u - \Delta_2 u = 0, \tag{9}$$

équation dans laquelle le temps a disparu. Posons, pour fixer les idées, que U soit nul à la frontière : u doit remplir la même condition. Il faut donc trouver les valeurs de m telles que (9) ait des solutions non identiquement nulles (solutions fondamentales). L'intégrale générale de (5) est obtenue par une série infinie de solutions particulières du type (8) multipliées par des constantes arbitraires, dont il faut choisir les valeurs d'après les *données* U et $\frac{\partial U}{\partial t}$ à l'instant initial.

La question de la détermination des solutions fondamentales a été résolue par Poincaré. On sait qu'on y a ensuite appliqué la théorie des équations intégrales et que MM. Hilbert, Schmidt et d'autres ont établi la théorie des séries de solutions fondamentales.

Un procédé analogue peut être appliqué à l'équation (6). Posant

$$V = e^{-m^2 t} v(x, y, z),$$

on a

$$m^2 v - a \Delta_2 v = 0,$$

entièrement analogue à (9).

La même méthode de séparation des variables peut être appliquée au problème des ondes des liquides [1]. Posant

$$\Phi = \varphi(x, y, z) \sin mt,$$

on a toujours

$$\Delta_2 \varphi(x, y, z) = 0.$$

(B) donne de même

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

---

[1] *Cf.* mes *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 133-134.

tandis que (C) doit être remplacée par

$$m^2\varphi + \lambda\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Ici encore il faut trouver les valeurs de m pour lesquelles φ n'est pas identiquement nulle et la solution générale sera donnée par une série de solutions particulières. Pour trouver ces valeurs de m on peut utiliser la méthode de Poincaré ou celle des équations intégrales (¹).

Bornons-nous au cas simple d'un liquide pesant, limité par une surface libre horizontale et des parois verticales, dont les petites oscillations sont parallèles au plan vertical xy et indépendantes de la troisième coordonnée z. Le potentiel des vitesses Φ dépendra de xy et t et, posant comme plus haut

$$\Phi = \varphi(x, y)\sin mt,$$

φ sera fonction harmonique vérifiant la condition

$$m^2\varphi - \alpha\frac{d\varphi}{dn} = 0 \qquad (\alpha = \text{const.})$$

sur la surface libre que nous prendrons $y = 0$, et la condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0$$

sur les parois $x = a$, $x = b$. On en tire aisément

$$\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2) = \frac{m^2}{2\pi\alpha}\int_a^b [\log r_1 - \log r_2 + \mathcal{G}']\varphi(x, 0)\,dx,$$

r_1 et r_2 étant les distances du point $(x, 0)$ aux points $(x_1 y_1)$ et $(x_2 y_2)$ et $\mathcal{G}'$ une fonction de Green pour le problème de Dirichlet. On en déduit

$$\varphi(x_1, 0) - \varphi(x_2, 0) = \frac{m^2}{2\pi\alpha}\int_a^b [\log|x_1 - x| - \log|x_2 - x| + \mathcal{G}']\varphi(x, 0)\,dx.$$

Mais on a

$$\int_a^b \varphi(x_2, 0)\,dx_2 = 0,$$

(¹) Comparer avec ce que nous allons dire pour les oscillations des liquides.

ce qui permet aisément d'éliminer $\varphi(x_2, 0)$ de l'équation précédente qui se réduit à

$$\varphi(x_1, 0) = \frac{m^2}{2\pi\alpha}\int_0^h \varphi(x, 0)\, G(x_1, x)\, dx.$$

C'est une équation intégrale homogène; les valeurs de m, c'est-à-dire les périodes $\frac{2\pi}{m}$ des oscillations du liquide, se déduiront des racines du déterminant de cette équation ([1]).

Nous n'insisterons pas davantage sur la méthode de séparation des variables et passerons à la seconde méthode générale. Elle a été inauguré par Green, pour les problèmes aux limites classiques sur l'équation de Laplace, puis, peu à peu, étendue à d'autres problèmes de Physique mathématique. C'est ainsi que Kirchhoff, appliquant les idées de Green à l'équation (5), arriva à la formule célèbre qui exprime le principe de Huyghens. Betti a appliqué une méthode analogue à l'équation (6).

Nous montrerons dans la suite qu'on peut trouver une formule assez semblable dans le cas des ondes des liquides. J'ai eu l'occasion de mentionner cette formule dans mes Leçons de Stockholm. Je suis revenu sur ce sujet, plus en détail, dans une conférence faite à l'Université de Houston ([2]).

4. Établissons d'abord un théorème d'unicité.

Théorème. — *Si Φ satisfait aux conditions* (A), (B), (C) *du paragraphe* 2 *elle est bien déterminée si l'on connaît les valeurs Φ_0, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_0$ de Φ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ prises à l'instant zéro sur la surface libre du fluide, ω.*

([1]) Je reproduis ici la note qui se trouve à la page 134 de mes Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles (Chap. III, § XV : *Application aux oscillations des liquides*). C'est en considérant ce problème que j'ai eu l'occasion, en 1898, dans ma conférence de Turin, sur le phénomène des Seiches de remarquer que la résolution d'une équation intégrale à limites fixes peut s'obtenir par une méthode qui amène à l'emploi des déterminants infinis (*N. Cimento*, 4e série, t. VIII). M. Hilbert a résolu ensuite ce problème comme exemple d'application de ses résultats généraux sur les équations intégrales.

([2]) *The Rice Institute Pamphlet*, vol. IV, p. 102-117.

Nous désignons par S le volume occupé par le liquide. Il est limité par une surface dans laquelle nous distinguerons surface libre du liquide (ω) et parois fixes (ω').

Admettons alors qu'il existe deux solutions Φ_1 et Φ_2 vérifiant les conditions du théorème. Posant

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2,$$

on aurait, sur ω,

$$(\Phi_3)_\omega = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_\omega = 0.$$

Transformons alors

$$\Omega = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega,$$

$$\Omega = \int_\omega \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2}\, d\omega = \int_\omega \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\frac{\partial \Phi_3}{\partial n}\, d\omega$$

et, puisque $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ est nul sur ω',

$$\Omega = \int_{\omega+\omega'} \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\frac{\partial \Phi_3}{\partial n}\, d\omega = -\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right) \cdots\cdots\right] dS$$

et, en vertu de l'équation (A),

$$\Omega = -\int_S \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z\, \partial t}\right) dS$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left[\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)^2\right] dS.$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega + \int_S \left[\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)^2\right] dS\right\} = 0,$$

d'où

$$(10) \qquad \int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega + \int_S \left\{\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)^2\right\} dS = c,$$

c étant une constante par rapport à t.

Mais à l'instant zéro Φ_3 est nul sur ω et $\frac{\partial \Phi_3}{\partial n}$ nul sur ω'; il en résulte que Φ_3 est identiquement nul dans le domaine S à cet instant. La seconde intégrale de (10) disparaît donc pour $t = 0$; de même la première intégrale puisque $\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_0 = 0$. Il s'ensuit que c est nul et que Φ_3 est bien identiquement nul dans S quel que soit t.

Nous ajouterons les remarques suivantes :

1° *Si, à un instant, les molécules qui appartiennent à une partie du domaine* S *ne sont pas déplacées de leur position d'équilibre, aucune molécule du fluide n'est déplacée de sa position d'équilibre.*

Car ξ, η, ζ étant nuls dans une certaine région, Φ y est constante et, puisque c'est une fonction harmonique régulière elle est partout constante. ξ, η, ζ sont donc identiquement nuls.

2° *Si, à un instant, les molécules qui appartiennent à une partie de* S *ont des déplacements nuls et des vitesses nulles, le fluide reste dans sa position d'équilibre.*

En effet Φ et $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ sont alors constants dans une partie de S à un instant, donc constants dans le domaine S tout entier à cet instant. En vertu du théorème d'unicité ils seront constants dans S à chaque instant, ce qui implique que le liquide reste au repos.

On voit que dans le cas d'un liquide en mouvement le mouvement gagne toute la masse au même instant. Il y a là une différence essentielle avec les mouvements d'un corps élastique ou d'un liquide compressible, cas dans lesquels il peut y avoir mouvement propagé avec une certaine vitesse d'une région à une autre.

3. Arrivons maintenant à la formule fondamentale analogue, dans la question présente, à la formule de Green.

Soient Φ et Ψ deux fonctions régulières qui vérifient les conditions (A), (B), (C) du paragraphe **2**. On a (théorème de Green)

$$\int_{\omega+\omega'} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) d\omega = 0$$

et, à cause de (B) et (C),

$$\int_{\omega} \left(\Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) \frac{d\omega}{\lambda} = 0. \tag{11}$$

Supposons maintenant que $\Psi = \frac{1}{r} + \chi$, r désignant la distance d'un point fixe A $(x_0 y_0 z_0)$ intérieur au domaine S au point (xyz) et χ étant harmonique régulière. Dans ce cas (11) doit être remplacée par

$$4\pi\Phi_A + \int_\omega \left(\Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) \frac{d\omega}{\lambda} = 0$$

ou

$$4\pi\Phi_A = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \frac{d\omega}{\lambda}.$$

Intégrons entre les limites o et t_1. Il vient

$$4\pi \int_0^{t_1} \Phi_A \, dt = -\int_\omega \left(\Phi_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_1 - \Psi_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_1\right) \frac{d\omega}{\lambda}$$
$$+ \int_\omega \left(\Phi_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 - \Psi_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0\right) \frac{d\omega}{\lambda},$$

formule dans laquelle les indices o et 1 indiquent que la fonction à laquelle ils s'appliquent est prise à l'instant zéro ou à l'instant t_1. Supposons Ψ telle que

$$\Psi_1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_1$$

soient nuls sur ω. Il viendra alors

$$\text{(D)} \qquad \Phi(x_0, y_0, z_0; t_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\omega \left\{ \Phi_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 - \Psi_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 \right\} \frac{d\omega}{\lambda}.$$

C'est la formule que nous avions en vue. Elle fait connaître Φ en tout point de S et à tout instant, si les valeurs de $(\Phi)_0$ et $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0$ sont connues sur ω, ce qui est d'accord avec le théorème d'unicité.

Il est nécessaire de calculer auparavant la fonction Ψ (ou χ). Cette fonction joue, dans la question, le rôle de fonction de Green. Il convient de remarquer que Ψ_0 et $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0$ dépendent de t_1 qui apparait ainsi au second membre de (D).

6. Nous ferons une application de la formule fondamentale en prenant pour domaine S une sphère de rayon R et en supposant que ω est la surface de cette sphère : il n'y a donc pas de frontière rigide.

Nous rechercherons Ψ sous forme d'une série

$$\Psi = a_0 + a_2 \frac{(t_1 - t)^2}{2!} + a_4 \frac{(t_1 - t)^4}{4!} + \dots,$$

$a_0, a_2, a_4, \dots$ étant des coefficients indépendants de t_1 et de t. Nous aurons

$$\Psi_1 = a_0, \qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_1 = 0.$$

Or

$$\Psi = \frac{1}{r_A} + \chi;$$

donc

$$a_0 = \frac{1}{r_A} + \chi_1$$

et puisque a_0 doit être nul sur ω et que χ est harmonique et régulière dans S la méthode des images nous donne immédiatement

$$\chi_1 = -\frac{R}{l}\frac{1}{r_{A'}},$$

A' étant l'image de A par rapport à la sphère et $r_{A'}$ la distance de ce point au point xyz, l étant enfin la distance du centre de la sphère à A.

On a donc

$$a_0 = \frac{1}{r_A} - \frac{R}{l}\frac{1}{r_{A'}}.$$

Soit ρ le rayon vecteur, le pôle étant le centre de la sphère. Il vient

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = -\left\{\frac{\partial a_0}{\partial\rho} + \frac{(t_1 - t)^2}{2!}\frac{\partial a_2}{\partial\rho} + \dots\right\}$$

et

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = a_2 + \frac{(t_1 - t)^2}{2!} a_4 + \dots,$$

de sorte que la condition (C), remplie à la surface de la sphère, donne

$$-\lambda\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = a_2, \qquad -\lambda\frac{\partial a_2}{\partial\rho} = a_4, \qquad \dots$$

vérifiées sur ω.

a_0 étant connu, les fonctions harmoniques régulières $a_2, a_4, a_6, \dots$

sont déterminées de proche en proche par leurs valeurs à la frontière.

Calculons d'abord a_2. En désignant par γ l'angle des rayons joignant A et (xyz) au centre, il vient

$$a_0 = \frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{R}{l}\,\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{R}{l}\,\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

C'est là comme on sait une fonction harmonique qui égale $\frac{\partial a_0}{\partial\rho}$ à la surface de la sphère. On ne peut pourtant l'identifier avec a_2, parce qu'elle présente une singularité au point A.

Mais transformons le premier terme de l'expression précédente par rayons vecteurs réciproques et multiplions par $\frac{R}{\rho}$; le terme en question reste harmonique sans changer de valeur sur la sphère et devient régulier à l'intérieur. La transformation en question étant obtenue en changeant ρ en $\frac{R^2}{\rho}$, le terme en question devient

$$-R^2\,\frac{R^2-l\rho\cos\gamma}{(l^2\rho^2+R^4-2lR^2\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

tandis que le second s'écrit

$$\frac{\rho l(l\rho-R^2\cos\gamma)}{(R^4+l^2\rho^2-2lR^2\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a ainsi

$$a_2 = -\lambda\,\frac{l^2\rho^2-R^4}{[R^4+l^2\rho^2-2lR^2\rho\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour le calcul des coefficients suivants la difficulté précédente ne se présente pas et l'on a

$$a_4 = -\lambda\frac{\rho}{R}\frac{\partial a_2}{\partial\rho} = -\frac{\lambda}{R}\,\frac{\partial a_2}{\partial\log\rho},$$

$$a_6 = -\lambda\frac{\rho}{R}\frac{\partial a_4}{\partial\rho} = \left(-\frac{\lambda}{R}\,\frac{\partial}{\partial\log\rho}\right)^2 a_2.$$

. . . .

et, en général,

$$a_{2n}=\left(-\frac{\lambda}{\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial\log\rho}\right)^{n-1}a_2.$$

Posant, pour abréger,

$$\mathrm{E}=\frac{\mathrm{R}^4-t^2\rho^2}{[\mathrm{R}^4+t^2\rho^2-2t\mathrm{R}^2\rho\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}},$$

il vient

$$\Psi=a_0+\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{\mathrm{R}^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\mathrm{E}}{\partial(\log\rho)^{n-1}}\frac{(t_1-t)^{2n}}{2n!}$$

et

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\quad-\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{\mathrm{R}^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\mathrm{E}}{\partial(\log\rho)^{n-1}}\frac{(t_1-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Pour l'application de la formule (D) du paragraphe précédent il faut évaluer, sur la sphère, $(\Psi)_0$ et $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_0$; enfin il faut dériver l'expression obtenue par rapport à t_1.

Adoptons les coordonnées polaires et posons

$$x=\rho\sin\vartheta\cos\alpha,\qquad y=\rho\sin\vartheta\sin\alpha,\qquad z=\rho\cos\vartheta$$

et les mêmes expressions, avec θ_0 et α_0, pour le point A.

Alors il vient

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\alpha_0+\sin\alpha\sin\alpha_0\cos(\vartheta-\vartheta_0)$$

et, posant

$$\begin{aligned}&\Theta(l,\vartheta_0,\alpha_0,\vartheta,\alpha,t)\\&\quad=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{\mathrm{R}^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{(\partial\log l)^{n-1}}\left\{\frac{\mathrm{R}^2-l^2}{(l^2+\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}l\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right\}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!},\end{aligned}$$

la formule (D) s'écrit

$$\begin{aligned}\Phi(l,\vartheta_0,\alpha_0,t)=&\quad\frac{\mathrm{R}}{4\pi}\int\Phi'_0(\vartheta,\alpha)\quad\Theta(l,\vartheta_0,\alpha_0,\vartheta,\alpha,t)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\alpha\\&+\frac{\mathrm{R}}{4\pi}\int\Phi_0(\vartheta,\alpha)\frac{\partial}{\partial t}\Theta(l,\vartheta_0,\alpha_0,\vartheta,\alpha,t)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\alpha,\end{aligned}$$

en écrivant, pour simplifier,

$$\begin{aligned}\Phi_0(\vartheta,\alpha)=&\quad[\Phi_0(\mathrm{R},\vartheta,\alpha,t)]_{t=0},\\\Phi'_0(\vartheta,\alpha)=&\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(\mathrm{R},\vartheta,\alpha,t)\right]_{t=0}.\end{aligned}$$

Si, au lieu de la sphère, le liquide occupe une hémisphère dont le plan diamétral constitue la frontière rigide tandis que la sphère forme surface libre, la méthode des images conduira facilement à la solution. De même dans le cas où le liquide occupe une portion de sphère entre deux plans diamétraux rigides dont l'angle est $\frac{\pi}{n}$, n étant entier.

7. Il est inutile d'exposer ici l'application de la méthode de Green à l'équation (5) des vibrations, car on la trouve dans tous les traités et dans un grand nombre de travaux particuliers parmi lesquels il faut citer ceux de Beltrami qui a employé les procédés les plus simples et les plus élégants (¹).

Mais nous indiquerons sommairement, pour terminer, comment se présente la méthode de Green dans le cas de l'équation de la chaleur, que nous écrirons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta_2 u.$$

Il faut y joindre l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha^2 \Delta_2 v.$$

Dans ces conditions

$$v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 (v\,\Delta_2 u - u\,\Delta_2 v),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S uv\,dS = \alpha^2 \int_S (v\,\Delta_2 u - u\,\Delta_2 v)\,dS = \alpha^2 \int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

(n normale intérieure) et, enfin,

$$\left(\int_S uv\,dS\right)_{t_1} - \left(\int_S uv\,dS\right)_0 = \alpha^2 \int_0^{t_1} dt \int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Prenons

$$v = (t_1 - t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4\alpha^2(t_1-t)}},$$

on constate aisément que la formule précédente conduit à la suivante :

$$u(\xi, \eta, \zeta; t_1)\left(2\alpha\pi^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \alpha^2 \int_0^{t_1} dt \int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \int_S u_{t=0} v_{t=0}\,dS.$$

(¹) BELTRAMI, *Opere Matematiche*, t. IV.

Soit alors une fonction w telle que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\varkappa^2 \Delta_2 w$$

et que

$$w_{t=t_1} = 0,$$

la formule précédente reste valable lorsque l'on y remplace v par $v+w$. Si de plus on choisit w de façon que $v+w$ s'annule pour toutes les valeurs de $t(0<t<t_1)$ sur le contour σ, il restera

$$u(\xi,\eta,\zeta;t_1)\left(2\varkappa\pi^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \varkappa^2 \int_0^{t_1} dt \int_\sigma u \frac{d(v+w)}{dn}\, d\sigma - \int_S u_{t=0}(v+w)_{t=0}\, dS.$$

Cette formule, analogue à (D), fait connaître u quand on connaît $u_{t=0}$ dans S et $u_t(0<t<t_1)$ sur le contour σ. La fonction $v+w$ est la fonction de Green du problème de la chaleur.

La méthode du présent paragraphe est due à Betti [1]. Elle a été dépassée par celle des caractéristiques, mais il était intéressant de la rapprocher ici des développements du paragraphe 5.

Pour en revenir au problème des oscillations d'un liquide, problème sur lequel les travaux sont fort nombreux, on voit que, s'il n'appartient à aucun des trois types fondamentaux, il se rattache pourtant à tous trois : elliptique par l'équation de Laplace que vérifie Φ, parabolique par l'équation au contour

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

hyperbolique parce qu'il donne lieu à des périodes.

J'ai eu l'occasion d'esquisser ici les deux points de vue sous lesquels on peut l'aborder. Suivant la tournure d'esprit du chercheur et suivant les applications en vue, l'un ou l'autre de ces points de vue pourra être préféré, il ne faut pas faire de choix *a priori*.

---

[1] BETTI, *Opere Matematiche*, t. II.