COMPOSITIO MATHEMATICA

YVETTE PERRIN

Fonctions analytiques dans les corps valués de rang supérieur à un

Compositio Mathematica, tome 49, nº 1 (1983), p. 51-74

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__49_1_51_0>

Compositio Mathematica 49 (1983) 51–74

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LES CORPS VALUÉS DE RANG SUPÉRIEUR À UN

Yvette Perrin

Jusqu'en 1975, l'analyse ultramétrique s'est faite uniquement sur des corps valués de rang 1, c'est-à-dire des corps valués dont le groupe des valeurs est ordre-isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Or il existe des corps valués plus généraux mentionnés par Krull dès 1928 dont la valuation satisfait aux mêmes axiomes que ceux des valuations de rang 1, mais qui prend ses valeurs dans un groupe ordonné de rang quelconque. D'une façon plus précise nous appellerons corps valué au sens de Krull tout corps K muni d'une application dite valeur absolue et notée $|\,|$ dont l'ensemble des valeurs est la réunion d'un groupe abélien Γ totalement ordonné et d'un élément annulateur 0 qui minore tous les éléments de Γ, et qui satisfait aux axiomes suivants:

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$|ab| = |a|\,|b|$$

$$|a + b| \leq \sup(|a|, |b|)$$

Si l'on considère la fonction $d: K^2 \to \Gamma \cup \{0\}$ définie par $d(a, b) = |a - b|$, elle vérifie les axiomes des distances ultramétriques et permet de munir K d'une structure uniforme et de parler de sa complétion.

On peut donc envisager une analyse dans de tels corps, mais pour qu'elle ne soit pas triviale, il faut qu'il existe des séries convergentes qui ne se réduisent pas à des sommes finies. Ceci impose certaines conditions au groupe des valeurs Γ ([9]). Considérons sur Γ la relation de préordre suivante:

$$\gamma < \gamma' \Leftrightarrow \exists m \in Z,\ \exists n \in Z \text{ tels que } \gamma'^m \leq \gamma \leq \gamma'^n$$

La relation d'équivalence associée à ce préordre est dite relation de comparabilité et l'ensemble ordonné quotient de Γ par cette relation est appelé charpente de Γ et noté $\mathscr{C}(\Gamma)$.

Il existe dans K des séries convergentes non réduites à des sommes finies dans deux cas:

– la charpente de Γ admet un plus grand élément;

– la charpente de Γ admet une suite cofinale dénombrable.

Le premier cas conduit à une analyse très proche de l'analyse ultramétrique classique, c'est-à-dire celle où la charpente de Γ n'a que deux éléments, en d'autres termes, celle où Γ est archimédien.

Ici nous nous intéressons uniquement au deuxième cas qui conduit à une analyse d'un type nouveau. R. Hobeika a étudié les propriétés des séries de Taylor et de Laurent d'une variable de cette analyse. ([9]). Le domaine de convergence d'une série de Taylor est soit le corps tout entier soit un ensemble réduit à un point. Il n'est donc pas question d'utiliser les séries de Taylor pour définir un prolongement analytique. Nous nous proposons de définir et d'étudier la notion de fonction analytique d'une ou de plusieurs variables basée sur la définition des éléments analytiques que M. Krasner a donnée en analyse ultramétrique classique. Mais les méthodes utilisées ici sont très différentes et les fonctions ainsi obtenues ne sont en général nulle part localement développables en série de Taylor.

Les résultats ont été obtenus dans l'hypothèse où le corps de base K est complet et algébriquement clos. Tout corps valué au sens de Krull dont la charpente du groupe des valeurs admet une suite cofinale dénombrable possède une extension valuée complète et algébriquement close dont le groupe des valeurs a la même propriété.

Parmi ces résultats, certains ont leur équivalent en analyse complexe, d'autres en analyse ultramétrique classique, d'autres nulle part ailleurs.

Nous montrerons en particulier que:

– tout ouvert de K^n est un ensemble analytique.

– le prolongement analytique d'éléments analytiques sur des ouverts défini par M. Krasner conduit à des fonctions analytiques globalement uniformes.

– l'analyticité des fonctions analytiques est préservée par les opérations rationnelles: somme, produit, quotient.

– toute fonction analytique est indéfiniment dérivable, et la dérivée d'une fonction analytique est encore une fonction analytique.

Nous étudierons ensuite plus précisément les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un ouvert D de K. Nous donnerons une caractérisation des ensembles de zéros de telles fonctions et nous montrerons que contrairement à ce qui se passe en analyse ultramétrique classique, toute fonction analytique sur un ouvert peut se mettre sous la forme d'un produit dénombrable convergent de fonctions analytiques ayant chacune un nombre fini de zéros sur cet ouvert.

Propriétés élémentaires des groupes totalement ordonnés et des corps valués
Exemples de corps valués au sens de Krull

§1. Groupes totalement ordonnés

(1) Soit Γ un groupe noté multiplicativement, abélien, totalement ordonné, non archimédien.

Nous noterons $C(\alpha)$ la classe de comparabilité de l'élément α de Γ. Rappelons ([9], chap. 0) qu'une telle classe est, si α est différent de 1, la réunion de deux intervalles de Γ, appelés respectivement partie commençante et partie finissante de $C(\alpha)$: $C(\alpha)_< = \{\beta \in C(\alpha)$ tels que $\beta < 1\}$ et $C(\alpha)_> = \{\beta \in C(\alpha)$ tels que $\beta > 1\}$, que $C(\alpha)_< = (C(\alpha)_>)^{-1}$, et que, si $\beta \in C(\alpha)$, $\beta^n \in C(\alpha)$ quelque soit $n \in Z^*$.

La relation d'ordre sur Γ induit sur la charpente $\mathscr{C}(\Gamma)$ un ordre total défini de la façon suivante:

Si α et β sont deux représentants supérieurs à 1 de $C(\alpha)$ et $C(\beta)$ respectivement

$$C(\alpha) < C(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

Enfin, pour tout α et β appartenant à Γ, on a

$$C(\alpha\beta) \leq \sup[C(\alpha), C(\beta)].$$

Si $C(\alpha) \neq C(\beta)$, alors

$$C(\alpha\beta) = \sup[C(\alpha), C(\beta)].$$

(2) Un sous-groupe Δ de Γ est dit isolé si les relations $1 \leq \beta \leq \alpha$ et $\alpha \in \Delta$ impliquent $\beta \in \Delta$.

Un sous-groupe isolé est un intervalle de Γ, réunion de classes de comparabilité. L'ensemble des sous-groupes isolés de Γ est totalement ordonné par la relation d'inclusion. On appelle rang de Γ le type d'ordre de l'ensemble $\mathscr{C}(\Gamma)\backslash C(1)$ ([17], chap. 1).

Proposition 1: *Si Γ admet une suite cofinale dénombrable de classes de comparabilité, Γ est la réunion d'une suite croissante dénombrable de sous-groupes isolés.*

Démonstration: Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite cofinale de classes de comparabilité, c'est-à-dire une suite telle que pour tout $C\in\mathscr{C}(\Gamma)$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $C\leq C_{n_0}$. Supposons cette suite croissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Delta_n = \bigcup\limits_{\substack{C\in\mathscr{C}(\Gamma)\\ C\leq C_n}}$ est un sous-groupe isolé de Γ.

La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\Gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$.

Γ est dit initialement dense dans chacun des deux cas suivants:

(a) Γ n'admet pas de plus petit sous-groupe isolé distinct de $\{1\}$

(b) Γ admet un plus petit sous-groupe isolé distinct de $\{1\}$ – celui-ci est alors archimédien – ordre-isomorphe à un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.

Remarque: Si K est un corps valué algébriquement clos, son groupe des valeurs est initialement dense.

(3) Complété de Kurepa de Γ.

Nous considérons l'ensemble totalement ordonné Γ plongé dans son complété de Kourepa $\hat{\Gamma}$ ([9]). $\hat{\Gamma}$ est un treillis complet.

§2. Corps valués

Soit K un corps muni d'une valeur absolue $|\;|$ dont l'ensemble des valeurs est $\Gamma\cup\{0\}$.

On met sur K la structure uniforme dont un système fondamental d'entourages est constitué des ensembles V_r où, pour tout $r\in\Gamma$, $V_r=\{(x,y)\in K$ tels que $|x-y|<r\}$ et la topologie induite par cette structure uniforme.

Anneau de valuation de K. Idéaux premiers

On appellera anneau de valuation de K l'ensemble $\mathscr{A}$ des $x\in K$ tels que $|x|\leq 1$, et on notera k son corps résiduel.

Pour tout idéal premier $\mathscr{P}$ de $\mathscr{A}$, on notera $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ l'anneau de fractions de $\mathscr{A}$ défini par $\mathscr{P}$ et $k_{\mathscr{P}}$ le corps $\mathscr{A}_{\mathscr{P}/\mathscr{P}}$.

L'ensemble $\{|x|$, telle que $x\notin\mathscr{A}_{\mathscr{P}}\}$ est la classe supérieure d'une coupure de Γ, réunion de parties finissantes de classes de comparabilités. On notera $|\mathscr{A}_{\mathscr{P}}|$ l'élément du complété de Kurepa $\hat{\Gamma}$ correspondant à cette classe. De même, l'ensemble $\{|x|$, telle que $x\notin\mathscr{P}\}$ est la classe inférieure d'une coupure de Γ, réunion de parties commençantes de classes de comparabilité. On notera $|\mathscr{P}|$ l'élément correspondant de $\hat{\Gamma}$.

L'application φ définie sur l'ensemble de sous-groupes isolés de Γ par:

$$\varphi : \Delta \to \varphi(\Delta) = \{x \in K, \text{ tels que } \forall \alpha \in \Delta, |x| < \alpha\}$$

est une bijection croissante de cet ensemble sur l'ensemble des idéaux premiers de $\mathscr{A}$([9], chap. B). Il en résulte, d'après la proposition 1, la proposition suivante:

PROPOSITION 2: *Si Γ possède une suite cofinale dénombrable de classes de comparabilité, $\mathscr{A}$ possède une suite décroissante d'idéaux premiers $\mathscr{P}_n$ tels que*

$$\lim_{n \to +\infty} |\mathscr{P}_n| = 0$$

§3. Exemples de corps valués au sens de Krull

Nous allons donner des exemples de corps valués au sens de Krull sur lesquels une analyse non triviale est possible.

A une valeur absolue multiplicative sur un corps on sait associer une valuation additive et réciproquement. Dans les exemples proposés les corps sont munis d'une valuation additive.

1er exemple:

Soit $(G_n)_{n \in Z}$ une famille indexée sur Z de sous-groupes de $\mathbb{R}$ et soit $\Gamma = \underset{n \in Z}{\vdash\!\dashv} G_n$ le produit de Hahn de ces sous-groupes, c'est-à-dire le sous-groupe de $\prod_{n \in Z} G_n$ formé des éléments $(a_n)_{n \in Z}$ tels qu'il existe $n_0 \in Z$, tel que pour tout $n < n_0$, $a_n = 0$, et ordonné lexicographiquement. Si $a = (a_n)_{n \in Z} \in \Gamma$, soit $C(a)$ le plus petit indice n tel que $a_n \neq 0$. Les sous-groupes isolés de Γ sont les ensembles:

$$H_n = \{a = (a_i)_{i \in Z} \text{ tels que } \tau(a) \geq n\}, \quad n \text{ décrivant } Z$$

et les classes de comparabilité, les ensembles:

$$C_n = \{a \in G \text{ tels que } \tau(a) = n\}, \quad n \text{ décrivant } Z.$$

La suite $(C_n)_{-n \in \mathbb{N}}$ est une suite cofinale de la charpente de Γ. Soit k un corps muni d'une valuation et soit $A = k|X|^{\Gamma^+}$ l'ensemble des polynômes généralisés, à coefficients dans k, à exposants dans $\Gamma^+ = \{\alpha \in \Gamma \,|\, \alpha \geq 0\}$.

Les opérations d'addition et de multiplication définies dans A, comme pour les polynômes usuels, munissent A d'une structure d'anneau commutatif intègre.

Définissons l'application

$$v: A \to \Gamma \cup \{\infty\} \text{ par}$$

$$\begin{cases} v(0) = \infty \\ v(s) = \gamma_0 \text{ lorsque } s = a_{\gamma_0} X^{\gamma_0} + \ldots + a_{\gamma_n} X^{\gamma_n}. (\gamma_i \in \Gamma;\ a_{\gamma_i} \in k; \\ \qquad 0 \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n;\ a_{\gamma_0} \neq 0). \end{cases}$$

Soit K le corps des fractions de A. Si $s/t \in K$, posons $v(s/t) = v(s) - v(t)$. v est une valuation additive sur K dont le groupe des valeurs est Γ et le corps résiduel k.

2e exemple:

Considérons $\Gamma = \underset{n \in Z}{\vdash\!\dashv} G_n$ où $G_n = \mathbb{R}$ quel que soit n et prenons pour K le corps des séries formelles généralisées, à coefficients dans $\mathbb{C}$, à exposants dans Γ. $K = \mathbb{C}(\langle X \rangle)^\Gamma$ est l'ensemble des expressions $s = \sum_{\gamma \in \Gamma} s_\gamma X^\gamma$, où $s_\gamma \in \mathbb{C}$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et où le support de s: $\text{supp}(s) = \{\gamma \in \Gamma$ tels que $s_\gamma \neq 0\}$ est bien ordonné selon l'ordre de Γ.

L'application v définie sur K par:

$$\begin{cases} v(0) = \infty \\ \text{si } s \neq 0,\ v(s) = \text{plus petit élément de supp}(s) \end{cases}$$

est une valuation additive sur K, admettant encore Γ pour groupe des valeurs et $\mathbb{C}$ pour corps résiduel.

K muni de cette valuation est complet et algébriquement clos.

I. Ensembles analytiques

Fonctions analytiques – Prolongement analytique uniforme

Dans toute la suite de ce travail, nous considérons un corps K valué complet, algébriquement clos et tel que la charpente de son groupe des valeurs Γ admette une suite cofinale dénombrable.

Nous nous donnons, une fois pour toutes, une suite $(\mathscr{P}_p)_{p \in N}$ d'idéaux premiers de l'anneau de valuation de K, strictement décroissante et telle que $\lim_{p \to +\infty} |\mathscr{P}_p| = 0$.

&1. Notations

n étant un entier ≥ 1, nous considérons K^n muni d'une application à valeurs dans $(\Gamma \cup \{0\})^n$, que nous noterons encore $|\,|$ et appellerons valeur absolue, définie de la façon suivante:

$$\text{si } x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n, \ |x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

$(\Gamma \cup \{0\})^n$ est muni de l'ordre produit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \alpha_i \leq \beta_i.$$

Il est ainsi partiellement ordonné.

Enfin, nous appellerons polydisque, polycercle de centre a, de rayon $r \in \Gamma^n$, que nous noterons $D(a, r)$, $C(a, r)$ respectivement les ensembles des $x \in K^n$ tels que $|x - a| \leq r$, $|x - a| = r$.

Soit $\mathscr{P}$ un idéal premier de l'anneau de valuation de K. Nous noterons $|\mathscr{P}|^{[n]}$ l'élément de $\hat{\Gamma}^n$ dont toutes les composantes sont égales à $|\mathscr{P}|$. Nous noterons φ_k la surjection canonique: $\mathscr{A}_{\mathscr{P}_k} \to k_{\mathscr{P}_k}$.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de $(\mathscr{A}_{\mathscr{P}_k})^n$, nous noterons $\varphi_k(x)$ l'élément de $(k_{\mathscr{P}_k})^n$ $(\varphi_k(x_1), \ldots, \varphi_k(x_n))$ ou s'il n'y a aucune ambiguité nous le noterons $\bar{x}$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est une famille d'indéterminées et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un élément de K^n, on posera:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|; \ X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}; \ \alpha y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i;$$

$$y^\alpha = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i}.$$

Soit $f = \dfrac{\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha}{\sum_\beta b_\beta X^\beta}$ une fraction rationnelle à n indéterminées dont tous les coefficients appartiennent à l'anneau $\mathscr{A}_{\mathscr{P}_k}$ et tel que le polynôme $\sum_\beta \varphi_k(b_\beta) X^\beta$ ne soit pas nul. Nous noterons $\varphi_k(f)$, ou $\bar{f}$ s'il n'y a pas d'ambiguité, l'élément de $k_{\mathscr{P}_k}(X)$ définie par:

$$\varphi_k(f) = \frac{\sum_\alpha \varphi_k(a_\alpha) X^\alpha}{\sum_\beta \varphi_k(b_\beta) X^\beta}.$$

&2. Fonctions de valuation

2.1. *Fonction de valuation d'un polynôme*

Soit $P(X) = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha X^\alpha$ (J partie finie de $\mathbb{N}^n$) un polynôme aux indéterminées $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

On appelle fonction de valuation de P l'application

$$\begin{aligned} M_P : (\Gamma \cup \{0\})^n &\to \Gamma \cup \{0\} \\ r &\to \sup_{\alpha \in J} |a_\alpha| r^\alpha \end{aligned}$$

r est dite valeur régulière pour P s'il existe un seul multi-indice α tel que $M_P(r) = |a_\alpha| r^\alpha$, et valeur singulière dans le cas contraire.

La fonction M_P possède les propriétés suivantes:

– elle est croissante, continue,

– pour tout $r \in \Gamma$

$$M_P(r) = \sup_{|x|<r} |P(x)| = \sup_{|x|=r} |P(x)| = \sup_{|x|\leq r} |P(x)|$$

– si $r \in \Gamma^n$ est valeur régulière

$$|P(x)| = M_P(r) \text{ pour tout } x \in K^n \text{ tel que } |x| = r$$

– si $r \in \Gamma^n$ est valeur singulière, il existe $x_0 \in K^n$, tel que $|x_0| = r$ et $P(x_0) = 0$, et réciproquement.

La fonction de valuation d'un polynôme à une indéterminée a été étudiée par R. Hobeika ([9]).

En ce qui concerne les polynômes à plusieurs indéterminées.

– les deux premières propriétés se démontrent comme dans le cas des polynômes à une indéterminée en tenant compte du fait que Γ est initialement dense et que le corps résiduel de K est infini.

– Les deux dernières propriétés s'obtiennent de la même façon qu'en analyse ultramétrique classique ([16], p. 201).

2.2. *Fonction de valuation d'une fraction rationnelle*

Soit $f = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle aux indéterminées $X_1 \ldots X_n$. Sa fonction de valuation est l'application:

$$\begin{aligned} M_f : (\Gamma \cup \{0\})^n &\to \Gamma \cup \{0\} \\ r &\to M_f(r) = M_P(r)/M_Q(r) \end{aligned}$$

r est dite valeur exceptionnelle si elle est valeur singulière de son dénominateur ou de son numérateur.

– M_f est une fonction continue
– si f n'a pas de pôle dans le polydisque $D(0,r)$

$$M_f(r) = \sup_{|x|=r}|f(x)| = \sup_{|x|\le r}|f(x)|.$$

&3. Ensembles analytiques

3.1. *Définitions*

(a) Un *élément analytique* sur une partie D de K^n est la limite uniforme sur D d'une suite de fractions rationnelles sans singularités dans D. Une telle suite est appelée *suite approximante* de l'élément analytique.

(b) Une partie D de K^n est appelée *ensemble analytique*, si tout élément analytique qui s'annule sur un polydisque contenu dans D est nul sur D tout entier.

3.2. *Résultats préliminaires*

LEMME 1: *Soient $\mathscr{P}$ un idéal premier de l'anneau de valuation de K, Q un polynôme à n indéterminées tel que $|Q(0)| > |\mathscr{P}|$ ne s'annulant pas dans le polydisque $D(0,|\mathscr{P}|^{[n]})$. Si $x\in(\mathscr{A}_{\mathscr{P}})^n$ est tel que dans $k_{\mathscr{P}}$, $\bar{Q}(\bar{x}) = 0$, il existe $y\in(\mathscr{A}_{\mathscr{P}})^n$ tel que $Q(y) = 0$ et $|x-y| < |\mathscr{P}|^{[n]}$.*

(a) Démontrons ce lemme dans le cas $n = 1$. Ecrivons Q sous la forme $Q(X) = Q(0)\prod_{i=1}^{q}(1-q_i^{-1}X)$. Quel que soit $i\in\{1,\dots,q\}$, $q_i^{-1}\in\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$. Dans $k_{\mathscr{P}}[X]$, $\bar{Q}(X) = \overline{Q(0)}\prod_{i=1}^{q}(1-\overline{q_i^{-1}}X)$. Si $q_i\notin\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$, $\overline{q_i^{-1}} = 0$. Les zéros de $\bar{Q}$ sont donc les classes modulo $\mathscr{P}$ des zéros de Q qui appartiennent à $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$.

Donc $\bar{Q}(x) = 0$ équivaut à: il existe $q_i\in\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ tel que $x\equiv q_i \bmod \mathscr{P}$ et $Q(q_i) = 0$.

(b) Supposons $n > 1$.

Soient $Q(X) = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$ et $x = (x_1,\dots,x_n)\in(\mathscr{A}_{\mathscr{P}})^n$. Désignons par $Q_x(Y)$ le polynôme à une indéterminée Y

$$Q_x(Y) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha Y^{|\alpha|}.$$

Puisque Q a ses coefficients dans $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ et que $x\in(\mathscr{A}_{\mathscr{P}})^n$, Q_x a ses coefficients dans $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$.

$$|Q_x(0)| = |Q(0)| > |\mathscr{P}|.$$

Si $\lambda\in\mathscr{P}$, $\lambda x\in D(0,|\mathscr{P}|^{[n]})$, donc $Q_x(\lambda)$ est non nul. Dans $k_{\mathscr{P}}$, $\bar{Q}_x(\bar{1}) = \bar{Q}(\bar{x}) = 0$. D'après a) il existe $\lambda\in\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ tel que $Q_x(\lambda) = 0$ et $|\lambda - 1| \le |\mathscr{P}|$. $y = \lambda x$ appartient à $(\mathscr{A}_{\mathscr{P}})^n$ et vérifie $Q(y) = 0$ et $|x-y| < |\mathscr{P}|^{[n]}$.

Lemme 2 (Lemme fondamental): *Soient $\mathscr{P}$ un idéal premier de $\mathscr{A}$, r un élément de Γ^n tel que $r > |\mathscr{P}|^{[n]}$, f et g deux fractions rationnelles à coefficients dans $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$, sans pôle dans $D(0,r)$*

$$M_{f-g}(r) < |\mathscr{P}| \Rightarrow \bar{f} = \bar{g} \text{ dans } k_{\mathscr{P}}(X).$$

Quel que soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D(0,r)$, $|f(x) - g(x)| < |\mathscr{P}|$. Si $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble

$$H_i = \{\overline{x_i} \in k_{\mathscr{P}} \text{ tel que } |\mathscr{P}| < x_i < r_i\}$$

est une partie infinie de $k_{\mathscr{P}}$; sur $\prod_{i=1}^n H_i$, $\bar{f} - \bar{g}$ est nul donc $\bar{f} - \bar{g}$ est la fraction nulle.

Lemme 3: *Soit f un élément analytique sur un ouvert D, et soit x_0 un point de D. Il existe une suite approximante de f sur D possédant les propriétés suivantes*:

– *Pour tout x de D, $|f(x) - f_p(x)| < |\mathscr{P}_p|$.*
– *Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, il existe*

$$P_p \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_0}}[X],\ Q_p \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_0}}[X] \text{ vérifiant } Q_p(x_0) = 1 \text{ tels que } f_p = \frac{P_p}{Q_p}.$$

La suite $(|\mathscr{P}_p|)_{p \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, on peut extraire de toute suite approximante de f sur D une sous-suite qui vérifie la première condition. Soit (f_p) une telle suite.

Soit $r = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n$ tel que le polydisque $D(x_0, r)$ soit contenu dans D. La translation $x \to x - x_0$ transforme l'ouvert D en l'ouvert $D' = D - x_0$ qui contient le polydisque $D(0,r)$, l'élément analytique f sur D en l'élément analytique f' sur D' défini par $f'(x) = f(x + x_0)$ qui admet pour suite approximante la suite f'_p définie par

$$f'_p(X) = f_p(x + x_0)$$

$$f'_p(X) = \frac{P'_p(X)}{Q'_p(X)} = \frac{\sum\limits_{\alpha} a_\alpha^p X^\alpha}{\sum\limits_{\beta} b_\beta^p X^\beta}$$

$Q'_p(0)$ est non nul. On peut supposer $Q'_p(0) = 1$. Q'_p ne s'annule pas sur $D(0,r)$. Il résulte des propriétés de la fonction de valuation d'un polynôme mentionnée au paragraphe précédent que pour tout $x \in D(0,r)$

$$|Q'_p(x)| = 1 = \sup_\beta |b_\beta^p|\, r^\beta.$$

Soit $p_1 \in N$ tel que $|\mathscr{P}_{p_1}| < \inf(r_1, \ldots, r_n)$ alors $Q'_p \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_1}}[X]$ quel que soit $p \in \mathbb{N}$.

Sur le polydisque $D(0, r)$ f' est borné. Soit $M \in \Gamma$, $M > 1$ tel que $\forall x \in D(0, r)$, $|f'(x)| < M$. Ceci implique $|P'_p(x)| < M$ $\forall p \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in D(0, r)$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sup_\alpha |a^p_\alpha| r^\alpha < M$.

Soit $p_2 > p_1$ tel que les classes de comparabilité de M soient contenues dans $\mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_2}}$. Alors

$$\forall p > p_2, f'_p \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_2}}(X) \cdot f_p(X) = \frac{P_p(X)}{Q_p(X)} = \frac{P'_p(X - x_0)}{Q'_p(X - x_0)}$$

$$Q_p(X) = Q'_p(X - x_0) \text{ donc } Q_p(x_0) = 1.$$

$$P_p(X) = P'_p(X - x_0) = \sum_\alpha a^p_\alpha (X - x_0)^\alpha$$

Soit $p_0 > p_2$ tel que $x_0 \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_0}$ alors $\forall p$, $\forall \alpha$, $a^p_\alpha \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_0}$, $x_0 \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_0}$ donc $P_p(X) \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_0}[X]$. De même $Q_p(X) = Q'_p(X - x_0) \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_0}(X)$.

3.3. Théorème: *Tout ouvert de K^n est un ensemble analytique.*

Soit f un élément analytique sur un ouvert de K^n qui est nul sur un polydisque $D(a, r)$ contenu dans cet ouvert. Par la translation $x \to x - a$ ramenons nous au cas où l'ouvert D de K^n contient le polydisque $D(0, r)$ sur lequel l'élément analytique f est nul.

Soit (f_p) une suite approximante de f sur D possédant les propriétés du lemme 3. Puisque $f(x) = 0$ pour tout $x \in D(0, r)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_{f_p}(r) < |\mathscr{P}_p|$. D'après le lemme fondamental il en résulte que pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'élément $\bar{f}_p$ de $k_{\mathscr{P}_0}(X)$ est nul.

Soit $x \in D \backslash D(0, r)$. D étant ouvert il existe $\rho \in \Gamma^n$ tel que $D(x, \rho)$ soit contenu dans D.

Soit $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|\mathscr{P}_{p_1}|^{[n]} < \inf\left(r, \rho, \dfrac{1}{|x|}\right)$, $\forall p \geq p_1$, $\varphi_p(x)$ n'est pas pôle de $\varphi_p(f_p)$ d'après le lemme 1. Donc dans $k_{\mathscr{P}_p} \bar{f}_p(\bar{x}) = \overline{f_p(x)} = 0$. $\forall p \geq p_1$, $|f_p(x)| < |\mathscr{P}_p|$ implique $f(x) = 0$.

&4. Fonctions analytiques

L'étude d'un prolongement analytique par éléments analytiques faite en analyse ultramétrique classique montre que pour qu'une famille d'ensembles analytiques puisse servir de "briques" pour un "bon" prolongement analytique il faut que cette famille soit stable par intersection finie. C'est le cas des ouverts de K^n. Nous définirons donc les fonctions analytiques de la façon suivante.

4.1. DÉFINITIONS: Une fonction f définie sur une partie D de K^n est dite *fonction analytique* s'il existe une famille *enchaînée* d'ouverts θ_i recouvrant D telle que la restriction de f à chaque θ_i soit un élément analytique sur θ_i.

Rappelons que la famille $(\theta_i)_{i\in I}$ est dite enchaînée si, quels que soient les éléments θ et ω de cette famille, il existe une sous-famille finie $(\theta_n)_{n\in[1,\ldots,p]}$ telle que $\theta_1 = \theta$, $\theta_p = \omega$, pour tout $n \in \{1,\ldots,p-1\}$ $\theta_n \cap \theta_{n+1} \neq \emptyset$. Il résulte immédiatement de cette définition que les fonctions analytiques vérifient le théorème d'unicité à savoir:

4.2. THÉORÈME D'UNICITÉ: *Si une fonction analytique sur un ouvert D de K^n est nulle sur un polydisque contenu dans cet ouvert, elle est nulle sur D tout entier.*

L'étude plus poussée des fonctions analytiques fait apparaître une certaine catégorie d'ouverts qui jouent un rôle important.

4.3. DÉFINITION: Nous dirons qu'un ouvert A de K^n est un *ouvert d'épaisseur non nulle* s'il est borné et s'il existe $r \in \Gamma^n$ tel que pour tout $x \in A$ le polydisque $D(x, r)$ soit contenu dans A.

4.4. LEMME 4: *Soit A un ouvert d'épaisseur non nulle de K^n contenant O, et soit f un élément analytique sur A.*

– f admet sur A une suite approximante $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui satisfait aux conditions énumérées au lemme 3 et à la condition supplémentaire suivante:

– $\exists p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_1$ l'élément $\varphi_p(f_p)$ de $k_{\mathscr{P}}(X)$ est irréductible.

Soit $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite approximante de f sur A possédant les propriétés énoncées au lemme 3.

A étant d'épaisseur non nulle il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset \mathscr{A}_{\mathscr{P}_1}$ et $\forall x \in A$ $D(x, |\mathscr{P}_{p_1}|^{[n]}) \subset A$.

Soit d'autre part, pour tout $p \geq p_2 = \sup(p_0, p_1)$, f une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_2}}$ tel que $\varphi_p(f_p)$ soit irréductible, et vérifie

$$\varphi_p(f_p) = \varphi_p(g_p).$$

D'après le lemme 1, pour aucun $x \in A$, $\varphi_p(x)$ n'est pôle de $\varphi_p(g_p)$ et à fortiori de $\varphi_p(f_p)$. Donc on *a* pour tout $x \in A$

$$|f_p(x) - g_p(x)| < |\mathscr{P}_p|$$

d'où il résulte que la suite (f_p) est une suite approximante de f sur A.

4.5. Théorème: *Toute fonction analytique sur un ouvert A d'épaisseur non nulle est en fait élément analytique sur A.*

Démontrons le résultat préliminaire suivant:

Soient A et B deux ouverts d'épaisseur non nulle, non disjoints, A contenant 0. *Soit f un élément analytique sur A et sur B. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite approximante de f sur A possédant les propriétés énoncées au lemme* 4. *Alors il existe $p_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_1$, f_p n'ait pas de pôle dans B.*

Supposons d'abord que $0\in A\cap B$, et soit $r\in\Gamma^n$ tel que $D(0,r)$ soit contenu dans $A\cap B$. Soit $p_0\in\mathbb{N}$ tel que: $\forall x\in A$, $D(x,|\mathscr{P}_{p_0}|^{[n]})\subset A$ et

$$\forall x\in B,\ D(x,|\mathscr{P}_{p_0}|^{[n]})\subset B.$$

Soit (g_p) une suite approximante de f sur B possédant les propriétés énoncées au lemme 4.

$$M_{f_p-g_p}(r) < |\mathscr{P}_p|.$$

Donc pour tout $p\geq p_0$, $\varphi_p(f_p)=\varphi_p(g_p)$.

$\varphi_p(g_p)$ n'a aucun pôle dans $\varphi_p(B)$ donc $\varphi_p(f_p)$ non plus puisque ces 2 fractions sont irréductibles. Il en résulte d'après le lemme 1 que f_p n'a pas de pôle dans B. Supposons maintenant que $0\in A$ seulement et considérons toujours la suite approximante (f_p) de f sur A.

Ramenons-nous au cas précédent par une translation $x\to x-x_0$, x_0 étant un point de $A\cap B$. Soit $(F'_p)_p$ une suite approximante de l'élément analytique f' sur $A-x_0$ défini par $f'(x)=f(x+x_0)$ possédant les propriétés énoncées au lemme 4. Alors d'après ce qui précède, à partir d'un certain rang, F'_p n'a pas de pôle dans $B-x_0$, donc la fraction F_p définie par $F_p(x)=F'_p(x-x_0)$ n'a pas de pôle dans B. A partir d'un certain rang on a $\varphi_p(F_p)=\varphi_p(f_p)$. D'après le lemme 1, $\varphi_p(F_p)$ n'a pas de pôle dans $\varphi_p(B)$ donc $\varphi_p(f_p)$ non plus, donc f_p n'a pas de pôles dans B.

Démonstration du théorème

Par une translation ramenons-nous au cas où $0\in A$. Soit $D(0,r)$ un polydisque contenu dans A sur lequel f est élément analytique et soit (f_p) une suite approximante de f sur A définie par le lemme 4.

Alors il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall p\geq p_0,\ \varphi_p(f_p)=\varphi_p(f_{p+1}).$$

Montrons qu'il existe $P_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\geq P_0$, quel que soit

$x \in A$, $\varphi_p(x)$ n'est pôle ni de $\varphi_p(f_p)$ ni de $\varphi_p(f_{p+1})$. Il en résultera que la suite (f_p) est une suite approximante de f sur A puisque on aura $\forall p \geq P_0$ $|f_p(x) - f_{p+1}(x)| < |\mathscr{P}_p|$ pour tout $x \in A$. Soit $x \in A$. Il existe une chaine finie d'ouverts $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ reliant 0 à x.

Soient $D_0 = D(0, \rho_0)$ un polydisque contenu dans θ_1.

$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} D_i = D(x_i, \rho_i)$ un polydisque contenu dans $\theta_i \cap \theta_{i+1}$

$$D_n = D(x, \rho_n) \text{ un polydisque contenu dans } \theta_n.$$

La famille $A_i = (D_i \cup D_{i+1})_{0 \leq i \leq n-1}$ est une chaine d'ouverts d'épaisseur non nulle reliant 0 à x.

D'après le résultat préliminaire il existe $N_x \in \mathbb{N}$ (dépendant des ouverts A_i) tel que $\forall p \geq N_x$, f_p n'a pas de pôle dans $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$. Soit $p_2 \geq p_0$ tel que: $\bigcup_{x \in A} D(x, |\mathscr{P}_{p_2}|^{[n]}) \subset A$, $A \subset \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{p_2}}$. Pour tout $p > p_2$, f_p satisfait aux conditions du lemme 4. Montrons que si $p > p_2$, f_p n'a pas de pôle dans A. Supposons que $x_0 \in A$ soit pôle d'une fraction rationnelle $f_p = \dfrac{P_p}{Q_p}$, p étant supérieur à p_2. Alors dans $k_{\mathscr{P}_p}(X)$ on a: $\bar{Q}_p(\bar{x}) = 0$.

Mais puisque $\bar{f}_p = \overline{f_{p+1}}$ dans $k_{\mathscr{P}_p}(X)$ et que $\bar{f}_p$ est irréductible on a aussi $\overline{Q_{p+1}}(\bar{x}) = 0$. Donc il existe $x_1 \in K^n$ tel que $|x_0 - x_1| < |\mathscr{P}_p|$ et $Q_{p+1}(x_1) = 0$. On définit ainsi par récurrence une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de K^n possédant les propriétés suivantes:

- x_k est pôle de f_{p+k}
- $|x_k - x_{k+1}| < |\mathscr{P}_{p+k}|$.

La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit x sa limite. $x \in A$ puisque $x_0 \in A$ et que $|x - x_0| < |\mathscr{P}_p|$, et x est point limite d'une suite de singularités des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or on vient de voir que ceci est impossible. Le lemme 1 montre que pour $p \geq p_2$, $\varphi_p(f_p)$ et $\varphi_p(f_{p+1})$ n'ont aucun pôle dans $\varphi_p(A)$.

Il résulte de ce théorème que les fonctions analytiques satisfont au principe du prolongement analytique uniforme à savoir:

4.6. THÉORÈME (Principe du prolongement analytique uniforme): *Soit $(D_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq p}$ une famille finie d'ouverts, telle que $D_\alpha \cap D_{\alpha+1} \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $D_1 \cap D_p \neq \emptyset$. Soit, pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, f_α un élément analytique sur D_α. Si pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, p-1\}$ $f_\alpha(x) = f_{\alpha+1}(x)$ sur $D_\alpha \cap D_{\alpha+1}$, alors $f_1(x) = f_p(x)$ sur $D_1 \cap D_p$.*

Supposons que $0 \in D_1$ et soit $x \in D_1 \cap D_p$.

On a vu dans la démonstration précédente qu'il existe une chaine finie $(A_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq p}$ d'ouverts d'épaisseur non nulle reliant 0 à x et telle que f_α soit élément analytique sur A_α. Soit (f_n^1) une suite approximante de f_1 sur A_1 possédant les propriétés énumérées du lemme 4. Alors d'après la démonstration précédente cette suite est une suite approximante des f_α sur A_α pour tout $\alpha \in \{0, \ldots, p\}$ en particulier de f_p sur A_p. Donc $f_p(x) = f_1(x)$.

4.7. THÉORÈME: *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ouvert D de K^n soit une fonction analytique est que sa restriction à tout ouvert A d'épaisseur non nulle contenue dans D soit élément analytique sur A.*

La condition est évidemment nécessaire d'après le théorème 2. Elle est suffisante car tout ouvert D de K^n est réunion d'une suite croissante donc enchaînée d'ouverts d'épaisseur non nulle. En effet soit pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$B_q = \{x \in D \text{ tq, } \exists y \in K^n \backslash D \text{ tel que } |x - y| < |\mathscr{P}_q|^{[n]}.$$

$$D'_q = D \backslash \bigcup_{x \in B_q} D(x, |\mathscr{P}_q|^{[n]}).$$

$$D_q = D'_q \cap (\mathscr{A}_{\mathscr{P}_q})^n.$$

La suite $(D_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ouverts qui recouvre D. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $D \subset (\mathscr{A}_{\mathscr{P}_q})^n$ et pour tout $x \in D_q$ le polydisque $D(x, |\mathscr{P}_q|^{[n]})$ est contenu dans D.

4.8. THÉORÈME: *Soit f une fonction analytique sur un ouvert D de K^n. Il existe un ouvert maximal sur lequel f se prolonge analytiquement.*

L'ensemble des couples (θ, f_θ) où θ est un ouvert contenant D et f_θ une fonction analytique sur θ qui prolonge f, muni de la relation d'ordre: $(\theta, f_\theta) < (\theta', f_{\theta'})$ si et seulement si $\theta \subset \theta'$ et $f_{\theta'}$ prolonge f_θ, est un ensemble inductif. L'ouvert maximal sur lequel f se prolonge analytiquement est

$$\bigcup_{(\theta, f_\theta) \in A} \theta.$$

II. Opérations rationnelles sur l'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert

Composée, dérivation de fonctions analytiques

Le théorème 4.7. du chapitre précédent va nous permettre de montrer que l'analyticité des fonctions est conservée par les opérations rationnelles-somme, produit, quotient- par la convergence uniforme, la substitution et la dérivation.

D étant un ouvert de K^n, notons $H(D)$ l'ensemble des éléments analytiques sur D et $\mathscr{A}(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur D.

&1. L'ensemble $H(D)$ des éléments analytiques sur un ouvert D de K^n

Nous énonçons d'abord un certain nombre de résultats sur les éléments analytiques qui ont leurs équivalents en analyse ultramétrique classique et se démontrent de la même façon.

1.1. PROPOSITION: *$H(D)$ est un espace vectoriel sur K.*

1.2. PROPOSITION: *Si D est d'épaisseur non nulle tout élément analytique sur D est borné. Dans ce cas, $H(D)$ est une algèbre sur K.*

1.3. PROPOSITION: *Soit $f \in H(D)$ et $\alpha \in \Gamma$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| > \alpha$ alors f est inversible dans $H(D)$.*

1.4. PROPOSITION: *La limite uniforme sur D d'une suite d'éléments de $H(D)$ est un élément de $H(D)$.*

Si D est d'épaisseur non nulle, $H(D)$ muni de la "norme":

$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$ *est une "algèbre de Banach".*

&2. Somme, produit, quotient de fonctions analytiques sur un ouvert de K

Il découle immédiatement de la proposition 1.1. et du théorème (4.7. chap. I) la proposition suivante:

2.1. PROPOSITION: *$\mathscr{A}(D)$ est une algèbre sur K.*

2.2. PROPOSITION: *Soit f une fonction analytique sur D non identiquement nulle et soit $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Alors $\dfrac{1}{f}$ est une fonction analytique sur l'ouvert $D \backslash Z(f)$.*

Montrons que pour tout ouvert A d'épaisseur non nulle contenu dans $D \backslash Z(f)$, $\dfrac{1}{f} \in H(A)$. La proposition résultera immédiatement du théorème 4.7. Soit $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ tendant vers 0.

Sur l'ouvert $\theta_p = \{x \in A$ tels que $|f(x)| > \alpha_p\}$, $\frac{1}{f}$ est élément analytique d'après la proposition 1.3.

La famille $(\theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ recouvre A et est enchaînée. Il en résulte que $\frac{1}{f}$ est une fonction analytique sur A et puisque A est d'épaisseur non nulle c'est un élément analytique sur A.

2.3. Proposition: *La limite uniforme d'une suite de fonctions analytiques sur D est une fonction analytique sur D.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.7. chap. I et de la proposition 1.4.

2.4. Proposition: *Si f et g sont deux fonctions analytiques respectivement sur les ouverts Δ et D de K et si $g(D) \subset \Delta$ alors $f \circ g$ est une fonction analytique sur D.*

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts recouvrant Δ tels que la restriction de f à chaque A_n soit un élément analytique. La famille $g^{-1}(A_n)$ est une suite croissante d'ouverts recouvrant D. Sur chacun de ces ouverts $f \circ g$ est une fonction analytique.

En effet, soit $g^{-1}(A_i)$ un tel ouvert, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite approximante de f sur A_i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \circ g = \frac{P_n \circ g}{Q_n \circ g}$ est une fonction analytique puisque les opérations rationnelles conservant l'analyticité des fonctions et que $Q_n \circ g$ ne s'annule pas sur D.

La suite $(f_n \circ g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $g^{-1}(A_i)$ vers $f \circ g$ qui est donc, d'après la proposition 2.2. une fonction analytique sur $g^{-1}(A_i)$. $f \circ g$ est par conséquent une fonction analytique sur D.

3.1. Proposition: *Tout élément analytique sur un ouvert A d'épaisseur non nulle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable qui sont des éléments analytiques sur cet ouvert.*

Soit f un élément analytique sur l'ouvert A et soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite approximante de f définie au lemme 3 du chapitre I.

Pour toute variable x_i et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi_p\left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_p(f_p))$$

Pour tout $p > p_0$, $\varphi_p(f_p) = \varphi_p(f_{p+1})$ donc

$$\varphi_p\left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i}\right) = \varphi_p\left(\frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_i}\right)$$

et puisque A est un ouvert d'épaisseur non nulle il existe $p_1 \geq p_0$ tel que pour tout $p \geq p_1$ et tout $x \in A$, on ait

$$\left|\frac{\partial f_p(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{p+1}(x)}{\partial x_i}\right| < |\mathscr{P}_p|$$

La suite $\left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A. Sa limite $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est un élément analytique sur A.

3.2. Proposition: *Toute fonction analytique sur un ouvert de K^n admet des dérivées partielles de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur cet ouvert.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème (4.7. chap. I).

III. Répartition des zéros des fonctions analytiques sur un ouvert de K

&1. Zéros d'un élément analytique

Rappelons qu'un élément analytique f sur un ouvert A de K est dit quasi-inversible s'il peut se mettre sous la forme

$$f = Zg$$

où Z est un polynôme qui a tous ses zéros dans A et g un élément analytique inversible sur A. ([2], chap. I).

1.1. Proposition: *Si A est un ouvert d'épaisseur non nulle, tout élément analytique sur A est quasi-inversible.*

Soit f un élément analytique non identiquement nul sur l'ouvert A d'épaisseur non nulle. Par une translation on peut se ramener au cas où A contient 0 et où $f(0) \neq 0$.

f admet une suite approximante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant aux conditions du lemme 3 (chapitre I).

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n peut s'écrire

$$f_n(X) = \frac{f_n(0)\prod_i\left(1-\dfrac{1}{p_{n,i}}X\right)}{\prod_j\left(1-\dfrac{1}{q_{n,j}}X\right)}$$

Puisque $f(0)\neq 0$, il existe $\alpha\in\Gamma$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0, f_n n'ait pas de zéros dans le disque $D(0,\alpha)$. Soit $n_1\geq n_0$ tel que

$$|\mathscr{P}_{n_1}| < \inf\left(\alpha, \frac{1}{|f(0)|}\right) \text{ et } \bigcup_{x\in A} D(x, |\mathscr{P}_{n_1}|) \subset A,\ A\subset \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{n_1}}.$$

Pour tout $n > n_1$, $\dfrac{1}{p_{n,i}}$ et $\dfrac{1}{q_{n,j}}$ appartiennent à $\mathscr{A}_{\mathscr{P}_{n_1}}$ ainsi que $f_n(0)$ et l'on a d'autre part dans $k_{\mathscr{P}_n}(X)$

$$\overline{f_n} = \overline{f_{n+1}}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\prod_{p_{n,i}\in A}(1-\overline{p_{n,i}^{-1}}X)\prod_{p_{n,i}\notin A}(1-\overline{p_{n,i}}X)\prod_j(1-\overline{q_{n,j}^{-1}}X) =$$
$$= \prod_{p_{n+1,i}\in A}(1-\overline{p_{n+1,i}^{-1}}X)\prod_{p_{n+1,i}\notin A}(1-\overline{p_{n+1,i}^{-1}}X)\prod_j(1-\overline{q_{n,j}^{-1}}X)$$

Ceci implique pour tout $n > n_1$

$$\prod_{p_{n,i}\in A}(1-\overline{p_{n,i}^{-1}}X) = \prod_{p_{n+1,i}\in A}(1-\overline{p_{n+1}^{-1}}X)$$

Posons

$$P_n(X) = \prod_{p_{n,i}\in A}(1-p_{n,i}^{-1}X)$$

$$R_n(X) = \frac{f_n(X)}{P_n(X)}$$

Dans $k_{\mathscr{P}_n}(X)$ on a donc, si $n > n_1$

$$\overline{P_n} = \overline{P_{n+1}}$$
$$\overline{f_n} = \overline{f_{n+1}}$$

et par conséquent

$$\overline{R_n} = \overline{R_{n+1}}$$

Puisque pour tout $n > n_1$, $p_{n,i} \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_{n_1}}$, on a

$$d^\circ P_n = d^\circ \varphi_n(P_n) = d^\circ \varphi_n(P_{n+1}) = d^\circ P_{n+1}.$$

P_n et P_{n+1} ont même nombre de zéros. Numérotons ces zéros de façon que

$$|p_{n,i} - p_{n+1,i}| < |\mathscr{P}_n|$$

Soit p_i la limite de la suite $(p_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$. La suite P_n converge uniformément sur A vers la fonction polynôme

$$Z(X) = \prod_i (1 - p_i^{-1} X)$$

et la suite de fractions rationnelles f_n/P_n vers un élément analytique sur A, g qui ne s'annule pas sur A.

Il existe donc un polynôme Z ayant tous ses zéros dans A et un élément analytique g sur A ne s'annulant pas dans A, tels que

$$\text{pour tout } x \in A,\ f(x) = Z(x)g(x).$$

Puisque g ne s'annule pas sur A, $\dfrac{1}{g}$ est fonction analytique sur A. Mais sur A, toute fonction analytique est en fait élément analytique, donc g est élément analytique inversible sur A.

Remarque 1: La décomposition d'un élément analytique quasi-inversible f, sous la forme $f = Zg$ est unique, à un facteur constant près.

En effet, supposons que f admette deux décompositions:

$$f = Zg = Z'g'$$

$\dfrac{Z}{Z'} = g' \dfrac{1}{g}$ est élément analytique inversible sur A, ce qui implique que $\dfrac{Z}{Z'}$ est une constante non nulle ainsi que g'/g.

Remarque 2: Ces résultats sont assez différents de ceux obtenus en analyse ultramétrique classique. A. Escassut a caractérisé les ouverts infra-connexes A, tels que, tout élément de $H(A)$ soit quasi-inversible: il faut et il suffit, que A ne contienne pas de T-filtre ([2], chap. V). Or, le cas où cette condition est le plus facilement réalisée est celle où l'épaisseur de A est nulle.

REMARQUE 3: Il résulte de la proposition 1.1, le corollaire suivant:

1.2. PROPOSITION: *Si A est un ouvert d'épaisseur non nulle $H(A)$ est une K-algèbre principale.*

Soit I un idéal non nul de $H(A)$. $I \cap K[X]$ est un idéal de $K[X]$. Soit P_0 un générateur de $I \cap K[X]$. Alors P_0 engendre I. En effet, si $f \in I$, il existe $P \in K[X]$ et g, élément inversible de $H(A)$ tel que $f = Pg$. P appartient donc à I et est de la forme $P_0 Q$ où $Q \in K[X]$, donc $f = P_0 Q g$.

&2. Zéros d'une fonction analytique

Soit f une fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert quelconque D. On sait qu'il existe une suite croissante d'ouverts, d'épaisseur non nulle $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ (théorème 4.7. chap. I). Sur chaque D_n, f est élément analytique. Elle y a donc un nombre fini de zéros, et s'écrit sous la forme $f = P_n g_n$, où $P_n \in K[X]$ et a tous ses zéros dans D_n et g_n est élément analytique inversible sur D_n. Il en résulte immédiatement la proposition suivante

PROPOSITION 3: *L'ensemble des zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert est un ensemble discret au plus dénombrable.*

DÉFINITION: Soit a un zéro de f et $D(a, r)$ un disque sur lequel f n'a pas d'autres zéros que a. Il existe un élément analytique inversible sur ce disque g et un entier $\alpha \geq 1$, tel que

$$\text{pour tout } x \in D(a, r) \quad f(x) = (x - a)^{\alpha} g(x)$$

α ne dépend pas de r. On l'appellera l'ordre de multiplicité du zéro a de f.

Nous allons montrer que toute fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert D peut se mettre sous la forme d'un produit convergent de fonctions analytiques ayant chacune un nombre fini de zéros sur D, et d'une fonction analytique inversible sur D.

PROPOSITION 4: *Si f est une fonction analytique sur un ouvert D, non identiquement nulle, il existe une suite de fractions rationnelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction analytique g inversible sur D telles que:*
– le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge sur D vers une fonction analytique Π
– $f = \Pi g$.

Soit Z l'ensemble des zéros de f sur D. Si Z est un ensemble fini, la démonstration de la proposition est immédiate. Supposons donc Z infini. Pour tout a_i de Z, notons α_i son ordre de multiplicité.

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante d'ouverts bornés:

$$D_n = \mathscr{A}_{\mathscr{P}_n} \cap [D \setminus \bigcup_{y\in B_n} D(y, |\mathscr{P}_n|)]$$

où $B_n = \{y \in K\setminus D \text{ tels que } \exists x \in E \text{ tel que } |x-y| < |\mathscr{P}_n|\}$.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $D_{n_0} \cap Z$ soit non vide et pour tout $j > 0$, soit n_j le plus petit entier tel que

$$D_{n_{j-1}} \cap Z \subsetneqq D_{n_j} \cap Z$$

Z étant un ensemble infini, la suite n_j est strictement croissante et est une partie cofinale de $\mathbb{N}$.

Il en résulte que la suite $(|\mathscr{P}_{n_j}|)_j$ est une suite cofinale de la suite $(|\mathscr{P}_n|)_n$. On peut donc se ramener à la situation suivante:
– la suite $(\mathscr{P}_j)_j$ est strictement décroissante et $\lim_{j\to\infty} |\mathscr{P}_j| = 0$
– $D = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j$, $Z \cap D_0 \neq \emptyset$
– $\forall j \in \mathbb{N} \quad D_j \cap Z \subsetneqq D_{j+1} \cap Z$.

Désignons par Z_j l'ensemble $Z \cap (D_{j+1} \setminus D_j) = \{a_j^k,\ k = 1, \ldots, n_j\}$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, définissons une fraction rationnelle sans pôle dans D ayant pour ensemble de zéros Z_j.

Posons

$$v_0 = \prod_{k=1}^{n_0} (X - a^k)^{\alpha^k} \quad \text{où} \quad a^k \in D_0$$

Soit $j > 0$ et soit $a_j^k \in Z_j$

$$a_j^k \notin D_j \Rightarrow \begin{cases} a_j^k \notin \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j} \\ \text{ou bien} \\ a_j^k \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j} \text{et il existe } y_j^k \in K\setminus D \text{ tel que} \\ |a_j^k - y_j^k| < |\mathscr{P}_j| \end{cases}$$

Si $a_j^k \notin \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j}$ posons $w_j^k = \left(1 - \dfrac{X}{a_j^k}\right)^{\alpha_j^k}$

Si $a_j^k \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j}$ posons $w_j^k = \left(1 - \dfrac{y_j^k - a_j^k}{X - y_j^k}\right)^{\alpha_j^k}$ et

$$v_j = \prod_{k=1}^{n_j} w_j^k$$

Montrons que le produit $\prod_{j \in \mathbb{N}} v_j$ converge uniformément sur tout ensemble D_n. En effet, pour tout $x \in D_n$ et tout $j > n$, $x \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j}$ et $d(x, K \backslash D) > |\mathscr{P}_n|$ donc $\left|\dfrac{x}{a_j^k}\right| \leq |\mathscr{P}_j|$ si $a_j^k \notin \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j}$ et $\left|\dfrac{y_j^k - a_j^k}{x - y_j^k}\right| \leq |\mathscr{P}_j|$ si $a_j^k \in \mathscr{A}_{\mathscr{P}_j}$. $\prod_{j \in \mathbb{N}} v_j$ converge uniformément sur D_n et y définit un élément analytique. Comme la famille croissante $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recouvre D, $\prod_j v_j$ définit sur D une fonction analytique, soit Π cette fonction.

Sur chaque D_n, $\dfrac{f}{\Pi}$ se prolonge en un élément analytique inversible d'après la proposition 1. Donc $\dfrac{f}{\Pi}$, fonction analytique sur $D \backslash Z$, se prolonge en une fonction analytique g inversible sur D.

PROPOSITION 5: (1) *Soit D un ouvert quelconque de K. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie Z de D soit l'ensemble des zéros d'une fonction analytique sur D est qu'elle satisfasse à la condition suivante:*

pour tout ouvert U contenu dans D d'épaisseur non nulle, $Z \cap U$ est un ensemble fini.

(2) *Si Z est un tel sous-ensemble de D, Z est un ensemble discret au plus dénombrable: $\{a_n,\ n \in I,\ I \subset \mathbb{N}\}$; alors, pour toute suite $(\alpha_n)_{n \in I}$ d'entiers naturels, il existe une fonction analytique sur D dont l'ensemble des zéros est Z, chaque zéro a_n ayant pour ordre de multiplicité α_n.*

DÉMONSTRATION: (1) La condition est évidemment nécessaire d'après la proposition 1.1. et le théorème (4.5, chap. I).

(2) Si $(a_n)_{n \in I}$ et $(\alpha_n)_{n \in I}$ vérifient les hypothèses ci-dessus, on peut construire comme dans la démonstration de la proposition précédente une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fractions rationnelles ayant pour zéros les points a_n avec pour ordre de multiplicité α_n; le produit $\prod_k v_k$ convergeant vers une fonction analytique sur D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki: *Algèbre commutative, chapitres 5 et 6*, Hermann. Paris, 1964.

[2] A. Escassut: Algèbre de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. *Thèse de 3e cycle*, Faculté des Sciences de Bordeaux, 1970.

[3] A. Escassut: Algèbre d'éléments analytiques en analyse non archimédienne. *Indagationes Mathematicae*, vol. 36, n° 4, 1974.

[4] Y. Feneyrol-Perrin: Répartition des zéros et des pôles d'une fonction analytique sur un domaine d'un corps valué non archimédien, maximalement complet. *C.R. Acad. Sc. Paris 276*, 1973.

[5] Y. Feneyrol-Perrin: Ensembles analytiques, éléments et fonctions analytiques sur un corps algébriquement clos, valué au sens de Krull. *C.R. Acad. Sc. Paris 284*, 1977.

[6] Y. Feneyrol-Perrin: Fonctions analytiques sur un corps algébriquement clos, muni d'une valuation au sens de Krull et complet. *C.R. Acad. Sc. Paris 287*, 1978.

[7] Y. Feneyrol-Perrin: Répartition des zéros des éléments et des fonctions analytiques sur un ouvert d'un corps valué au sens de Krull, complet et algébriquement clos. *C.R. Acad. Sc. Paris 287*, 1978.

[8] Y. Feneyrol-Perrin: Fonctions analytiques de plusieurs variables sur certains corps valués au sens de Krull. *C.R. Acad. Sc. Paris.*

[9] R. Hobeika: Séries de Taylor, séries de Laurent dans certains corps valués au sens de Krull. *Thèse de 3e cycle*, Université de Paris VI, 1976.

[10] M. Krasner: Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, in Tendances géométriques en Algèbre et Théorie des nombres. *Colloques Internationaux du C.N.R.S.*, n° 143, Editions du C.N.R.S., Paris, 1966.

[11] M. Krasner: Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes. *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 39–40, 1974.

[12] M. Lazard: Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Publ. Math. I.H.E.S.*, Fascicule 14, 1963.

[13] E. Motzkin et P. Robba: Ensemble d'analyticité en analyse p-adique. *C.R. Acad. Sc. Paris 269*, 1969.

[14] P. Ribenboim: *Théorie des valuations*. (Séminaire de Mathématiques supérieures été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[15] P. Robba: Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. *Astérisque*, Société Mathématique de France, vol. 10, 1973.

[16] P. Robba: Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet. *Bull. Soc. Math. France 101*, 1973.

[17] O.F.G. Schilling: *The theory of valuations*, Mathematical surveys, n° 4, Amer. Math. Soc., Providence, 1950.

(Oblatum 13-I-1982)

Mathématiques pures
Université de Clermont-Ferrand
Complexe des Cézeaux B P 45
63170 Aubiere
France