JOHANNES M. EBERSOLD

Über die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologietheorie

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 97-133
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__97_0>

Über die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologietheorie

von

Johannes M. Ebersold

Zürich

Einleitung.

Es sind schon manche Beziehungen zwischen Homotopie und Homologie untersucht worden. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird der Zusammenhang des von J. H. C. Whitehead in [1] [1]) eingeführten Produktes von Homotopieelementen mit der Homologietheorie untersucht. Das Hilfsmittel, mit welchem dieser Zusammenhang hergestellt wird, bildet der von Hopf in [2] und [3] eingeführte Begriff der Homotopieränder von Ketten und Zyklen.

Das Whiteheadsche Produkt ordnet einem Element der k-ten und einem Element der l-ten Homotopiegruppe ein Element der $(k + l - 1)$-ten Homotopiegruppe zu. Es wird nun die Untergruppe der $(n - 1)$-ten Homotopiegruppe betrachtet, welche durch Whiteheadsche Produkte erzeugt wird. Es zeigt sich, dass das Vorhandensein von gewissen Relationen in dieser Untergruppe die Existenz von nicht nullhomologen n-dimensionalen Zyklen nach sich zieht. Diese Zyklen gehören einer Klasse von Zyklen an, welche einerseits dadurch ausgezeichnet sind, dass ihre Homotopieränder sich durch Summen von Whiteheadschen Produkten darstellen lassen, andrerseits dadurch, dass sie Bilder von topologischen Summen von Sphärenprodukten sind. Wird von einem dieser Zyklen gezeigt, dass er nicht nullhomolog ist, so geschieht dies dadurch, dass man die skalaren Produkte dieses Zyklus mit gewissen Cupprodukten und sogenannten Pontrjaginschen Quadraten bildet und feststellt, dass nicht alle dieser skalaren Produkte gleich 0 sind.

Im zweiten Kapitel werden die Methoden des ersten Kapitels auf die Untersuchung der dritten Homotopiegruppe in einfachzusammenhängenden Komplexen angewendet. Insbesondere wird

---

[1]) Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

die Struktur derselben aus der Homologiestruktur des Komplexes „im weiteren Sinne" (dies wird in Kap. II, §5, 4. präzisiert) bestimmt. Die sich in diesem Kapitel ergebenden Resultate sind zwar im wesentlichen schon in Arbeiten von Whitehead [4], Pontrjagin [5] und zum Teil auch von Hirsch [6] enthalten; jedoch sind die Methoden und die Darstellung in dieser Arbeit ganz anders.

Im dritten Kapitel wird eine Verallgemeinerung der Methode des ersten Kapitels behandelt. Ein Spezialfall des dort bewiesenen Satzes möge hier angeführt werden: Ein Komplex besitze in einer Dimension n (n gerade, > 0) einen sphärischen Zyklus, der nicht divisionshomolog 0 ist, und der Komplex sei in den Dimensionen $2n - 1, 3n - 1, \ldots, rn - 1$ asphärisch. Dann sind seine Homologiegruppen in den Dimensionen $2n, 3n, \ldots, rn$ nicht trivial. Durch diesen Satz wird der Zusammenhang mit der Theorie der Eilenberg-MacLaneschen Gruppen hergestellt.

Kapitel I.

Gegeben sei ein endlicher simplizialer zusammenhängender Komplex $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}^n$ sei das n-dimensionale Gerüst von $\mathfrak{K}$, $\Pi^n(\mathfrak{K})$ die n-te Homotopiegruppe von $\mathfrak{K}$, $n = 1, 2, \ldots$; für $\Pi^n(\mathfrak{K})$ schreiben wir oft auch kurz Π^n. Die Homotopiegruppen sollen alle denselben Grundpunkt $p \in \mathfrak{K}$ besitzen, wobei p ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ sei.

§ 1. Whiteheadsche Produkte.

1. Wir definieren zuerst das Whiteheadsche Produkt von $\alpha_i \in \Pi^{n_i}$, $i = 1, 2$. Unter E^k verstehen wir den fest orientierten k-dimensionalen Einheitswürfel. Ist $\alpha \in \Pi^n$, so sei $[\alpha]$ eine stetige Sphäre, welche α repräsentiert. Die Elemente $\alpha_i \in \Pi^{n_i}$, $i = 1, 2$ seien repräsentiert durch Abbildungen f_i (simpliziale) von Einheitswürfeln:

$$f_i(E^{n_i}) = [\alpha_i], \text{ wobei } f_i(\dot{E}^{n_i}) = p.$$

Produkte von orientierten Zyklen seien im folgenden so orientiert, wie es in [7], S. 303 erklärt ist. Auf

$$\dot{E}^{n_1+n_2} = (E^{n_1} \times E^{n_2})^{\cdot} = \dot{E}^{n_1} \times E^{n_2} + (-1)^{n_1} E^{n_1} \times \dot{E}^{n_2}$$

definieren wir eine Abbildung f:

$$f(\dot{E}^{n_1} \times E^{n_2}) = f(0 \times E^{n_2}) = f_2(E^{n_2}) = [\alpha_2]$$
$$f(E^{n_1} \times \dot{E}^{n_2}) = f(E^{n_1} \times 0) = f_1(E^{n_1}) = [\alpha_1],$$

wobei 0 der Nullpunkt von E^{n_1} bzw. E^{n_2} ist. Das so definierte Bild

$f(\dot{E}^{n_1+n_2})$ liegt auf $\mathfrak{K}^{\min(n_1,n_2)} \subset \mathfrak{K}^{n_1+n_2-1}$ und repräsentiert ein Element $\alpha \in \Pi^{n_1+n_2-1}(\mathfrak{K}^{n_1+n_2-1})$. Das Element α hängt nur von den Homotopieklassen van $[\alpha_i]$ in $\mathfrak{K}^{n_1+n_2-1}$ ab, also nur von α_i, wenn $\min(n_1, n_2) < n_1 + n_2 - 1$, $i = 1, 2$. Für $\min(n_1, n_2) = n_1+n_2-1$ ist n_1 oder $n_2 = 1$, sei es z.B. n_1; dann hängt α von α_1 und der Homotopieklasse van $[\alpha_2]$ in $\mathfrak{K}^{n_2}$ ab. Deshalb setzen wir fest, dass im Falle $\min(n_1, n_2) = n_1 + n_2 - 1$ von vornherein die Elemente von $\Pi^{n_2}(\mathfrak{K}^{n_2})$ für $n_1 = 1$ oder die Elemente $\Pi^{n_1}(\mathfrak{K}^{n_1})$ für $n_2 = 1$ zur Produktbildung herangezogen werden. Auf Grund dieser Vereinbarung hängt dann α nur von α_1 und α_2 ab, und wir setzen

$$\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \text{ Whiteheadsches Produkt von } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2.$$

Es sei bemerkt, dass wir die Gruppe Π^1 multiplikativ und die Gruppen Π^m, $m \geqq 2$, additiv schreiben.

Das Whiteheadsche Produkt hat die folgenden Eigenschaften: seien $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Pi^m(\mathfrak{K}^{m+n-1})$, $\beta \in \Pi^n(\mathfrak{K}^{m+n-1})$,

W1) $\alpha \circ \beta = (-1)^{mn}\, \beta \circ \alpha$, für $m + n > 2$,

W2) aus $\alpha = 1$ folgt $\alpha \circ \beta = 0$, für $m = 1$, $n > 1$,
aus $\alpha = 0$ folgt $\alpha \circ \beta = 0$, für $m > 1$, $n > 1$,

W3) $(\alpha_1\alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta + \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \beta)$, für $m = 1, n > 1$,
$(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$, für $m > 1$, $n > 1$,

W4) $\alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta - \beta$, für $m = 1$, $n > 1$,
wobei $\alpha \cdot \beta$ bedeutet: α als Operator, im Sinne von Eilenberg [8], auf β angewendet,

W5) ist der Komplex $\mathfrak{K}$ durch eine Abbildung f in einen Komplex $\mathfrak{L}$ abgebildet, so gilt, wenn h_f den durch f induzierten Homomorphismus der Homotopiegruppen bedeutet: $h_f(\alpha \circ \beta) = h_f(\alpha) \circ h_f(\beta)$.

Zum Gebrauch der Elemente von Π^1 als Operatoren in der Gruppe Π^n sei noch bemerkt: Zwei Elemente $\alpha, \beta \in \Pi^n$ sind dann und nur dann frei homotop in $\mathfrak{K}$ (d.h. homotop ohne Festhalten des Grundpunktes p), wenn es ein $\xi \in \Pi^1$ gibt, so dass $\beta = \xi \,.\, \alpha$. Für $n > 1$ nennen wir die Untergruppe von Π^n, die von den Differenzen $\xi \cdot \alpha - \alpha$, $\alpha \in \Pi^n$, $\xi \in \Pi^1$, erzeugt wird, Π^n_0.

2. Sei h der natürliche Homomorphismus von $\Pi^i(\mathfrak{K})$ in die i-te ganzzahlige Homologiegruppe $\mathfrak{H}^i(\mathfrak{K})$, $i = 1, 2, \ldots$; der Kern von h sei $\Gamma^i(\mathfrak{K}) \subset \Pi^i(\mathfrak{K})$. Wir behaupten

$$\alpha \circ \beta \in \Gamma^{m+n-1}(\mathfrak{K}^{m+n-1}), \text{ für } \alpha \in \Pi^m(\mathfrak{K}^{m+n-1}),\ \beta \in \Pi^n(\mathfrak{K}^{m+n-1}).$$

Beweis: a) $1 < m \leqq n$. Wir haben bemerkt, dass $\alpha \circ \beta$ bereits auf $\mathfrak{K}^{\min(m,n)}$ liegt; es ist aber $h\Pi^{m+n-1}(\mathfrak{K}^{\min(m,n)}) = 0$, da

$\min(m, n) < m + n - 1$ ist. b) $1 = m < n$. Es gilt bekanntlich $h(\alpha \cdot \beta) = h\beta$, daher ist nach W4) $h(\alpha \circ \beta) = h(\alpha . \beta) - h\beta = 0$.

Wir bemerken noch, dass, falls wir die Ordnungen von α und β für $1 < m \leqq n$, mit u und v bezeichnen

$$(u, v)\, \alpha \circ \beta = 0$$

gilt. ((u, v) = G.G.T. von u und v, wobei wir $(0, 0) = 0$ setzen).

3. Von jetzt an sei die Dimension $n > 2$ fest.

Die Whiteheadschen Produkte von der Form $\alpha \circ \beta$, $\alpha \in \Pi^k(\mathfrak{K}^{n-1})$, $\beta \in \Pi^{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, erzeugen eine Untergruppe von $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, die wir mit $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ bezeichnen. Die Gruppe $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ lässt sich in natürlicher Weise, durch die sogenannte Injektion i, auf $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^n) = \Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ abbilden. Es ist klar, dass $i\Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) \subset \Gamma^{n-1}(\mathfrak{K})$; bekanntlich ist $i\Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) = \Gamma^{n-1}(\mathfrak{K})$, siehe Hopf in [3], S. 322. Wir setzen nun

$$i\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) = \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}) \subset \Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}).$$

Bei der Injektion von $\alpha \circ \beta$ in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ ist zu beachten, dass in den Fällen $k = 1$ und $k = n - 1$ derjenige Faktor, der zu $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ gehört, gleichzeitig auch in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ zu injizieren ist.

Die Untersuchungen dieses Kapitels gelten zur Hauptsache den Gruppen $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$.

4. Wir konstruieren jetzt rein formal eine Gruppe $\mathfrak{U}^{n-1}(\mathfrak{K})$, die wir dann auf die Gruppe $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ abbilden.

Die Moduln, von welchen wir in den folgenden Definitionen Gebrauch machen, seien Moduln mit dem Ring der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich. Die Gruppen Π^k fassen wir hier für $k > 1$ als Gruppen mit den ganzen Zahlen als Operatoren auf, wobei 1 Einheitsoperator sei. Wir setzen nun fest

$\mathfrak{U}_1^{n-1}$ sei die Restklassengruppe des Moduls mit den Paaren

$$(\alpha, \beta),\ \alpha \in \Pi^1,\ \beta \in \Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}),$$

als Erzeugenden, nach dem Teilmodul mit den Erzeugenden

$$c(\alpha, \beta) - (\alpha, c\beta),$$
$$(\alpha, \beta_1 + \beta_2) - (\alpha, \beta_1) - (\alpha, \beta_2),$$
$$(\alpha_1\alpha_2, \beta) - (\alpha_1, \beta) - (\alpha_2, \beta) - (\alpha_1, \alpha_2 \circ \beta),$$

mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Pi^1$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, c ganze Zahl.

$\mathfrak{U}_k^{n-1}$ sei, für $1 < k < \frac{n}{2}$, die Restklassengruppe des Moduls mit den Paaren

$$(\alpha, \beta),\ \alpha \in \Pi^k,\ \beta \in \Pi^{n-k},$$

als Erzeugenden, nach dem Teilmodul mit den Erzeugenden

$$\begin{aligned}&c(\alpha, \beta) - (c\alpha, \beta),\ c(\alpha, \beta) - (\alpha, c\beta),\\&(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) - (\alpha_1, \beta) - (\alpha_2, \beta),\\&(\alpha, \beta_1 + \beta_2) - (\alpha, \beta_1) - (\alpha, \beta_2),\end{aligned}$$

mit $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \Pi^k,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \Pi^{n-k}$, c ganze Zahl.

$\mathfrak{U}^{n-1}_{\frac{n}{2}}$ sei, falls $\frac{n}{2}$ ganz ist, die Restklassengruppe des Moduls mit den Paaren

$$(\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \Pi^{\frac{n}{2}},$$

als Erzeugenden, nach dem Teilmodul mit den Erzeugenden

$$\begin{aligned}&(\alpha, \beta) - (-1)^{\frac{n}{2}}(\beta, \alpha),\\&c(\alpha, \beta) - (c\alpha, \beta),\\&(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) - (\alpha_1, \beta) - (\alpha_2, \beta),\end{aligned}$$

mit $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta \in \Pi^{\frac{n}{2}}$, c ganze Zahl.

Wir bemerken, dass $\mathfrak{U}^{n-1}_k$, für $1 < k < \frac{n}{2}$, nichts anderes ist, als das Tensorprodukt $\Pi^k \otimes \Pi^{n-k}$, der Gruppen Π^k und Π^{n-k}.

Die Summe als direkte Summe aufgefasst, sei

$$\mathfrak{U}^{n-1}(\mathfrak{K}) = \Sigma_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathfrak{U}^{n-1}_k.$$

Ordnen wir jedem Paar (α, β), $\alpha \in \Pi^k(\mathfrak{K}^{n-1})$, $\beta \in \Pi^{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, das Produkt $\alpha \circ \beta$ zu, so ist ein Homomorphismus w von $\mathfrak{U}^{n-1}$ auf $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ gegeben. Durch die angegebene Konstruktion von $\mathfrak{U}^{n-1}$ haben wir erreicht: eine Summe von Paaren (α, β), von der wir auf Grund der Eigenschaften des Whiteheadschen Produktes wissen, dass ihr Bild in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ 0 ist, verschwindet bereits in $\mathfrak{U}^{n-1}$.

Die Kerne der Abbildungen w und iw von $\mathfrak{U}^{n-1}$ auf $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ seien $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ genannt.

Um die Struktur der Gruppen $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ zu bestimmen, müssen wir die Kerne $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ als Untergruppen von $\mathfrak{U}^{n-1}$ kennen.

§ 2. Bilder von topologischen Summen von Sphärenprodukten.

1. Wir konstruieren eine Klasse von n-dimensionalen Mannig-

faltigkeiten, durch Bildung von topologischen Summen von Sphärenprodukten. Es sei $n > 2$ fest.

Gegeben seien c_k Sphärenprodukte vom Typus $S^k \times S^{n-k}$, $c_k \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Die Faktoren eines jeden Produktes seien fest orientiert und die Produkte selbst seien gemäss Abmachung von §1,1. orientiert. In jedes dieser Produkte machen wir durch Entfernen einer n-dimensionalen Vollsphäre ein Loch. Wir nehmen eine orientierte n-dimensionale Sphäre S^n und machen in sie $c = \Sigma_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_k$ Löcher durch Entfernen von c disjunkten n-dimensionalen Vollsphären. Dieser c-fach gelochten Sphäre setzen wir die c gelochten Sphärenprodukte als Henkel an, indem wir je ein gelochtes Produkt längs dem Rand seines Loches an den Rand je eines Loches der S^n heften, und zwar so, dass die Orientierungen der Sphäre und der Henkel kohärent sind und sich also eine orientierte Mannigfaltigkeit ergibt. Diese Mannigfaltigkeit ist durch Angabe der c_k bis auf Homöomorphie bestimmt (dabei ist zu beachten, dass es auf die Orientierungen der Henkel, welche durch die vorgegebenen Orientierungen der Faktorsphären bestimmt sind, nicht ankommt). Den Fall $c = 0$ schliessen wir nicht aus, die betreffende Mannigfaltigkeit ist dann die S^n selbst.

Die Klasse der so konstruierten Mannigfaltigkeiten nennen wir die Klasse der Standardmannigfaltigkeiten. Unter St^n verstehen wir im Folgenden eine n-dimensionale Standardmannigfaltigkeit.

2. Wir nehmen nun an, dass es in dem gegebenen Komplex $\mathfrak{K}$ n-dimensionale ganzzahlige Zyklen gebe, welche Bilder von Standardmannigfaltigkeiten sind; präzis ausgedrückt heisst der Zyklus Z^n Bild von St^n, wenn es eine simpliziale Abbildung von St^n in $\mathfrak{K}$ gibt, so dass Z^n das Bild des Grundzyklus von St^n ist. Wir behaupten:

Alle n-dimensionalen Zyklen von $\mathfrak{K}$, welche Bilder von Standardmannigfaltigkeiten sind, —wir nennen sie Standardzyklen — bilden eine Untergruppe $\mathfrak{M}^n$ der Gruppe der Zyklen $\mathfrak{Z}^n$. Die Gruppe der sphärischen Zyklen $\mathfrak{S}^n$ ist in $\mathfrak{M}^n$ enthalten.

Beweis: Es ist klar, dass $\mathfrak{S}^n \subset \mathfrak{M}^n$. Um zu zeigen, dass die Elemente von $\mathfrak{M}^n$ eine Gruppe bilden, genügt es zu beweisen, das die Summe zweier Elemente von $\mathfrak{M}^n$ auch in $\mathfrak{M}^n$ enthalten ist. Seien $Z_k^n = f_k(St_k^n)$, $k = 1, 2$, f_k simplizial. Wir greifen aus jeder der Standardmannigfaltigkeiten St_k^n einen Eckpunkt q_k heraus, der nicht auf den Henkeln der St_k^n liegt. Durch eine Strecke s von q_1 nach q_2 verbinden wir St_1^n mit St_2^n. Die Punkte $f_1(q_1)$ und $f_2(q_2)$

können wir in $\mathfrak{K}$ durch einen Kantenweg w verbinden, auf welchen wir die Strecke s durch eine Abbildung f_3 abbilden. Wird St_k^n durch die Zahlen $c_{l,k}$ charakterisiert, $l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, so können wir eine St^n, welche durch die Zahlen $c_{l,1} + c_{l,2}$ charakterisiert wird, auffassen als topologische Summe von St_1^n und St_2^n, und es ist leicht einzusehen, dass wir St^n durch eine Abbildung f so auf $St_1^n + s + St_2^n$ abbilden können, dass jeder Henkel von $St_1^n + s + St_2^n$ Bild genau eines entsprechenden Henkels von St^n ist. Durch f, f_1, f_2 und f_3 ist eine Abbildung von St^n in $\mathfrak{K}$ gegeben. Das Bild des Grundzyklus von St^n ist der Zyklus $Z_1^n + Z_2^n$, q.e.d..

§ 3. Die Homotopieränder der Standardzyklen.

1. Wir brauchen im Folgenden den Begriff der Homotopieränder einer Kette, wie ihn H. Hopf in [2], S. 266 und in [3], S. 313 eingeführt hat.

Ein Element $\alpha \in \Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ heisst ein Homotopierand der n-dimensionalen Kette C^n, falls es eine simpliziale Abbildung f des Würfels E^n, auf dessen Rand ein Eckpunkt q ausgezeichnet sei, in den Komplex $\mathfrak{K}$ gibt, derart dass $f(E^n) = C^n$, $f(q) = p$ und $f(\dot{E}^n) = [\alpha]$, wobei $[\alpha]$ ein Repräsentant von α ist.

Jede n-dimensionale Kette C^n besitzt Homotopieränder. Die Homotopieränder aller n-Ketten bilden eine Untergruppe der $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, und zwar ist diese genau der Kern $\mathfrak{R}^{n-1}$ der Injektion i von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ auf $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_0^{n-1}$ die Untergruppe von $\mathfrak{R}^{n-1}$, welche von den Differenzen $\xi \,.\, \alpha - \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{R}^{n-1}$, $\xi \in \Pi^1$, erzeugt wird, so können wir sagen, die Homotopieränder einer Kette C^n bilden genau eine der Restklassen in die $\mathfrak{R}^{n-1}$ modulo $\mathfrak{R}_0^{n-1}$ zerfällt (es sei hier und im Folgenden $n > 2$). Diese Zuordnung ist ein Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{C}^n$ auf die Gruppe $\mathfrak{R}^{n-1}/\mathfrak{R}_0^{n-1}$, wobei $\mathfrak{C}^n$ die Gruppe der n-Ketten ist.

Die Homotopieränder der Elemente von $\mathfrak{Z}^n$ bilden die Gruppe $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) \cap \mathfrak{R}^{n-1}$ und diejenigen der Elemente von $\mathfrak{S}^n$, der Gruppe der sphärischen Zyklen, die Gruppe $\mathfrak{R}_0^{n-1}$. Da die in $\mathfrak{K}$ nullhomologen Zyklen sphärisch sind, gilt, wenn wir die Gruppe der sphärischen Homologieklassen $\overline{\mathfrak{S}}^n$ nennen:

$$\mathfrak{H}^n/\mathfrak{S}^n \cong \mathfrak{Z}^n/\overline{\mathfrak{S}}^n \cong \Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) \cap \mathfrak{R}^{n-1}/\mathfrak{R}_0^{n-1}.$$

Die Gleichung $\alpha = \mathring{C}^n$ mit $\alpha \in \mathfrak{R}^{n-1}$ soll im Folgenden heissen: α ist ein Homotopierand der Kette C^n.

Ist h der natürliche Homomorphismus von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ in

$\mathfrak{H}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, so folgt aus $\alpha = \mathring{C}^n : h\alpha = \dot{C}^n$, $\dot{C}^n$ als Element von $\mathfrak{H}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ aufgefasst.

Wird der Komplex $\mathfrak{K}$ durch f in einen Komplex $\mathfrak{L}$ abgebildet und ist h_f der induzierte Homomorphismus der Homotopiegruppen, so folgt aus $\alpha = \mathring{C}^n$:

$$h_f(\alpha) = (f(C^n))^\circ.$$

2. Die in 1. definierte Gruppe $\mathfrak{N}_0^{n-1}$ ist in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ enthalten, denn nach W4) ist $\xi \,.\, \alpha - \alpha = \xi \circ \alpha$. Wir bestimmen in diesem Zusammenhange noch $w^{-1}\mathfrak{N}_0^{n-1}$. Da $\alpha \in \mathfrak{N}^{n-1}$ ist, gilt $i(\xi \circ \alpha) = 0$, daher ist $w^{-1}\mathfrak{N}_0^{n-1} \subset \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$. Das Element von $\mathfrak{U}^{n-1}$, das durch (ξ, α) repräsentiert wird, ist ein Urbild von $\xi \circ \alpha$, die andern Urbilder unterscheiden sich von diesem nur durch Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K})$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$, welche durch die Paare (ξ, α), mit $\xi \in \Pi^1$, $\alpha \in \mathfrak{N}^{n-1}$, erzeugt wird; dann gilt

$$w^{-1}\mathfrak{N}_0^{n-1} = \mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}).$$

3. Betrachten wir ein Sphärenprodukt $S^k \times S^{n-k}$, S^k und S^{n-k} fest und das Produkt gemäss Abmachung orientiert, $1 \leqq k < n$, $n > 2$. Fassen wir die beiden Faktorsphären als Würfel mit Randpunktidentifikation auf, so ist damit eine Abbildung f des Produktes $E^k \times E^{n-k}$ auf $S^k \times S^{n-k}$ gegeben. Sei $f(0 \times 0)$ der Grundpunkt der Homotopiegruppen von $S^k \times S^{n-k}$; aus der Definition des Whiteheadschen Produktes und derjenigen der Homotopieränder folgt

$$S^k \circ S^{n-k} = (S^k \times S^{n-k})^\circ \text{ in } \Pi^{n-1}((S^k \times S^{n-k})^{n-1}),$$

wobei wir in $S^k \circ S^{n-k}$ die Sphären als Homotopieelemente auffassen und wobei $S^k \times S^{n-k}$ das erste Mal den Grundzyklus, das zweite Mal die Mannigfaltigkeit bedeutet.

4. Sei St^n eine Standardmannigfaltigkeit, charakterisiert durch die Zahlen c_k. Die Henkel seien die Sphärenprodukte $S_l^k \times S_l^{n-k}$, $l = 1, 2, \ldots, c_k$; $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. In St^n sei ein Punkt q als Grundpunkt der Homotopiegruppen von St^n gewählt. Wir verbinden den oben gewählten Grundpunkt jedes Henkels durch einen Weg mit dem Grundpunkt q, so dass wir die Faktorsphären jedes Henkels als Elemente der Homotopiegruppen von St^n auffassen können. Gemäss 1. ist das Nullelement der Gruppe $\Pi^{n-1}((S^n)^{n-1})$ ein Homotopierand der Sphäre S^n, der die Henkel angeheftet werden. Die Beiträge der Löcher der S^n und der Löcher der Henkel an einen Homotopierand von St^n heben sich gegenseitig weg, weil wir die Orientierung der einzelnen Teile beim Zusammenheften berücksichtigt haben. (Dies wird im nächsten Paragraphen noch ausführlicher dargelegt). Daraus ergibt sich, dass

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{l=1}^{c_k}(S_l^k \circ S_l^{n-k}) = (St^n)^\circ \text{ in } \Pi^{n-1}((St^n)^{n-1}),$$

wobei für $c_k = 0$ die betreffende Summe über l leer ist.

5. Sei nun $M^n \in \mathfrak{M}^n$ ein Standardzyklus, also $M^n = f(St^n)$. Wir dürfen annehmen, dass p, der Grundpunkt der Homotopiegruppen von $\mathfrak{K}$, vom Bild von St^n bedeckt wird, sonst können wir f leicht so modifizieren, dass dies der Fall ist. Der Grundpunkt q von St^n, unter Verwendung der Bezeichnungen von 4., sei ein Urbild von p. Dann folgt aus 4., den Eigenschaften des Whiteheadschen Produktes und der Homotopieränder, wenn h_f wieder der von f induzierte Homomorphismus der Homotopiegruppen ist:

$$\alpha = h_f\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{l=1}^{c_k} S_l^k \circ S_l^{n-k}\right) = h_f((St^n)^\circ) = (f(St^n))^\circ = \mathring{M}^n$$

und

$$\begin{aligned}\alpha &= h_f\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{l=1}^{c_k} S_l^k \circ S_l^{n-k}\right) = \sum_k \sum_l h_f(S_l^k \circ S_l^{n-k}) \\ &= \sum_k \sum_l h_f(S_l^k) \circ h_f(S_l^{n-k}) = \sum_k \sum_l \alpha_l^k \circ \alpha_l^{n-k} \in \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}),\end{aligned}$$

wenn wir $h_f(S_l^k) = \alpha_l^k \in \Pi^k$ und $h_f(S_l^{n-k}) = \alpha_l^{n-k} \in \Pi^{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$ setzen. Ist β ein anderer Homotopierand von M^n, so ist nach 1. und 2.

$$\beta - \alpha \in \mathfrak{R}_\circ^{n-1} \subset \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}),$$

also ist auch $\beta \in \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$.

Die Homotopieränder der Elemente von $\mathfrak{M}^n$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1}$ von $\mathfrak{R}^{n-1}$; wir haben gezeigt:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1} \subset w\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}) \text{ oder } w^{-1}\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1} \subset \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}).$$

Satz 1. Die Homotopieränder der n-dimensionalen Standardzyklen in $\mathfrak{K}$ sind in der von den Whiteheadschen Produkten erzeugten Untergruppe $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ enthalten. Ihre Urbilder in der formalen Produktgruppe $\mathfrak{U}^{n-1}(\mathfrak{K})$ sind Elemente des Kernes $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ der Abbildung von $\mathfrak{U}^{n-1}$ auf die Gruppe $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}) = i\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, wobei i die Injektion von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ auf $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ ist.

Es liegt die Vermutung nahe, dass jedes Element des Kernes $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ Urbild eines Homotopierandes eines Standardzyklus sei. Diese Vermutung ist richtig, ihr Beweis bildet den Inhalt des nächsten Paragraphen.

§ 4. Die Elemente des Kernes $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ der Abbildung von $\mathfrak{U}^{n-1}$ auf $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}) \subset \Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ als Urbilder der Homotopieränder der Standardzyklen.

1. Sei $V^{n-1} \in \mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$. Um zu beweisen, dass $wV^{n-1} \in \mathfrak{R}^{n-1}_{\mathfrak{M}}$ ist, genügt es ein Element $M^n \in \mathfrak{M}^n$ zu konstruieren, für welches $wV^{n-1} = \mathring{M}^n$ gilt. Wir schreiben die Elemente von $\mathfrak{U}^{n-1}$ auch als Summen von Paaren; da wir $\mathfrak{U}^{n-1}$ als Summe von Restklassengruppen von Moduln von Paaren nach gewissen Teilmoduln definiert haben, ist diese Schreibweise natürlich nicht eindeutig, das spielt aber für uns hier keine Rolle. Sei also

$$V^{n-1} = \Sigma_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Sigma_{l=1}^{c_k} a_{kl}(\alpha_l^k, \alpha_l^{n-k})$$

mit $\alpha_l^k \in \Pi^k$, $\alpha_l^{n-k} \in \Pi^{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$, a_{kl} ganz, c_k ganz $\geqq 0$, wobei für $c_k = 0$ die innere Summe leer ist.

2. Die Elemente α_l^k und $a_{kl}\alpha_l^{n-k}$ seien repräsentiert durch $[\alpha_l^k] = f(S_l^k)$, $[a_{kl}\alpha_l^{n-k}] = f(S_l^{n-k})$; wir stellen uns S_l^k und S_l^{n-k} als Einheitswürfel mit Randpunktidentifikation vor, wobei der den Randpunkten entsprechende Punkt von S_l^k bzw. S_l^{n-k} mit o_{kl} bzw. o'_{kl} bezeichnet sei und $f(o_{kl}) = f(o'_{kl}) = p$ gelte.

Wir bilden nun das gemäss Verabredung orientierte topologische Produkt $P_{kl}^n = S_l^k \times S_l^{n-k}$; dieses stellen wir uns vor als n-dimensionalen Einheitswürfel mit gewissen Identifikationen auf seinem Rande. Als Grundpunkt von P_{kl}^n sei $o_{kl} \times o'_{kl} = q_{kl}$ gewählt. Wenn wir im Folgenden von den Faktorsphären S_l^k und S_l^{n-k} in P_{kl}^n sprechen, so sind damit die Sphären $S_l^k \times o'_{kl}$ und $o_{kl} \times S_l^{n-k}$ gemeint; indem wir S_l^k und S_l^{n-k} so auffassen, ist auf S_l^k und S_l^{n-k} in P_{kl}^n die Abbildung f definiert. Wir machen in P_{kl}^n ein Loch, indem wir eine Vollkugel V_{kl}^n herausnehmen; V_{kl}^n sei eine Kugel im Inneren von P_{kl}^n mit dem Mittelpunkte im Mittelpunkte von P_{kl}^n, uns auf die erwähnte Modellvorstellung von P_{kl}^n beziehend. Das gelochte P_{kl}^n heisse $P_{kl}^{n\prime}$, V_{kl}^n und seine Randsphäre S_{kl}^{n-1} seien so orientiert, dass

$$P_{kl}^n = P_{kl}^{n\prime} + V_{kl}^n \text{ und } \dot{V}_{kl}^n = S_{kl}^{n-1};$$

dann gilt

$$\dot{P}_{kl}^{n\prime} = - S_{kl}^{n-1}.$$

$S_l^k + S_l^{n-k}$ ist ein Retrakt von $P_{kl}^{n\prime}$, das heisst es gibt eine Abbildung g_{kl} von $P_{kl}^{n\prime}$ auf $S_l^k + S_l^{n-k}$, welche auf $S_l^k + S_l^{n-k}$ die Identität ist; wir nehmen für g_{kl} uns auf das Modell von P_{kl}^n beziehend die Projektion von $P_{kl}^{n\prime}$ auf $S_l^k + S_l^{n-k}$ vom Mittelpunkte von P_{kl}^n aus. Wir erweitern die Abbildung f auf $P_{kl}^{n\prime}$, indem wir für jeden

Punkt $x \in P^{n'}_{kl} f(x) = f(g_{kl}(x))$ setzen. Sei y ein Randpunkt des Modelles von P^n_{kl}, der bei der Identifikation in q_{kl} übergeht und w_{kl} der Weg $g^{-1}_{kl}(y)$, dann gilt $f(w_{kl}) = p$; sei ferner r_{kl} der Endpunkt von w_{kl} auf S^{n-1}_{kl}. Die Homotopieelemente von $(P^{n}_{kl}{}')^{n-1}$, welche durch S^k_l, S^{n-k}_l und S^{n-1}_{kl} repräsentiert werden, bezeichnen wir mit σ^k_l, σ^{n-k}_l und σ^{n-1}_{kl}, wobei q_{kl} auch Grundpunkt von $(P^{n'}_{kl})^{n-1}$ sei und S^{n-1}_{kl} durch w_{kl} mit q_{kl} verbunden ist. Nun gilt

$$\sigma^k_l \circ \sigma^{n-k}_l = \mathring{P}^n_{kl} = (P^{n'}_k + V^n_{kl})^\circ \text{ und } \sigma^{n-1}_{kl} = \mathring{V}^n_{kl}$$

in $\Pi^{n-1}\big((P^n_{kl})^{n-1}\big)$, daher

$$\sigma^k_l \circ \sigma^{n-k}_l - \sigma^{n-1}_{kl} = \mathring{P}^{n'}_{kl} \text{ in } \Pi^{n-1}\big((P^{n'}_{kl})^{n-1}\big).$$

Weiter folgt daraus durch Injektion

$$i(\sigma^k_l \circ \sigma^{n-k}_l - \sigma^{n-1}_{kl}) = 0 \text{ in } \Pi^{n-1}(P^{n'}_{kl})$$

und deshalb

$$f(S^{n-1}_{kl}) = [i(\alpha^k_l \circ a_{kl}\alpha^{n-k}_l)] = [ia_{kl}(\alpha^k_l \circ \alpha^{n-k}_l)].$$

3. Sei jetzt S^n die orientierte n-Sphäre, der wir dann die $P^{n'}_{kl}$ als Henkel ansetzen. Wir machen in sie $\Sigma_k c_k$ Löcher, indem wir aus ihr untereinander disjunkte Vollkugeln $V^{n'}_{kl}$ entfernen, $l = 1, 2, \ldots, c_k$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Die gelochte S^n heisse $S^{n'}$, $V^{n'}_{kl}$ und seine Randsphäre $S^{n-1'}_{kl}$ seien so orientiert, dass

$$S^n - S^{n'} + \Sigma_{k,l} V^{n'}_{kl} \text{ und } \dot{V}^{n'}_{kl} = - S^{n-1'}_{kl};$$

dann ist

$$\dot{S}^{n'} = \Sigma_{k,l} S^{n-1'}_{kl}.$$

Die Sphäre $S^{n-1'}_{kl}$ bilden wir durch eine topologische Abbildung t_{kl} mit dem Grad $+1$ auf S^{n-1}_{kl} ab, für alle k, l und definieren auf ihr die Abbildung f durch

$$f(S^{n-1'}_{kt}) = f\big(t_{kl}(S^{n-1'}_{kl})\big).$$

Da nun

$$f(S^{n-1'}_{kl}) = [ia_{kl}(\alpha^k_l \circ \alpha^{n-k}_l)] \text{ und}$$

$$i\Sigma_{k,l} a_{kl}\alpha^k_l \circ \alpha^{n-k}_l = iwV^{n-1} = 0 \text{ in } \Pi^{n-1}(\mathfrak{K}),$$

lässt sich, wie H. Hopf in [3], S. 319 bewiesen hat, die Abbildung f auf $S^{n'}$ erweitern. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Löcher geführt. Wie man leicht an Hand des Beweises einsieht, lässt sich f so erweitern, dass es einen Punkt q in $S^{n'}$ und Wege w'_{kl} von q nach den Punkten $t^{-1}_{kl}(r_{kl})$ von $S^{n-1'}_{kl}$ gibt, die durch f auf p abgebildet werden. Wir wählen q als Grundpunkt von $S^{n'}$. Durch die Wege w'_{kl} verbinden wir die Sphären

$S_{kl}^{n-1\prime}$ mit q und bezeichnen die Homotopieelemente, welche sie repräsentieren mit $\sigma_{kl}^{n-1\prime}$. Es gilt

$$0 = \mathring{S}^n = (S^{n\prime} + \Sigma_{k,l} V_{kl}^{n\prime}) \text{ und } -\sigma_{kl}^{n-1\prime} = \mathring{V}_{kl}^{n\prime}$$

in $\Pi^{n-1}((S^n)^{n-1})$, daher

$$\Sigma_{k,l}\sigma_{kl}^{n-1\prime} = \mathring{S}^{n\prime} \text{ in } \Pi^{n-1}((S^{n\prime})^{n-1}).$$

4. Wir identifizieren die Punkte der S_{kl}^{n-1} von $P_{kl}^{n\prime}$ mit den entsprechenden Punkten der $S_{kl}^{n-1\prime}$ von $S^{n\prime}$ für alle k, l. Dadurch entsteht eine geschlossene Mannigfaltigkeit, denn

$$(S^{n\prime} + \Sigma_{k,l} P_{kl}^{n\prime})^{\bullet} = \Sigma_{k,l} S_{kl}^{n-1\prime} - \Sigma_{k,l} S_{kl}^{n-1} = 0.$$

Diese Mannigfaltigkeit ist nach Konstruktion eine Standardmannigfaltigkeit St^n. Der Grundpunkt q von $S^{n\prime}$ sei auch Grundpunkt von St^n. Die Grundpunkte q_{kl} von $P_{kl}^{n\prime}$ ziehen wir längs w_{kl} und w'_{kl} nach q hinüber, dadurch werden die Sphären S_l^k, S_l^{n-k} und S_{kl}^{n-1} mit q verbunden; die Homotopieelemente welche sie in $(St^n)^{n-1}$ repräsentieren bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}_l^k$, $\bar{\sigma}_l^{n-1}$ und $\bar{\sigma}_{kl}^{n-1}$. Die Addition von Homotopierändern der einzelnen Teile von St^n gibt einen Homotopierand von St^n, also

$$\Sigma_{k,l}(\bar{\sigma}_l^k \circ \bar{\sigma}_l^{n-k} - \bar{\sigma}_{kl}^{n-1}) + \Sigma_{k,l}\sigma_{kl}^{n-1} = (St^n)^{\circ}.$$

Aus der Konstruktion ist klar, dass $\bar{\sigma}_{kl}^{n-1} = \sigma_{kl}^{n-1\prime}$ in $\Pi^{n-1}((St^n)^{n-1})$, daher ist

$$\Sigma_{k,l}\bar{\sigma}_l^k \circ \bar{\sigma}_l^{n-k} = (St^n)^{\circ}.$$

Die Abbildung f ist auf ganz St^n definiert und $f(St^n) = M^n \in \mathfrak{M}^n$. Es folgt aus den Eigenschaften der Homotopieränder und der Whiteheadschen Produkte, dass

$$h_f(\Sigma_{k,l}\bar{\sigma}_l^k \circ \bar{\sigma}_l^{n-k}) = \mathring{M}^n \text{ und}$$

$$h_f(\Sigma_{k,l}\bar{\sigma}_l^k \circ \bar{\sigma}_l^{n-k}) = \Sigma_{k,l}(h_f\bar{\sigma}_l^k) \circ (h_f\bar{\sigma}_l^{n-k}),$$

wenn h_f wieder den von f induzierten Homomorphismus der Homotopiegruppen bedeutet. Da die Wege, welche die Grundpunkte q_{kl} von $P_{kl}^{n\prime}$ mit q, dem Grundpunkt von St^n, verbinden, durch f auf p abgebildet werden, gilt

$$h_f(\bar{\sigma}_l^k) = \alpha_l^k,\ h_f(\bar{\sigma}_l^{n-k}) = a_{kl}\alpha_l^{n-k}, \text{ und somit}$$

$$\Sigma_{k,l}(h_f\bar{\sigma}_l^k) \circ (h_f\bar{\sigma}_l^{n-k}) = \Sigma_{k,l}\alpha_l^k \circ (a_{kl}\alpha_l^{n-k}) = \Sigma_{k,l}a_{kl}\alpha_l^k \circ \alpha_l^{n-k} = wV^{n-1}.$$

Zu dem vorgegebenen Element $V^{n-1} \in \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ haben wir einen Standardzyklus M^n so konstruiert, dass

$$wV^{n-1} = \mathring{M}^n.$$

Satz 2. Die Elemente des Kernes $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ der Abbildung iw der formalen Produktgruppe $\mathfrak{U}^{n-1}$ auf $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}) \subset \Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ sind Urbilder von Homotopierändern der Standardzyklen.

5. Wir haben gezeigt, dass die Homotopieränder der Standardzyklen in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ liegen. Ist nun $Z^n \in \mathfrak{Z}^n$ ein Zyklus von $\mathfrak{K}$, von welchem ein Homotopierand in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ liegt, so sind alle seine Homotopieränder in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ enthalten, und wir behaupten, dass Z^n ein Standardzyklus ist.

Sei also $\alpha = \mathring{Z}^n$, $\alpha \in \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$; da $i\alpha = 0$ ist, gibt es ein Element $V^{n-1} \in \mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$, so dass $wV^{n-1} = \alpha$ ist. Nach Satz 2 gibt es einen Zyklus $M^n \in \mathfrak{M}^n$, mit $\alpha = \mathring{M}^n$. Aus $\alpha = \mathring{M}^n$ und $\alpha = \mathring{Z}^n$ folgt, dass

$$0 = (Z^n - M^n)^\circ.$$

Dies bedeutet nach § 3,1., dass $Z^n - M^n$ ein sphärischer Zyklus ist. Aus $Z^n - M^n \in \mathfrak{S}^n \subset \mathfrak{M}^n$ und $M^n \in \mathfrak{M}^n$ folgt $Z^n \in \mathfrak{M}^n$, q.e.d..

6. Wie wir soeben gesagt heben, unterscheiden sich zwei Zyklen, welche einen gemeinsamen Homotopierand besitzen, nur um einen sphärischen Zyklus. Daher ergibt die zum Beweise des Satzes 2 durchgeführte Konstruktion, welche Elementen von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ Elemente von $\mathfrak{M}^n$ zuordnet, eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ in $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{S}^n$. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus und zwar nach Satz 1 ein Homomorphismus von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ auf $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{S}^n$.

Satz 3. Der Kern $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ der Abbildung iw der formalen Produktgruppe $\mathfrak{U}^{n-1}$ in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ ist genau die Gruppe der Urbilder aller Homotopieränder, welche in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ enthalten sind, wobei $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ die von den Whiteheadschen Produkten erzeugte Untergruppe von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ ist. Diese Homotopieränder sind genau die Homotopieränder der Elemente der Gruppe $\mathfrak{M}^n$, d.h. der Standardzyklen.

Zusatz. Durch den geometrischen Zusammenhang von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ mit $\mathfrak{M}^n$ wird in direkter Weise ein Homomorphismus von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ auf $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{S}^n$ gegeben, wobei $\mathfrak{S}^n$ die Gruppe der sphärischen Zyklen ist.

7. Aus $w^{-1}\mathfrak{R}_\circ^{n-1} \subset \mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ und $w\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1}$ folgt $\mathfrak{R}_\circ^{n-1} \subset \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1}$. Sei $M^n \in \mathfrak{M}^n$; die Homotopieränder von M^n bilden genau eine der Restklassen, in die $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1}$ modulo $\mathfrak{R}_\circ^{n-1}$ zerfällt. Die Homotopieränder der sphärischen Zyklen bilden genau die Gruppe $\mathfrak{R}_\circ^{n-1}$; daraus folgt:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}^{n-1}/\mathfrak{R}_\circ^{n-1} \cong \mathfrak{M}^n/\mathfrak{S}^n.$$

Mit M^n gehören auch alle Zyklen der Homologieklasse von M^n

zu $\mathfrak{M}^n$, da sie sich von M^n nur durch Ränder unterscheiden, die sowieso sphärisch sind. Ist $\overline{\mathfrak{M}}^n$ die Gruppe der Homologieklassen, deren Elemente zu $\mathfrak{M}^n$ gehören, und $\overline{\mathfrak{S}}^n$ diejenige der Homologieklassen, deren Elemente sphärisch sind, so gilt:

$$\overline{\mathfrak{M}}^n/\overline{\mathfrak{S}} \cong \mathfrak{M}^n/\mathfrak{S}^n.$$

Nach § 3,2. ist $w^{-1}\mathfrak{N}_0^{n-1} = \mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, daher gilt

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{M}}^{n-1}/\mathfrak{N}_0^{n-1} \cong \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})/\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}).$$

Daraus folgt:

Satz 4. $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})/\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) \cong \overline{\mathfrak{M}}^n/\mathfrak{S}^n.$

§ 5. Untersuchung des algebraischen Zusammenhanges zwischen $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ und $\mathfrak{M}^n$.

1. Wir wollen die Methode, die wir in diesem Paragraphen verwenden, an einem einfachen Beispiele demonstrieren. Die Standardmannigfaltigkeit $St^n + S^k \times S^{n-k}$ sei durch eine Abbildung f in den Komplex $\mathfrak{K}$ abgebildet, $k < \frac{n}{2}$. Wir setzen $f(S^k) = [\alpha^k]$ und $f(S^{n-k}) = [\alpha^{n-k}]$, $\alpha^k \in \Pi^k$, $\alpha^{n-k} \in \Pi^{n-k}$. Was Homologie und Cohomologie anbetrifft, rechnen wir hier einfachheitshalber bezüglich des Körpers der rationalen Zahlen $\mathfrak{R}$; die entsprechenden Homologiegruppen heissen $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}}^k$. Wir nehmen an, dass $h\alpha^k = X^k$ und $h\alpha^{n-k} = X^{n-k}$ nicht 0 seien in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}}^k$ bzw. $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}}^{n-k}$. Seien X'^k und X'^{n-k} zu X^k und X^{n-k} duale Elemente, d.h. Cohomologieelemente, für welche $X^k \cdot X'^k = 1$ und $X^{n-k} \cdot X'^{n-k} = 1$ gilt, entsprechend T^k und T^{n-k} zu S^k und S^{n-k} duale Elemente in St^n und schliesslich T^n das zum Grundzyklus von St^n duale Element. Bezeichnet h_f den Homomorphismus der Homologiegruppen von St^n in diejenigen von $\mathfrak{K}$ und h_f' den dualen Homomorphismus der Cohomologiegruppen von $\mathfrak{K}$ in diejenigen von St^n, so gilt

$$\begin{aligned} h_f(St^n) \,.\, (X'^k \cup X'^{n-k}) &= St^n \cdot h_f'(X'^k \cup X'^{n-k}) = \\ &= St^n \cdot (h'X'^k \cup h'X'^{n-k}) \\ &= St^n \cdot (T^k \cup T^{n-k}) = St^n \cdot T^n = 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f(St^n)$ nicht homolog 0 in $\mathfrak{K}$ ist. $\alpha^k \circ \alpha^{n-k}$ ist Homotopierand von $f(St^n)$, daher $(\alpha^k, \alpha^{n-k}) \in \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$.

Gehen wir umgekehrt von dem Element (α^k, α^{n-k}) aus, so können wir also folgern: die Aussage, dass $(\alpha^k, \alpha^{n-k}) \in \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ ist, zieht die Existenz eines nicht nullhomologen Zyklus $f(St^n)$ nach sich. Weiter können wir behaupten, dass (α^k, α^{n-k}) nicht $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$

angehören kann; denn nach dem soeben Bewiesenen, mit $\mathfrak{K}^{n-1}$ statt $\mathfrak{K}$, würde die Existenz eines nicht nullhomologen n-dimensionalen Zyklus in $\mathfrak{K}^{n-1}$ folgen, was unmöglich ist. Diese Methode versagt natürlich, falls eines der Elemente $h\alpha^k$ und $h\alpha^{n-k}$ homolog 0 ist in $\mathfrak{K}$.

2. Wir bilden eine Untergruppe $\mathfrak{U}^{n-1}_\Gamma$ von $\mathfrak{U}^{n-1}$. Ein Paar (α^k, α^{n-k}), $\alpha^k \in \Pi^k$, $\alpha^{n-k} \in \Pi^{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, gehöre zu $\mathfrak{U}^{n-1}_\Gamma$ falls

entweder $\alpha^k \in \Gamma^k$ oder $i\alpha^{n-k} \in \Gamma^{n-k}$.

Die Gruppe $\mathfrak{U}^{n-1}_\Gamma$ werde von diesen Paaren erzeugt. Wir setzen $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1} = \mathfrak{U}^{n-1}/\mathfrak{U}^{n-1}_\Gamma$. Ist $U^{n-1} \in \mathfrak{U}^{n-1}$, so bezeichnen wir sein Bild in $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ mit $\overline{U}^{n-1}$, analog für eine Untergruppe von $\mathfrak{U}^{n-1}$.

Sei $M^n \in \mathfrak{M}^n$ und $V^{n-1} \in \mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ mit $wV^{n-1} = \mathring{M}^n$. Ist M^n nicht homolog 0 in $\mathfrak{K}$, so dürfen wir nicht erwarten, dass sich V^{n-1} mit der in 1. angedeuteten Methode beschreiben lässt, sondern wir können höchstens erwarten, dass sich $\overline{V}^{n-1}$ beschreiben lässt.

Aus den Definitionen von $\mathfrak{U}^{n-1}$ und $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ folgt leicht:

$$\overline{\mathfrak{U}}^{n-1} \cong \Sigma_{k=1}^{k<\frac{n}{2}} (\overline{\mathfrak{S}}^k \otimes \overline{\mathfrak{S}}^{n-k}) + \overline{\mathfrak{U}}^{n-1}_{\frac{n}{2}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass $\Pi^k/\Gamma^k \cong \overline{\mathfrak{S}}^k$, der Gruppe der Homologieklassen, deren Elemente sphärisch sind, und dass Π^1/Γ^1 abelsch ist. Wenn $\frac{n}{2}$ nicht ganz ist, so ist $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}_{\frac{n}{2}} = 0$ und wenn $\frac{n}{2}$ ganz ist, so ist $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}_{\frac{n}{2}}$ die mit den Elementen von $\overline{\mathfrak{S}}^{\frac{n}{2}}$ zu $\mathfrak{U}^{n-1}_{\frac{n}{2}}$ analog gebildete Gruppe.

Sind die Untergruppen $\overline{\mathfrak{S}}^k$ von $\mathfrak{H}^k$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ bekannt, so ist die Struktur von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ bestimmt.

3. Für das Folgende müssen wir in den Gruppen $\overline{\mathfrak{S}}^k$ und in $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ Basen einführen. $X^k_1, X^k_2, \ldots, X^k_{r_k}$ sei eine kanonische Basis von $\overline{\mathfrak{S}}^k$, deren Elemente die Ordnungen m^k_i, $i = 1, 2, \ldots, r_k$, besitzen mögen, wobei also $m^k_i \equiv 0 \bmod m^k_{i+1}$, für $i = 1, 2, \ldots, r_{k-1}$ gilt. Fassen wir die Elemente X^k_i als Elemente des Moduls der k-Ketten $\mathfrak{C}^k$ auf, so erzeugen sie einen Teilmodul von $\mathfrak{C}^k$ und es existiert eine Basis $Y^k_1, Y^k_2, \ldots, Y^k_{s_k}$ von $\mathfrak{C}^k$, mit $s_k \geqq r_k$, derart dass

$$X^k_i = c^k_i Y^k_i, \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r_k, \text{ mit } c^k_i > 0.$$

Die Elemente Y_i^k sind für $i = 1, 2, \ldots, r_k$ Zyklen der Ordnung o_i^k. Für die Ordnungen der X_i^k gilt dann

$$m_i^k = \frac{o_i^k}{(c_i^k, o_i^k)}. \tag{1}$$

Die durch die Y_i^k gebildete Basis von $\mathfrak{C}^k$ besitzt eine duale Basis $Y'^k_1, Y'^k_2, \ldots, Y'^k_{s_k}$, d.h. für diese beiden Basen von $\mathfrak{C}^k$ gilt

$$Y_i^k \cdot Y'^k_j = \delta_{ij}, \text{ für } i, j = 1, 2, \ldots, s_k,$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist. Da die Y_i^k für $i = 1, 2, \ldots, r_k$ Zyklen der Ordnungen o_i^k sind, stellen die Y'^k_i für $i = 1, 2, \ldots, r_k$ Cozyklen modulo o_i^k dar.

Wir wählen in den Gruppen $\Pi^k(\mathfrak{K}^{n-1})$ Elemente ξ_i^k für $i = 1, 2, \ldots, r_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, so dass $h\xi_i^k = X_i^k$ für $k < n-1$ und $hi\xi_i^k = X_i^k$ für $k = n-1$ gilt. Dann bilden die Elemente

$$\overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r_k,\ j = 1, 2, \ldots, r_{n-k},\ k < \frac{n}{2}, \text{ und}$$

$$\overline{(\xi_i^{\frac{n}{2}}, \xi_i^{\frac{n}{2}})} \text{ für } i, j = 1, 2, \ldots, r_{\frac{n}{2}},\ i \leqq j,\ k = \frac{n}{2} \text{ ganz}$$

eine Basis von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$.

Die Ordnung des Elementes $\overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})}$ ist (m_i^k, m_j^{n-k}) für $k < \frac{n}{2}$, $(m_i^{\frac{n}{2}}, m_j^{\frac{n}{2}})$ für $k = \frac{n}{2}$ ganz, $i < j$ und $(1 - (-1)^{\frac{n}{2}}, m_i^{\frac{n}{2}})$ für $k = \frac{n}{2}$ ganz, $i = j$. Es ist klar, dass wir diejenigen Elemente, deren Ordnung 1 ist, noch aus der Basis von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ herauszustreichen haben.

4. In 1. wurde bereits das Cupprodukt $\cup$ der Cohomologietheorie verwendet. Im Hinblick auf einen Sonderfall müssen wir noch von einer weiteren Operation aus der Cohomologietheorie sprechen, dem sogenannten Pontrjaginschen Quadrat, vgl. z.B. [4], S. 60. Es lässt sich mit Hilfe des $\cup$-Produktes und des $\cup_1$-Produktes von Steenrod [9] definieren. Wir zählen hier nur die wesentlichen Eigenschaften des Pontrjaginschen Quadrates auf, die wir im Folgenden verwenden:

P1) Sei $\mathfrak{H}'^k(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_m)$ die die k-te Cohomologiegruppe von $\mathfrak{K}$, bezüglich der zyklischen Gruppe der Ordnung m als Koeffizientenbereich, m gerade > 0. Das Pontrjaginsche Quadrat ordnet jedem Element C^k von $\mathfrak{H}'^k(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_m)$ ein Element $C^k \uplus C^k$ von $\mathfrak{H}'^{2k}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{2m})$ zu. Diese Zuordnung ist im Allgemeinen kein Homomorphismus.

P2) Für das natürliche Bild $(C^k)_m$ eines Elementes $C^k \in \mathfrak{H}'^k(\mathfrak{K}, \mathfrak{G})$

in $\mathfrak{H}'^k(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_m)$ gilt:

$$(C^k)_m \uplus (C^k)_m = (C^k \cup C^k)_{2m}.$$

P3) Ist r der natürliche Homomorphismus von $\mathfrak{H}'^{2k}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{2m})$ in $\mathfrak{H}'^{2k}(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_m)$, so gilt:

$$r(C^k \uplus C^k) = C^k \cup C^k.$$

P4) Ist der Komplex $\mathfrak{K}$ in einem Komplex $\mathfrak{L}$ abgebildet und ist h'_f der duale Homomorphismus der Cohomologiegruppen von $\mathfrak{L}$ in diejenigen von $\mathfrak{K}$, so gilt:

$$h'_f(C^k \uplus C^k) = (h'_f C^k) \uplus (h'_f C^k).$$

Damit sind jetzt die Hilfsmittel, die wir in diesem Abschnitt brauchen, bereitgestellt.

5. Sei $V^{n-1} \in \mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$ und $M^n = f(St^n) \in \mathfrak{M}^n$, für das $wV^{n-1} = \mathring{M}^n$ gilt. Nach 2. und 3. lässt sich V^{n-1} folgendermassen darstellen:

$$V^{n-1} = \Sigma_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Sigma_{i=1}^{r_k} \Sigma_{j=1}^{r_{n-k}}{}' a_{ij}^k (\xi_i^k, \xi_j^{n-k}) + V_\circ^{n-1}, \quad V_\circ^{n-1} \in \mathfrak{U}_\Gamma^{n-1},$$

wobei $\Sigma\Sigma\Sigma'$ bedeuten soll, dass, im Fall $k = \frac{n}{2}$ ganz, $i \leqq j$ sein soll.

Gemäss den Ordnungen der Elemente $\overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})}$ von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ sei

$$0 \leqq a_{ij}^k < \begin{cases} (m_i^k, m_j^{n-k}) & , \text{ für } k < \frac{n}{2}, \\ (m_i^{\frac{n}{2}}, m_j^{\frac{n}{2}}) = m_j^{\frac{n}{2}} & , \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ganz, } i < j, \\ (1 - (-1)^{\frac{n}{2}}, m_i^{\frac{n}{2}}) & , \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ganz, } i = j. \end{cases} \tag{2}$$

St^n sei so konstruiert und in $\mathfrak{K}$ abgebildet, wie es in §4 dargestellt wurde. Der Henkel von St^n, welcher dem Glied a_{ij}^k (ξ_i^k, ξ_j^{n-k}) von V^{n-1} entspricht, sei $P_{k,ij}^{n'}$; seine Faktorsphären seien S_{ij}^k und S_{ij}^{n-k}, wobei wir im Falle $k = \frac{n}{2}$ ganz $n - \frac{n}{2}$ so stehen lassen zur Unterscheidung der Faktoren. Ist h_f der Homomorphismus der Homologiegruppen von St^n in diejenigen von $\mathfrak{K}$ so haben wir

$$\begin{aligned} h_f(S_{ij}^k) &= h(\xi_i^k) = X_i^k = c_i^k Y_i^k, \\ h_f(S_{ij}^{n-k}) &= h(a_{ij}^k \xi_j^{n-k}) = a_{ij}^k X_j^{n-k} = a_{ij}^k c_j^{n-k} Y_j^{n-k}. \end{aligned} \tag{3}$$

T_{ij}^k und T_{ij}^{n-k} $\left(n - \frac{n}{2}\right.$ wieder stehen gelassen für $\left.k = \frac{n}{2} \text{ ganz}\right)$ seien die zu S_{ij}^k und S_{ij}^{n-k} dualen Cozyklen in St^n und T^n sei der zum

Grundzyklus von St^n duale Cozyklus. Es gilt in St^n (St^n ist ja leicht zu überblicken, so dass wir das nicht näher auszuführen brauchen):

$$\left.\begin{array}{l}
T^k_{i_1j_1} \cup T^{n-k}_{i_2j_2} = \begin{cases} T^n, \text{ falls } i_1 = i_2,\ j_1 = j_2, \\ 0, \text{ sonst,} \end{cases} \\
\text{für } i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, r_k,\ j_1, j_2 = 1, 2, \ldots, r_{n-k},\ 0 < k < \frac{n}{2}, \\
T^{\frac{n}{2}}_{i_1j_1} \cup T^{\frac{n}{2}}_{i_2j_2} = 0, \\
T^{\frac{n}{2}}_{i_1j_1} \cup T^{n-\frac{n}{2}}_{i_2j_2} = \begin{cases} T^n, \text{ falls } i_1 = i_2,\ j_1 = j_2, \\ 0, \text{ sonst,} \end{cases} \\
T^{n-\frac{n}{2}}_{i_1j_1} \cup T^{n-\frac{n}{2}}_{i_2j_2} = 0, \\
\text{für } i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, \ldots, r_{\frac{n}{2}},\ i_1 \leqq j_1,\ i_2 \leqq j_2,\ k = \frac{n}{2} \text{ ganz.}
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Ist h'_f der zu h_f duale Homomorphismus der Cohomologiegruppen von $\mathfrak{K}$ in diejenigen von St^n, so folgt aus (3):

$$\left.\begin{array}{l}
h'_f(Y'^k_i) = c^k_i \sum_{j=1}^{r_{n-k}} T^k_{ij} \bmod o^k_i, \\
\qquad\qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, r_k,\ k < \frac{n}{2}, \\
h'_f(Y'^{n-k}_j) = c^{n-k}_j \sum_{i=1}^{r_k} a^k_{ij} T^{n-k}_{ij} \bmod o^{n-k}_j, \\
\qquad\qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, r_{n-k},\ k < \frac{n}{2}, \\
h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i) = c^{\frac{n}{2}}_i \sum_{j=i}^{r_{\frac{n}{2}}} T^{\frac{n}{2}}_{ij} + c^{\frac{n}{2}}_i \sum_{j=1}^{i} a^{\frac{n}{2}}_{ji} T^{n-\frac{n}{2}}_{ji} \bmod o^{\frac{n}{2}}_i, \\
\qquad\qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, r_{\frac{n}{2}},\ k = \frac{n}{2} \text{ ganz.}
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Da der Homomorphismus h'_f multiplikativ ist, folgt aus (4) und (5), zunächst für $k < \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned}
h'_f(Y'^k_i \cup Y'^{n-k}_j) &= h'_f Y'^k_i \cup h'_f Y'^{n-k}_j \\
&= c^k_i \sum_{l_1=1}^{r_{n-k}} T^k_{il_1} \cup c^{n-k}_j \sum_{l_2=1}^{r_k} a^k_{l_2j} T^{n-k} \\
&= a^k_{ij} c^k_i c^{n-k}_j T^n \bmod (o^k_i, o^{n-k}_j).
\end{aligned}$$

Für $k = \frac{n}{2}$ ganz müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden:

$$i < j\colon h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i \cup Y'^{\frac{n}{2}}_j) = h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i \cup h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_j$$
$$= (c_i^{\frac{n}{2}} \textstyle\sum_{l_1=1}^{r_{\frac{n}{2}}} T^{\frac{n}{2}}_{il_1} + c_i^{\frac{n}{2}} \sum_{l_1=1}^{i} a^{\frac{n}{2}}_{l_1 i} T^{n-\frac{n}{2}}_{l_1 i})$$
$$\cup\, (c_j^{\frac{n}{2}} \textstyle\sum_{l_2=j}^{r_{\frac{n}{2}}} T^{\frac{n}{2}}_{jl_2} + c_j^{\frac{n}{2}} \sum_{l_2=1}^{j} a^{\frac{n}{2}}_{l_2 j} T^{n-\frac{n}{2}}_{l_2 j})$$
$$= a^{\frac{n}{2}}_{ij} c_i^{\frac{n}{2}} c_j^{\frac{n}{2}} T^n \bmod (o_i^{\frac{n}{2}}, o_j^{\frac{n}{2}})$$

$i = j$, $\frac{n}{2}$ ungerade, und $i = j$, $\frac{n}{2}$ gerade, $o_i^{\frac{n}{2}}$ ungerade:

$$h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i \cup Y'^{\frac{n}{2}}_i) = h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i \cup h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i$$
$$= (c_i^{\frac{n}{2}} \textstyle\sum_{l_1=i}^{r_{\frac{n}{2}}} T^{\frac{n}{2}}_{il_1} + c_i^{\frac{n}{2}} \sum_{l_1=1}^{i} a^{\frac{n}{2}}_{l_1 i} T^{n-\frac{n}{2}}_{l_1 i})$$
$$\cup\, (c_i^{\frac{n}{2}} \textstyle\sum_{l_2=i}^{r_{\frac{n}{2}}} T^{\frac{n}{2}}_{il_2} + c_i^{\frac{n}{2}} \sum_{l_2=1}^{i} a^{\frac{n}{2}}_{l_2 i} T^{n-\frac{n}{2}}_{l_2 i})$$
$$= a^{\frac{n}{2}}_{ii} (c_i^{\frac{n}{2}})^2 (T^{\frac{n}{2}}_{ii} \cup T^{n-\frac{n}{2}}_{ii} + T^{n-\frac{n}{2}}_{ii} \cup T^{\frac{n}{2}}_{ii})$$
$$= \begin{cases} 0 \bmod o_i^{\frac{n}{2}}, \text{ für } \frac{n}{2} \text{ ungerade,} \\[2ex] 2a^{\frac{n}{2}}_{ii} \cdot (c_i^{\frac{n}{2}})^2 T^n \bmod o_i^{\frac{n}{2}}, \text{ für } \frac{n}{2} \text{ gerade,} \end{cases}$$

$i = j$, $\frac{n}{2}$ gerade, $o_i^{\frac{n}{2}}$ gerade:

$$h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus Y'^{\frac{n}{2}}_i) = h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i$$
$$= h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i \cup h'_f Y'^{\frac{n}{2}}_i = \ldots$$
$$= 2a^{\frac{n}{2}}_{ii} (c_i^{\frac{n}{2}})^2 T^n \bmod (2o_i^{\frac{n}{2}}),$$

wobei im letzten Fall zu beachten ist, dass wir in St^n das Prontrjaginsche Quadrat durch das Cupprodukt ersetzen dürfen, da wir in St^n nur Cozyklen modulo 0 haben. Es gilt weiter

$$M^n \cdot (Y'^k_i \cup Y'^{n-k}_j) = h_f(St^n) \cdot (Y'^k_i \cup Y'^{n-k}_j) =$$
$$= St^n \cdot h'_f(Y'^k_i \cup Y'^{n-k}_j) \text{ modulo } (o_i^k, o_j^{n-k}),$$

$$M^n \cdot (Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus Y'^{\frac{n}{2}}_i) = h_f(St^n) \cdot (Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus Y'^{\frac{n}{2}}_i) = St^n \cdot h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus Y'^{\frac{n}{2}}_i)$$
$$\bmod (2o_i^{\frac{n}{2}}).$$

Setzen wir für $h'_f(Y'^k_i \cup Y'^{n-k}_j)$ und $h'_f(Y'^{\frac{n}{2}}_i \uplus Y'^{\frac{n}{2}}_i)$ ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} M^n \cdot (Y_i'^k \cup Y_j'^{n-k}) &= \begin{cases} a_{ij}^k c_i^k c_j^{n-k} \bmod (o_i^k, o_j^{n-k}), \text{ für } k < \frac{n}{2}, \\ a_{ij}^{\frac{n}{2}} c_i^{\frac{n}{2}} c_j^{\frac{n}{2}} \bmod (o_i^{\frac{n}{2}}, o_j^{\frac{n}{2}}), \text{ für } k = \frac{n}{2}, \ i < j, \\ 0 \bmod o_i^{\frac{n}{2}}, \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ ungerade}, \ i = j, \\ 2a_{ii}^{\frac{n}{2}} \cdot (c_i^{\frac{n}{2}})^2 \bmod o_i^{\frac{n}{2}}, \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ gerade}, \\ \qquad\qquad i = j, \ o_i^{\frac{n}{2}} \text{ ungerade}, \end{cases} \\ M^n \cdot (Y_i'^{\frac{n}{2}} \Cup Y_i'^{\frac{n}{2}}) &= 2a_{ii}^{\frac{n}{2}} \cdot (c_i^{\frac{n}{2}})^2 \bmod (2o_i^{\frac{n}{2}}), \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ gerade}, \\ &\qquad\qquad i = j, \ o_i^{\frac{n}{2}} \text{ gerade} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Damit sind wir imstande Aussagen über die Koeffizienten a_{ij}^k zu machen. Aus (6) sind die Koeffizienten

$$a_{ij}^k \text{ bestimmt mod} \begin{cases} \dfrac{(o_i^k, o_j^{n-k})}{(c_i^k c_j^{n-k}, o_i^k, o_j^{n-k})}, \text{ für } k < \frac{n}{2} \text{ und } k = \frac{n}{2} \text{ ganz } i < j \\ \dfrac{o_i^{\frac{n}{2}}}{(2(c_i^{\frac{n}{2}})^2, o_i^{\frac{n}{2}})}, \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ gerade}, \ i = j, \ o_i^{\frac{n}{2}} \text{ ungerade} \\ \dfrac{2o_i^{\frac{n}{2}}}{(2(c_i^{\frac{n}{2}})^2, 2o_i^{\frac{n}{2}})}, \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ gerade}, \ i = j, \ o_i^{\frac{n}{2}} \text{ gerade} \end{cases}$$

Im Falle $k = \frac{n}{2}$ ungerade, $i = j$, bekommen wir keine Aussage, da dann nach (2) $0 \leqq a_{ii}^{\frac{n}{2}} < (2, m_i^{\frac{n}{2}})$, $m_i^{\frac{n}{2}}$ teilt $o_i^{\frac{n}{2}}$. Hier liegt ein *Ausnahmefall* vor. Die übrigen Fälle können wir, wie leicht einzusehen ist, zusammenfassen; durch (6) sind also die Koeffizienten

$$a_{ij}^k \text{ bestimmt mod} \frac{(o_i^k, o_j^{n-k})}{(c_i^k c_j^{n-k}, o_i^k, o_j^{n-k})}, \text{ ausser für } k = \frac{n}{2} \text{ ungerade}, i = j. \quad (7)$$

Gemäss (1) und (2) haben wir

$$0 \leqq a_{ij}^k < (m_i^k, m_j^{n-k}) = \left(\frac{o_i^k}{(c_i^k, o_i^k)}, \frac{o_j^{n-k}}{(c_j^{n-k}, o_j^{n-k})}\right),$$
$$\text{ausser für } k = \frac{n}{2} \text{ ungerade}, \ i = j. \quad (8)$$

Es ist leicht zu bestätigen, dass

$$d_{ij}^k = \frac{(o_i^k, o_j^{n-k})}{(c_i^k c_j^{n-k}, o_i^k, o_j^{n-k})} \text{ ein Teiler von } \left(\frac{o_i^k}{(c_i^k, o_i^k)}, \frac{o_j^{n-k}}{(c_j^{n-k}, o_j^{n-k})}\right) \text{ ist.} \tag{9}$$

6. Es ist zweckmässig zu einer Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ nach einer geeigneten Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}'^{n-1}$ überzugehen, um das Ergebnis von 5. zu formulieren. Die Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}'^{n-1}$ werde auf Grund von (7), (8) und (9) von allen Elementen

$$d_{ij}^k \overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})}, \text{ ausser für } k = \frac{n}{2} \text{ ungerade, } i = j,$$

und den Elementen

$$\overline{(\xi_i^{\frac{n}{2}}, \xi_i^{\frac{n}{2}})}, \text{ für } k = \frac{n}{2} \text{ ungerade,}$$

erzeugt; durch die letzteren eliminieren wir den Ausnahmefall. Wir setzen

$$\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1} = \overline{\mathfrak{U}}^{n-1}/\overline{\mathfrak{U}}'^{n-1}.$$

Das Bild eines Elementes $U^{n-1} \in \mathfrak{U}^{n-1}$ in $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$ bezeichnen wir mit $\overline{\overline{U}}^{n-1}$, ebenso für eine Untergruppe von $\mathfrak{U}^{n-1}$. Die Struktur der Gruppe $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$ ist bekannt, wenn die Gruppen $\mathfrak{S}^l$, als Untergruppen von $\mathfrak{H}^l$ bekannt sind, $l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Die Elemente $\overline{\overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})}}$ besitzen, abgesehen vom Ausnahmefall, die Ordnung d_{ij}^k und bilden eine Basis von $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$, wobei wir natürlich diejenigen herauszustreichen haben, deren Ordnung 1 ist.

Mit diesen Festsetzungen können wir das Ergebnis von 5. folgendermassen formulieren:

Satz 5. Sei $M^n \in \mathfrak{M}^n$ und V^{n-1} ein Element von $\mathfrak{V}^{n-1}(\mathfrak{K})$, für das $wV^{n-1} = \mathring{M}^n$ gilt. Setzen wir

$$\overline{\overline{V}}^{n-1} = \sum_k \sum_i \sum_{j'} a_{ij}^k \overline{\overline{(\xi_i^k, \xi_j^{n-k})}},$$

so lassen sich die Koeffizienten a_{ij}^k eindeutig bestimmen, und zwar durch Bildung des Wertes von M^n auf den Cupprodukten

$$Y_i'^k \cup Y_j'^{n-k}$$

(für alle k, i, j, ausser $k = \frac{n}{2}$ ungerade, $i = j$, und $k = \frac{n}{2}$ gerade, $i = j$, $o_i^{\frac{n}{2}}$ gerade) und auf den Pontrjaginschen Quadraten

$$Y_i'^{\frac{n}{2}} \Cup Y_i'^{\frac{n}{2}}$$

(für $k = \frac{n}{2}$ gerade, $i = j$, $o_i^{\frac{n}{2}}$ gerade).

7. Nach §4,7. bilden die Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$, deren Bilder unter w Homotopieränder eines Elementes $M^n \epsilon \mathfrak{M}^n$ sind, eine der Restklassen, in die $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ modulo $\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ zerfällt. Aus den Definitionen von $\mathfrak{U}_\Gamma^{n-1}$ und $\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K})$ folgt sofort, dass

$$\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{U}_\Gamma^{n-1}, \text{ d.h. } \overline{\mathfrak{B}}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) = 0 \text{ und } \overline{\overline{\mathfrak{U}}}_0^{n-1}(\mathfrak{K}) = 0.$$

Ist $V^{n-1} \epsilon \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$, sodass $wV^{n-1} = \mathring{M}^n$, so folgt weiter aus der eindeutigen Bestimmtheit von $\overline{\overline{V}}^{n-1}$, nach Satz 5, dass

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) = 0$$

sein muss.

Da die Homotopieränder der Elemente von $\mathfrak{S}^n$ die Gruppe $\mathfrak{R}_0^{n-1} = w\mathfrak{B}_0^{n-1}(\mathfrak{K})$ bilden, ist es klar, dass die Elemente von $\mathfrak{S}^n$ die in Satz 5 genannten Produkte annihilieren. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^n$ die Untergruppe von $\mathfrak{M}^n$, deren Elemente die erwähnten Produkte annihilieren, so haben wir

$$\mathfrak{S}^n \subset \mathfrak{A}^n.$$

Ist $\overline{\mathfrak{A}}^n$ ferner die Gruppe der Homologieklassen von $\mathfrak{A}^n$, so gilt

$$\mathfrak{M}^n/\mathfrak{A}^n \cong \overline{\mathfrak{M}}^n/\overline{\mathfrak{A}}^n.$$

Mit Satz 5 zusammen haben wir jetzt:

Satz 6. Für die Untergruppen $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ und $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{U}^{n-1}$ gilt

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1}) = 0,$$
$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{n-1}(\mathfrak{K}) \cong \mathfrak{M}^n/\mathfrak{A}^n \cong \overline{\mathfrak{M}}^n/\overline{\mathfrak{A}}^n.$$

Die Struktur von $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{n-1}(\mathfrak{K})$ als Untergruppe von $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$ lässt sich durch $\mathfrak{M}^n$ aus den Homologieeigenschaften von $\mathfrak{K}$ (einschliesslich des Pontrjaginschen Quadrates) vollständig bestimmen.

8. Zwei Bemerkungen:

A) Für die Koeffizienten c_i^1 aus 5. gilt $c_i^1 = 1$, denn $\overline{\mathfrak{S}}^1 = \mathfrak{H}^1$.

B) Zum Übergang von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ zu $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$. Abgesehen vom Ausnahmefall ist dieser Übergang zum Beispiel in den folgenden beiden Fällen nicht notwendig, d.h. es ist im Wesentlichen $\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$ gleich $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$:

a) $\mathfrak{K}$ besitzt keine Torsion.

b) Alle Koeffizienten c_i^k sind gleich 1.

9. Für $n = 6$ können wir ein Beispiel geben, welches zeigt, dass der Ausnahmefall nicht von der Unzulänglichkeit der verwendeten Methode herrührt. Wir betrachten als Komplex die Sphäre S^3. $\mathfrak{U}^5(S^3)$ wird von (S^3, S^3) erzeugt, wobei $2(S^3, S^3) = 0$ ist. S^3 ist ein Gruppenraum; da in allen Gruppenräumen die White-

headschen Produkte trivialerweise verschwinden, ist $\mathfrak{W}^5(S^3) = \mathfrak{U}^5(S^3)$, hingegen ist natürlich $\overline{\mathfrak{M}}^6 = 0$.

§ 6. Zur Einbettung von $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$.

1. Wir stellen uns die Frage, ob wir mit unserer Methode auch etwas darüber sagen können, wie $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ eingebettet ist, $(n > 3)$. Es stellt sich heraus, dass wir gewisse Aussagen machen können, wobei wir hier allerdings die zusätzliche Voraussetzung machen, dass die Gruppe $\Pi^{n-1}/\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ endlich viele Erzeugenden besitze. Nach einem Satz von Serre in [10] besitzen alle Homotopiegruppen eines endlichen Komplexes endlich viele Erzeugenden, falls alle Gruppen Π_0^k (siehe §1,1.) verschwinden, (was zum Beispiel der Fall ist, wenn der Komplex einfachzusammenhängend ist). In diesem Falle zum Beispiel ist also unsere Voraussetzung erfüllt; es ist aber zu vermuten, dass sie es auch in allgemeineren Fällen ist, da ja die Gruppe Π_0^k in $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ enthalten ist.

Sei nun $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_t$ eine kanonische Basis von $\Pi^{n-1}/\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$; die Ordnung von $\bar{\eta}_i$ sei b_i, wobei $b_i \equiv 0 \bmod b_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, t-1$ und es sei $b_i = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ und $b_i \neq 0$ für $i = s+1, \ldots, t$. Wir wählen in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ feste Urbilder $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ der Elemente $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_t$. Die Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ erzeugen eine Untergruppe von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$, welche ein direkter Summand von $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K})$ ist. Für die Elemente $\eta_{s+1}, \eta_{s+2}, \ldots, \eta_t$ bestehen Relationen von der Form

$$b_i\eta_i = \zeta_i \in \mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}),\ i = s+1,\ s+2, \ldots, t.$$

In $\mathfrak{U}^{n-1}$ wählen wir feste Elemente U_i, für welche $iwU_i = \zeta_i$ gilt. Diese U_i sind natürlich nur modulo $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ und, wenn wir uns auch von der speziellen Wahl der η_i als Urbilder der $\bar{\eta}_i$ freimachen wollen, sogar nur modulo $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup b_i\mathfrak{U}^{n-1}$ bestimmt. Was können wir nun über diese Elemente U_i und damit über die ζ_i aussagen?

2. Seien ξ_i feste Urbilder in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ der Elemente $b_i\eta_i$. Es ist $wU_i - \xi_i \in \mathfrak{R}^{n-1}$, also ist $wU_i - \xi_i$ Homotopierand einer n-Kette.

Behauptung: Es gibt eine Abbildung f_i einer gelochten Standardmannigfaltigkeit $St_i^{n\prime}$ in $\mathfrak{K}$, derart dass $wU_i - \xi_i$ Homotopierand von $f_i(St_i^{n\prime})$ ist.

Beweis: Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis in §4. Der Struktur von U_i entsprechend werden die gelochten Henkel gewählt und in $\mathfrak{K}$ abgebildet; in die S^n, der wir die Henkel ansetzen, machen wir ein Loch mehr als wir Henkel haben. Eines dieser

Löcher wird auf eine Sphäre, welche $-\xi_i$ repräsentiert, abgebildet, die anderen den Henkeln entsprechend. Die Abbildung wird auf die gelochte Sphäre erweitert, die Henkel werden angesetzt, so haben wir eine gelochte Standardmannigfaltigkeit $St_i^{n\prime}$ die durch eine Abbildung f_i in $\mathfrak{K}$ abgebildet ist; gemäss der Konstruktion ist $wU_i - \xi_i$ ein Homotopierand von $f_i(St_i^{n\prime})$.

Sei C_i^n eine Kette, deren Homotopieränder sich von einem Urbild in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ von $b_i\eta_i$ nur durch Elemente von $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ unterscheidet. Es lässt sich leicht zeigen, dass C_i^n Bild einer gelochten Standardmannigfaltigkeit ist.

3. Sei $f_i(St_i^{n\prime})$ die zu $wU_i - \xi_i$ in 2. konstruierte Abbildung. Genau so wie in §5 folgt jetzt, dass durch die Werte von $f_i(St_i^{n\prime})$ auf gewissen Cupprodukten und Pontrjaginschen Quadraten (dieselben wie in §5) $\overline{\overline{U}}_i$ bestimmt ist. Falls $\overline{\overline{U}}_i$ nicht gleich 0 ist, folgt daraus, dass es in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ keine der Relation $b_i\eta_i = \zeta_i$ entsprechende Relation geben kann.

Satz 7. Ist C_i^n eine Kette, deren Homotopieränder modulo $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ gleich einem Urbild von $b_i\eta_i$ in $\Pi^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ sind, ferner U_i ein Urbild in $\mathfrak{U}^{n-1}$ von ζ_i, so lässt sich die Klasse von $\overline{\overline{U}}_i$ modulo $\overline{\overline{\mathfrak{Z}}}^{n-1}(\mathfrak{K}) \cup b_i\overline{\overline{\mathfrak{U}}}^{n-1}$ durch die Werte von C_i^n auf gewissen Cupprodukten und Pontrjaginschen Quadraten eindeutig bestimmen.

Kapitel II.

Untersuchung der Π^3 in einfachzusammenhängenden Komplexen.

In diesem Kapitel sollen die allgemeinen Methoden von Kapitel I auf die Untersuchung der Gruppe Π^3 in einfachzusammenhängenden Komplexen angewendet werden.

§ 1. Erweiterung von $\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ und $\mathfrak{U}^3$.

1. Aus $\Pi^1(\mathfrak{K}) = 0$ folgt nach einem Satz von Hurewicz [11]: $\Pi^2(\mathfrak{K}) \cong \overline{\mathfrak{S}}^2 = \mathfrak{H}^2$: darin ist enthalten, dass $\Gamma^2(\mathfrak{K}) = 0$ ist. Es ist $\mathfrak{U}^3 = \mathfrak{U}_2^3$ und es folgt aus Kapitel I: $\mathfrak{U}^3 = \overline{\mathfrak{U}}^3 = \overline{\overline{\mathfrak{U}}}^3$. Daraus sehen wir bereits, dass die Aussagen hier weiter reichen als im allgemeinen Fall. Wir wollen die Gruppen $\mathfrak{U}^3$ und $\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ aber noch erweitern; es wird sich dann nämlich zeigen, dass die erweiterte Gruppe $\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ gleich der Gruppe $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ wird.

2. Sei $\alpha \in \Pi^2(\mathfrak{K})$. Aus der Definition von $\alpha \circ \alpha \in \mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ folgt, dass $\alpha \circ \alpha$ von dem Bild einer S^3 repräsentiert wird, das auf einem Repräsentanten von α liegt; es folgt leicht, dass die zugehörige

Hopfsche Invariante $\gamma = 2$ ist [12]. Das Element von $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$, das durch das Bild einer S^3 repräsentiert wird, welches mit der Hopfschen Invarianten $\gamma = 1$ auf einem Repräsentanten van α liegt, bezeichnen wir mit $\eta(\alpha)$. Es gilt dann $\alpha \circ \alpha = 2\eta(\alpha)$. Die Zuordnung $\eta(\alpha)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1) $2\eta(\alpha) = \alpha \circ \alpha$,

2) $\eta(\alpha_1 + \alpha_2) = \eta(\alpha_1) + \eta(\alpha_2) + \alpha_1 \circ \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Pi^2$.

Aus ihnen folgt weiter:

$$\eta(c\alpha) = c^2\eta(\alpha), \text{ für } c \text{ ganz,}$$
$$(m^2, 2m)\eta(\alpha) = 0, \text{ wenn } m\alpha = 0 \text{ ist.}$$

Wir nehmen die Elemente $\eta(\alpha)$ zu allen $\alpha \in \Pi^2$ zur Gruppe $\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ hinzu und bezeichnen die so erweiterte Gruppe mit $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$. Entsprechend erweitern wir die formale Produktgruppe $\mathfrak{U}^3$, indem wir ihr formal die Elemente $\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$ als Erzeugende hinzufügen und verlangen, dass

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_1) + \tfrac{1}{2}(\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_1, \alpha_2)$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \Pi^2$ gilt. Wir setzen $w\frac{1}{2}(\alpha, \alpha) = \eta(\alpha)$. Die erweiterte Gruppe $\mathfrak{U}^3$ heisse $*\mathfrak{U}^3$. Die den Untergruppen $\mathfrak{V}^3(\mathfrak{K}^3)$ und $\mathfrak{V}^3(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{U}^3$ entsprechenden Untergruppen von $*\mathfrak{U}^3$ mögen $*\mathfrak{V}^3(\mathfrak{K}^3)$ und $*\mathfrak{V}^3(\mathfrak{K})$ heissen.

3. Sei $X_1, X_2, \ldots, X_r$ eine kanonische Basis von $\mathfrak{H}^2$; die Ordnung von X_i sei m_i, dann gilt $m_i \equiv 0 \bmod m_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Wir können die X_i gleichzeitig als Basis von Π^2 benützen, da $\Pi^2 \cong \mathfrak{H}^2$ ist. Mit Hilfe dieser Basis lässt sich jedes Element $U \in *\mathfrak{U}^3$ eindeutig wie folgt darstellen:

$$U = \sum_{i=1}^r a_{ii}\tfrac{1}{2}(X_i, X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^r a_{ij}(X_i, X_j);$$

der Koeffizient a_{ij} durchläuft die Restklassengruppe $\mathfrak{G}_{m_{ij}}$ der ganzen Zahlen mod m_{ij}, wobei

$$m_{ij} = \begin{cases} (m_i, m_j) & \text{für } i < j, \\ (2m_i, m_i^2) & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Es folgt leicht, dass $*\mathfrak{U}^3$ isomorph der additiven Gruppe der symmetrischen Matrizen der Ordnung r ist, deren Elemente $a_{ij} \in \mathfrak{G}_{m_{ij}}$ sind. (Wir setzen $(0, 0) = 0$ und $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$).

§ 2. Die Erweiterung von $\mathfrak{M}^4$ und der Zusammenhang von $\mathfrak{M}^4$ mit $\mathfrak{U}^3$.

1. Damit der Zusammenhang von $\mathfrak{M}^4$ mit $\mathfrak{U}^3$ gewahrt bleibt, müssen wir entsprechend der Erweiterung von $\mathfrak{U}^3$ auch $\mathfrak{M}^4$ erweitern. Zunächst erweitern wir die Klasse der Standardmannigfaltigkeiten. Ausser den gelochten Sphärenprodukten lassen wir im folgenden auch gelochte komplexe projektive Ebenen als Henkel einer Standardmannigfaltigkeit zu. Dadurch wird die Gruppe der Standardzyklen in $\mathfrak{K}$ erweitert, sie heisse $*\mathfrak{M}^4$.

2. Warum lassen wir gelochte komplexe projektive Ebenen als Henkel zu? Sei Q^4 eine fest orientierte komplexe projektive Ebene. Wir wählen in ihr eine feste Gerade S^2 und machen in Q^4 ein Loch, indem wir aus ihr eine 4-dimensionale zu S^2 disjunkte Vollsphäre V^4 entfernen. Die gelochte Q^4 heisse $Q^{4\prime}$ und die Randsphäre S^3 sei so orientiert, dass $\mathring{Q}^{4\prime} = - S^3$. Nun ist S^2 ein Retrakt von $Q^{4\prime}$, und die durch die retrahierende Abbildung vermittelte Abbildung von S^3 auf S^2 besitzt die Hopfsche Invariante $\gamma = \pm 1$, je nach der gewählten Orientierung von Q^4. Daraus folgt leicht $\pm \eta(S^2) = \mathring{Q}^4$. Wir benützen also die komplexen projektiven Ebenen um die Elemente $\eta(\alpha) \in *\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ zu bekommen. Es gilt hier wieder, dass die Gruppe der Homotopieränder $\mathfrak{R}^3_{*\mathfrak{M}}$ der Elemente von $*\mathfrak{M}^4$ in $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ enthalten ist, oder dass $w^{-1}\mathfrak{R}^3_{*\mathfrak{M}} \subset *\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$.

3. Entsprechend Kapitel I, §4 wird der Beweis geführt, dass $w^{-1}\mathfrak{R}^3_{*\mathfrak{M}} = *\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$ ist. Lediglich bei der Wahl der neuen Henkel müssen wir achtgeben. Sei $V \in *\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$; zu diesem V wird ja ein Element $M^4 \in *\mathfrak{M}^4$ konstruiert, so dass $wV = \mathring{M}^4$. Sei V gemäss §1,3. dargestellt. Für $i < j$ ist die Wahl der Henkel der zu konstruierenden Standardmannigfaltigkeit und ihre Abbildung klar; für $i = j$ unterscheiden wir zwei Fälle: 1) a_{ii} gerade. Wir ersetzen $a_{ii}\frac{1}{2}(X_i, X_i)$ durch $\frac{a_{ii}}{2}(X_i, X_i)$ und verwenden ein gelochtes Sphärenprodukt als Henkel. 2) a_{ii} ungerade. Wir schreiben $a_{ii}\frac{1}{2}(X_i, X_i)$ in der Form

$$sg\, a_{ii} \left(\frac{|a_{ii}| - 1}{2}(X_i, X_i) + \tfrac{1}{2}(X_i, X_i)\right).$$

Für den ersten Summanden nehmen wir wieder ein gelochtes Sphärenprodukt als Henkel und für den zweiten Summanden eine gelochte komplexe projektive Ebene $Q^{4\prime}$; die Gerade S^2 von $Q^{4\prime}$ bilden wir auf X_i ab, erweitern auf $Q^{4\prime}$ und wählen die Orientierung von $Q^{4\prime}$ so, dass sg $a_{ii}\eta(S^2) = \mathring{Q}^4$. Beim Anheften der Henkel haben wir dann auf die Orientierung zu achten.

In einer Beziehung geht es hier einfacher: aus $\Pi^1(\mathfrak{K}) = 0$ folgt $\Pi^3_0(\mathfrak{K}) = 0$ und damit auch $\mathfrak{R}^3_0 = 0$, d.h. die Homotopierandbildung ist hier eindeutig und wir brauchen nicht auf die Wahl der Grundpunkte der Homotopiegruppen zu achten.

Entsprechend Satz 4 von Kapitel I gilt

$$*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})/*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}^3) \cong \mathfrak{R}^3_{*\mathfrak{M}} \cong *\mathfrak{M}^4/\mathfrak{S}^4 \cong *\overline{\mathfrak{M}}^4/\overline{\mathfrak{S}}^4.$$

4. Aus den algebraischen Untersuchungen, die analog zu Kapitel I, §5 verlaufen, ergibt sich hier, dass

$$*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}^3) = 0, \text{ d.h. } *\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) \cong *\mathfrak{U}^3, \text{ und}$$
$$*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}) \cong *\overline{\mathfrak{M}}^4/\overline{\mathfrak{S}}^4,$$

ferner ist $*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$ als Untergruppe von $*\mathfrak{U}^3$ vollständig bestimmt durch die Homologiestruktur von $\mathfrak{K}$ und damit ist auch

$$*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}) \cong *\mathfrak{U}^3/*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$$

bestimmt. Wir werden diese Resultate später nochmals formulieren.

§ 3. Beweis von $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) = \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$.

1. Es ist klar, dass $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) \subset \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$; wir müssen also noch zeigen, dass $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) \supset \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$. Wir führen diesen Beweis in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass für einen einfachzusammenhängenden 2-dimensionalen Komplex $\mathfrak{K}^2$ immer $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^2) = \Gamma^3(\mathfrak{K}^2)$ gilt. Sei p die zweite Bettische Zahl von $\mathfrak{K}^2$. Es genügt einen Komplex $\mathfrak{L}^2_p = S^2_1 + S^2_2 + \ldots + S^2_p$, bestehend aus p 2-dimensionalen Sphären, welche in einem Punkt zusammengeheftet sind, zu betrachten; $\mathfrak{L}^2_p$ hat nämlich denselben Homotopietypus wie $\mathfrak{K}^2$ [11]. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach p, dass $*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}^2_p) = \Gamma^3(\mathfrak{L}^2_p)$. Für $p = 1$ ist die Behauptung richtig, denn $\Gamma^3(\mathfrak{L}^2_1)$ wird von $\eta(S^2_1)$ erzeugt und $\eta(S^2_1) \in *\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}^2_1)$. Die Behauptung sei bewiesen für $p - 1$.

Beweis für p. Sei $\alpha \in \Gamma^3(\mathfrak{L}^2_p)$, wir müssen zeigen: $\alpha \in *\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}^2_p)$. Es ist $\mathfrak{L}^2_p = \mathfrak{L}^2_{p-1} + S^2_p \subset \mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p$ und es gilt für das topologische Produkt $\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p$: $\Pi^3(\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p) = \Pi^3(\mathfrak{L}^2_{p-1}) + \Pi^3(S^2_p) = \Gamma^3(\mathfrak{L}^2_{p-1}) + \Gamma^3(S^2_p)$. Wird α als Element von $\Pi^3(\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p)$ betrachtet, so gilt daher $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ mit $\beta_1 \in \Gamma^3(\mathfrak{L}^2_{p-1})$ und $\beta_2 \in \Gamma^3(S^2_p)$. Das Element $\alpha - (\beta_1 + \beta_2)$ von $\Gamma^3(\mathfrak{L}^2_p)$ kann auch als Element von $\Gamma^3((\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p)^3)$ aufgefasst werden; da es, in $\Pi^3(\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p)$ injiziert, verschwindet, ist es Homotopierand eines Zyklus Z^4 von $\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p$. Die Produkte $S^2_1 \times S^2_p, S^2_2 \times S^2_p, \ldots, S^2_{p-1} \times S^2_p$ bilden eine vierdimensionale Homologiebasis von $\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p$, daher ist

$$Z^4 = \textstyle\sum_{i=1}^{p-1} a_i(S^2_i \times S^2_p).$$

Da nun $S^2_i \circ S^2_p = (S^2_1 \times S^2_p)^\circ$ und da die Homotopierandbildung hier eindeutig ist, gilt in $\Gamma^3((\mathfrak{L}^2_{p-1} \times S^2_p)^3)$

$$\mathring{Z}^4 = \alpha - (\beta_1 + \beta_2) = \Sigma_{i=1}^{p-1} a_i(S_i^2 \circ S_p^2).$$

Alle Elemente die hier vorkommen können wir uns in $\mathfrak{L}_p^2$ repräsentiert denken, die betreffende Homotopie kann von $(\mathfrak{L}_{p-1}^2 \times S_p^2)^3$ auf $\mathfrak{L}_p^2$ projiziert werden, daher gilt in $\Gamma^3(\mathfrak{L}_p^2)$:

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \Sigma_{i=1}^{p-1} a_i(S_i^2 \circ S_p^2);$$

es ist $\beta_1 \in {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}_{p-1}^2)$ nach Induktionsvoraussetzung, $\beta_2 \in {}^*\mathfrak{W}^3(S_p^2)$ und $\Sigma_{i=1}^{p-1} a_i(S_i^2 \circ S_p^2) \in {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}_p^2)$, also $\alpha \in {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{L}_p^2)$, q.e.d.

Bemerkung. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}_p^n = S_1^n + S_2^n + \ldots + S_p^n$ den Komplex der aus p n-dimensionalen Sphären besteht ($n \geqq 2$), welche in einem Punkt zusammengeheftet sind, so beweist man genau so wie oben, dass die Gruppe $\Pi^{2n-1}(\mathfrak{L}_p^n) = \Gamma^{2n-1}(\mathfrak{L}_p^n)$ von den Elementen von $\Pi^{2n-1}(S_i^n)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ und von $\mathfrak{W}^{2n-1}(\mathfrak{L}_p^n)$ erzeugt wird.

2. Jetzt beweisen wir, dass ${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) = \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ ist. Dazu verwenden wir einen bekannten Hilfssatz, der eine naheliegende Verallgemeinerung eines Satzes von Hopf in [13] ist.

Hilfssatz. $\mathfrak{K}^n$ sei ein n-dimensionaler einfachzusammenhängender Komplex ($n \geqq 3$) und es sei eine simpliziale Abbildung f einer n-Sphäre S^n in $\mathfrak{K}^n$ gegeben, derart dass das Bild des Grundzyklus der S^n in $\mathfrak{K}^n$ homolog 0 ist. Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung f' von S^n in $\mathfrak{K}^n$, so dass $f'(S^n)$ auf dem $(n - 1)$-dimensionalen Gerüst $\mathfrak{K}^{n-1}$ von $\mathfrak{K}^n$ liegt.

Auf Grund dieses Hilfssatzes für $n = 3$ lassen sich die Elemente von $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ durch Sphärenbilder repräsentieren, die in $\mathfrak{K}^2$ liegen; diese repräsentieren aber Elemente von ${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^2)$, nach der Injektion von $\mathfrak{K}^2$ in $\mathfrak{K}^3$ auch Elemente von ${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$, also ist $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) \subset {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$ und damit $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) = {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$, q.e.d..

§ 4. Folgerungen.

1. Aus ${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) = \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ folgt durch Injektion in $\mathfrak{K}$: ${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}) = i\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$. Wie Hopf in [3], S. 322 bewiesen hat, ist $i\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) = \Gamma^3(\mathfrak{K})$; daher gilt:

$${}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}) = \Gamma^3(\mathfrak{K}).$$

Wir behaupten ${}^*\mathfrak{M}^4 = \mathfrak{Z}^4$. Dies folgt sofort aus $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) = {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3)$, denn die Homotopieränder von $\mathfrak{Z}^4$ bilden die Gruppe $\mathfrak{R}^3 \cap \Gamma^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{R}^3 \cap {}^*\mathfrak{W}^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{R}^3_{*\mathfrak{M}}$.

2. Wir fassen jetzt die Resultate, die wir bis jetzt gefunden haben, zusammen und stellen sie geeignet dar.

Sei also $\mathfrak{K}$ ein einfachzusammenhängender Komplex. $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_r^2$ sei eine kanonische zweidimensionale Homologie- und

Homotopiebasis; die Ordnungen der X_i^2 seien m_i und wir setzen

$$m_{ij} = \begin{cases} (m_i, m_j) \text{ für } i \neq j \\ (2m_i, m_i^2) \text{ für } i = j. \end{cases}$$

Wir können diese Basis zu einer Kettenbasis ergänzen; in der zu dieser dualen Cokettenbasis seien $Y_1^2, Y_2^2, \ldots, Y_r^2$ die zu $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_r^2$ dualen Elemente. Ferner seien $Z^4, Z_2^4, \ldots, Z_s^4$ vierdimensionale Zyklen, welche eine Basis von $\mathfrak{Z}^4/\mathfrak{S}^4$, oder, was dasselbe ist, von $\mathfrak{H}^4/\overline{\mathfrak{S}}^4$ repräsentieren.

Satz 1. Jedes Element $\alpha \in \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ lässt sich folgendermassen eindeutig darstellen:

$$\alpha = \sum_{i=1}^r a_{ii}\eta(X_1^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^r a_{ij}(X_i^2 \circ X_j^2),$$

wobei $a_{ij} \in \mathfrak{G}_{m_{ij}}$.

Satz 2. Jeder vierdimensionale Zyklus Z^4 von $\mathfrak{K}$ ist entweder Bild einer vierdimensionalen Sphäre oder Bild einer topologischen Summe von komplexen projektiven Ebenen und Produkten von je zwei zweidimensionalen Sphären.

Satz 3. Die Homotopieränder der Zyklen $Z_1^4, Z_2^4, \ldots, Z_s^4$ sind durch die Homologiestruktur von $\mathfrak{K}$ bestimmt:

$$\mathring{Z}_k^4 = \sum_{\substack{i\\ m_i=0 \text{ und}\\ m_i \text{ ungerade}}} (Z_k^4(Y_i^2 \cup Y_i^2))\eta(X_i^2) + \sum_{\substack{i\\ m_i \text{ gerade} \neq 0}} (Z_k^4(Y_i^2 \uplus Y_i^2))\,\eta(X_i^2)$$
$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^r (Z_k^4(Y_i^2 \cup Y_j^2))\,(X_i^2 \circ X_j^2),$$

$k = 1, 2, \ldots, s$. Diese Homotopieränder bilden eine Basis von $\mathfrak{R}^3 \cap \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$; damit ist auch die Struktur von $\Gamma^3(\mathfrak{K}) \cong \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)/\mathfrak{R}^3 \cap \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ bestimmt.

Bemerkung. Bezeichnet $\overline{\mathfrak{A}}^4$ die Untergruppe von $\mathfrak{H}^4$, deren Elemente alle Cupprodukte und Pontrjaginschen Quadrate annullieren, so folgt aus Satz 1 und Satz 3, dass

$$\overline{\mathfrak{A}}^4 = \overline{\mathfrak{S}}^4.$$

Wir können also die Elemente $Z_1^4, Z_2^4, \ldots, Z_s^4$ auch als Repräsentanten einer Basis von $\mathfrak{H}^4/\overline{\mathfrak{A}}^4$ ansehen.

§ 5. Die Bestimmung von $\Pi^3(\mathfrak{K})$ aus der Homologiestruktur von $\mathfrak{K}$.

1. Wir bestimmen zunächst $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)$. Die Gruppe $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) \subset \Pi^3(\mathfrak{K}^3)$ ist schon bekannt. Es ist $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)/\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) \cong \overline{\mathfrak{S}}^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{S}^3(\mathfrak{K}^3)$. Nach Kap. I, §3, 1. gilt $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)/\overline{\mathfrak{S}}^3(\mathfrak{K}^3) \cong \Gamma^2(\mathfrak{K}^2) \cap \mathfrak{R}^2$; nun ist $\Gamma^2(\mathfrak{K}^2) = 0$, da aus $\Pi^1(\mathfrak{K}) = 0$ $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{K}^2) \cong \Pi^2(\mathfrak{K}^2)$ folgt, also $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{S}^3(\mathfrak{K}^3)$. Damit gilt $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)/\Gamma^3(\mathfrak{K}^3) \cong \mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$. Die Gruppe $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$

ist eine freie Gruppe, daraus folgt leicht

$$\Pi^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{F} + \Gamma^3(\mathfrak{K}^3), \text{ wobei } \mathfrak{F} \cong \mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$$

und wobei die Summe als direkte Summe su verstehen ist.

2. Aus **1.** folgt, dass $\Pi^3(\mathfrak{K})/\Gamma^3(\mathfrak{K}) \cong \mathfrak{H}^3(\mathfrak{K})$. Mit Hilfe einer kanonischen Basis von $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K})$ können wir eine Basis $X_1^3, X_2^3, \ldots, X_t^3$ von $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$ so wählen, dass der Kern der Injektion von $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$ in $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K})$ eine Basis $n_iX_i^3$, $i = 1, 2, \ldots, t$, besitzt, wobei n_i ganz, $\geqq 0$ und $n_i \equiv 0 \bmod n_{i+1}$, für $i = 1, 2, \ldots, t-1$. In $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)$ wählen wir feste Urbilder $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ der Elemente $X_1^3, X_2^3, \ldots, X_t^3$. Die ξ_i bilden eine Basis von $\mathfrak{F}$. Wir suchen eine Basis von $\mathfrak{N}^3$. In Satz 3 wurde eine Basis von $\mathfrak{N}^3 \cup \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ gegeben; wir haben sie noch zu einer Basis von $\mathfrak{N}^3$ zu ergänzen. Sei $\varrho \in \mathfrak{N}^3$, $h\varrho$ liegt in der Untergruppe von $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3)$, welche von den Elementen $n_iX_i^3$ erzeugt wird. Daraus sehen wir, dass die Elemente $n_i\xi_i + \zeta_i$, für diejenigen i für welche $n_i \neq 0$ ist, zusammen mit der Basis von $\mathfrak{N}^3 \cap \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ eine Basis von $\mathfrak{N}^3$ bilden, wobei die ζ_i gewisse Elemente von $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ sind. Wie finden wir diese ζ_i? Wir verfahren entsprechend Kap. I, §6. $n_k\xi_k + \zeta_k$ ist der Homotopierand einer Kette C_k^4, welche den Rand $n_kX_k^3$ hat. Indem wir eine geeignete gelochte Standardmannigfaltigkeit auf C_k^4 abbilden, können wir zeigen, dass

$$\zeta_k = \sum\nolimits_{\substack{i \\ m_i=0 \text{ und} \\ m_i \text{ ungerade}}} (C_k^4(Y_i^2 \cup Y_i^2))\eta(X_i^2) + \sum\nolimits_{\substack{i \\ m_i \text{ gerade} \neq 0}} (C_k^4(Y_i^2 \uplus Y_i^2))\eta(X_i^2)$$
$$+ \sum\nolimits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} (C_k^4(Y_i^2 \cup Y_j^2)) \cdot (X_j^2 \circ X_i^2).$$

Durch Abänderung von ξ_k, dieses ist als Urbild von X_k^3 nur mod $\Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ bestimmt, kann man die Koeffizienten von ζ_k noch mod n_k reduzieren. Daraus folgt nun zusammengefasst:

Satz 4. Die Gruppe $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)$ lässt sich darstellen als direkte Summe

$$\Pi^3(\mathfrak{K}^3) = \mathfrak{F} + \Gamma^3(\mathfrak{K}^3), \text{ wobei } \mathfrak{F} \cong \mathfrak{H}^3(\mathfrak{K}^3).$$

In dieser Gruppe ist eine Untergruppe $\mathfrak{N}^3$ ausgezeichnet, indem $\Pi^3(\mathfrak{K}) \cong \Pi^3(\mathfrak{K}^3)/\mathfrak{N}^3$ ist. Eine Basis von $\mathfrak{N}^3$ kann folgendermassen gefunden werden: Sind $C_1^4, C_2^4, \ldots, C_q^4$ diejenigen Elemente einer vierdimensionalen kanonischen Kettenbasis von $\mathfrak{K}$, deren Ränder $\neq 0$ sind, und ist $\dot{C}_k^4 = n_kX_k^3$, mit $n_k \equiv 0 \bmod n_{k+1}$, für $k = 1, 2, \ldots, q-1$, so gibt es Urbilder $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ in $\Pi^3(\mathfrak{K}^3)$ der Elemente $X_1^3, X_2^3, \ldots, X_q^3$, welche einer Basis von $\mathfrak{F}$ angehören, so dass

$$\mathring{C}_k^4 = n_k\xi_k + \sum\nolimits_{\substack{i \\ m_i=0 \text{ und} \\ m_i \text{ ungerade}}} \overline{(C_k^4(Y_i^2 \cup Y_i^2))}\eta(X_i^2)$$
$$+ \sum\nolimits_{\substack{i \\ m_i \text{ gerade} \neq 0}} \overline{(C_k^4(Y_i^2 \uplus Y_i^2))}\eta(X_i^2) + \sum\nolimits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} \overline{(C_k^4(Y_i^2 \cup Y_j^2))}\,(X_i^2 \circ X_j^2) \tag{1}$$

wobei die Querstriche über den Koeffizienten bedeuten, dass diese Koeffizienten mod (m_{ij}, n_k) zu reduzieren sind. Diese Homotopieränder bilden mit der Basis von $\mathfrak{R}^3 \cap \Gamma^3(\mathfrak{K}^3)$ von Satz 3 zusammen eine irreduzible Basis von $\mathfrak{R}^3$.

3. Die Zahlen n_k in Satz 4 seien > 1 für $k \leqq p$, $= 1$ für $k > p$; $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sind die dreidimensionalen Torsionskoeffizienten. Nehmen wir an, dass die Gruppen $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$ für $i = 0, 1, \ldots, p$ bekannt seien ($n_0 = 0$, $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$) samt den natürlichen Homomorphismen h_i von $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_{i-1}})$ in $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Wir wählen in jeder der Gruppen $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$ Repräsentanten einer Basis von $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})/h_i\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_{i-1}})$ für $i = 1, 2, \ldots, p$; so erhalten wir insgesamt p Elemente $*C_i^4$, $*C_i^4 \in \mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$. Nehmen wir für die Ketten C_i^4 des Satzes 4 Repräsentanten der $*C_i^4$ für $i = 1, 2, \ldots, p$ so dürfen wir in den Summen auf der rechten Seite von (1) die Elemente $*C_i^4$ statt der Ketten C_1^4 einsetzen. Für $i > p$ fallen die Summen auf der rechten Seite von (1) a priori weg.

Sind die Gruppen $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{K})$, $\mathfrak{H}^3(\mathfrak{K})$ und $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$ ($n_0 = 0$, $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ die dreidimensionalen Torsionskoeffizienten mit $n_i \equiv 0 \bmod n_{i+1}$) bekannt samt den natürlichen Homomorphismen h_i von $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_{i-1}})$ in $\mathfrak{H}^4(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}_{n_i})$ (für $i = 1, 2, \ldots, p$) und kennt man die Cohomologieringe von $\mathfrak{K}$ (inklusive Pontrjaginsches Quadrat) bezüglich der Koeffizientenbereiche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_m$ (m durchlaufe alle 2- und 3-dimensionalen Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{K}$ samt deren Teilern), so sagen wir die *Homologiestruktur von* $\mathfrak{K}$ „*im weiteren Sinne*" sei bekannt.

Mit dieser Definition können wir nun abschliessend sagen:

Satz 5. Die Struktur der Gruppe $\Pi^3(\mathfrak{K})$ ist bestimmt durch die Homologiestruktur von $\mathfrak{K}$ „im weiteren Sinne".

§ 6. Vierdimensionale geschlossene orientierbare einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeiten.

Wir spezialisieren uns in diesem Paragraphen auf einfachzusammenhängende geschlossene orientierbare vierdimensionale Mannigfaltigkeiten. Sei M^4 eine solche und seien p_k ihre Bettischen Zahlen, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Aus den Voraussetzungen folgt mit Hilfe des Poincaréschen Dualitätssatzes, dass $p_0 = p_4 = 1$, $p_1 = p_3 = 0$ und dass M^4 keine Torsion besitzt.

Satz 6. Sei M^4 eine vierdimensionale einfachzusammenhängende geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit und sei $p_2 \neq 0$ ihre zweite Bettische Zahl. Die Gruppe $\Gamma^3((M^4)^3)$ ist die freie Gruppe von $\frac{p_2(p_2+1)}{2}$ Erzeugenden. Die Gruppe $\Pi^3(M^4)$ ist die freie

Gruppe von $\frac{p_2(p_2+1)}{2} - 1$ Erzeugenden. Der Cohomologiering von M^4 ist isomorph einem Unterring des Cohomologieringes einer Standardmannigfaltigkeit.

Beweis. Aus Satz 1 folgt sofort die erste Behauptung des Satzes. Nach Satz 2 lässt sich eine Standardmannigfaltigkeit St^4 mit dem Grade $+1$ auf M^4 abbilden (M^4 sei fest orientiert). Nach Hopf [14], S. 81, Satz IIb ist dann der Cohomologiering von M^4 isomorph einem Unterring des Cohomologieringes der St^4, womit die dritte Behauptung bewiesen ist. Es bleibt noch die zweite zu beweisen.

M^4 kann nicht sphärisch sein, denn daraus würde nach Hopf [14], S. 81, Satz IIIa, $p_2 = 0$ folgen. Da $\mathfrak{H}^3 = 0$, ist $\Pi^3(M^4) = \Gamma^3(M^4)$. Da $p_4 = 1$ und da M^4 nicht sphärisch ist, haben wir nach Satz 3 zu $\Gamma^3((M^4)^3)$ genau eine erzeugende Relation hinzuzufügen, um $\Gamma^3(M^4)$ zu erhalten, nämlich den nullgesetzten Homotopierand von M^4. Sei

$$\sum_{i=1}^{p_2} a_{ii}\,\eta(X_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{p_2} a_{ij}(X_i^2 \circ X_j^2) = 0,$$
$$\text{mit } a_{ij} = M^4(Y_i^2 \cup Y_j^2), \text{ für } i \leqq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, p_2,$$

diese Relation, wobei wir für die Basen die Bezeichnungen von § 4, 2. verwenden ($r = p_2$, $m_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p_2$). Es gibt nun eine Basis von $\Gamma^3(M^4)$, deren Elemente, abgesehen vom letzten, die Ordnung 0 besitzen; das letzte Element hat den G.G.T. der Zahlen a_{ij}, $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, p_2$, als Ordnung. Die Schnittmatrix (a_{ij}) hat die Determinante ± 1, da M^4 eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist, daher ist der G.G.T. der Zahlen a_{ij} gleich 1. Das letzte Element der besagten Basis von $\Gamma^3(M^4)$ können wir also weglassen, d.h. $\Gamma^3(M^4) = \Pi^3(M^4)$ ist die freie Gruppe von $\frac{p_2(p_2+1)}{2} - 1$ Erzeugenden. Damit ist alles bewiesen.

Für $p_2 = 0$ gilt natürlich $\Gamma^3((M^4)^3) \cong \Pi^3(M^4) = 0$.

Kapitel III.

(Anhang zum Kapitel I)

Die Voraussetzungen seien hier dieselben wie bei Kapitel I.

§ 1. Eine Verallgemeinerung der Methode von Kapitel I.

1. Wir nehmen an, dass sich die r topologischen Produkte von Einheitswürfeln

$$P_i = E^{n_1} \times E^{n_2} \times \ldots \times E^{n_{i-1}} \times E^{n_{i+1}} \times \ldots \times E^{n_r}, \quad n_i \geqq 1,$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$ $(r \geqq 3)$, durch stetige Abbildungen f_i in den Komplex $\mathfrak{K}$ abbilden lassen, wobei die f_i folgenden Bedingungen genügen:

$$f_i(\ldots, x_k, \ldots) = f_i(\ldots, o_k, \ldots), \text{ falls } x_k \in \dot{E}^{n_k},\ k \neq i,$$

$$f_i(o_1, \ldots, o_r) = p,$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r) = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r),$$
$$\text{falls } x_k \in \dot{E}^{n_k} \text{ und } x_i \in \dot{E}^{n_i} \text{ für } k \neq i,$$

wobei wir unter x_i einen beliebigen und unter o_i den Nullpunkt des Einheitswürfels E^{n_i} verstehen.

Unter diesen Annahmen können wir ein Element α der Gruppe $\Pi^{n_1+n_2+\cdots+n_r-1}(\mathfrak{K})$ wie folgt konstruieren: Bei geeigneter Orientierung der Produkte gilt

$$(E^{n_1} \times E^{n_2} \times \ldots \times E^{n_r})^{\cdot} =$$
$$\Sigma_{i=1}^{r} (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{i-1}} E^{n_1} \times \ldots \times E^{n_{i-1}} \times \dot{E}^{n_i} \times E^{n_{i+1}} \times \ldots \times E^{n_r};$$

wir definieren eine Abbildung f auf $(E^{n_1} \times E^{n_2} \times \ldots \times E^{n_r})^{\cdot}$ indem wir setzen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r) \text{ für } x_i \in \dot{E}^{n_i}.$$

Gemäss den Annahmen über die f_i ist die Abbildung f stetig und repräsentiert ein Element $\alpha \in \Pi^{n_1+n_2+\cdots+n_r-1}(\mathfrak{K})$. Die Abhängigkeit dieses Elementes α von den Annahmen soll hier nicht weiter untersucht werden.

2. Wir setzen jetzt voraus, dass das in 1. konstruierte Element $\alpha = 0$ ist. Daraus folgt, dass wir die Abbildung f auf $E^{n_1} \times E^{n_2} \times \ldots \times E^{n_r}$ erweitern können. Aus den Voraussetzungen über die f_i folgt, dass wir die Randpunkte der E^{n_i} identifizieren dürfen, d.h. wir haben eine Abbildung f des topologischen Produktes

$$S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r}$$

in den Komplex vor uns. Der Punkt auf S^{n_k}, der durch Identifikation der Randpunkte von E^{n_k} entsteht, heisse o_k. Sei

$$f(o_1 \times o_2 \times \ldots \times o_{k-1} \times S^{n_k} \times o_{k+1} \ldots \times o_r) = X^{n_k}.$$

X^{n_k} ist ein sphärischer Zyklus von $\mathfrak{K}$, dessen Homologieklasse wir auch mit X^{n_k} bezeichnen. In den Homologiegruppen von $\mathfrak{K}$ führen wir Basen ein, so dass sich die Elemente X^{n_k} in der Form

$$X^{n_k} = c_k Y^{n_k}, \quad c_k \text{ ganz}, > 0,$$

darstellen lassen, wobei die Y^{n_k} Basiselemente sind. Wie in Kap. I,

§ 5, 3. führen wir zu den Y^{n_k} duale Elemente Y'^{n_k} ein. Sei h'_f der Homomorphismus der Cohomologiegruppen von $\mathfrak{K}$ in diejenigen von $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r}$. Das skalare Produkt

$$f(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r})(Y'^{n_1} \cup Y'^{n_2} \cup \ldots \cup Y'^{n_r}) =$$
$$(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r})(h'_f Y'^{n_1} \cup h'_f Y'^{n_2} \cup \ldots \cup h'_f Y'^{n_r})$$

lässt sich in $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r}$ berechnen; wir müssen zu diesem Zweck die X^{n_k} und die Homologiegruppen, in welchen sie liegen, kennen. Ist dieses Skalarprodukt $\neq 0$, so ist $f(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_r})$ nicht homolog 0 in $\mathfrak{K}$ und daher ist α nicht trivialerweise gleich 0.

§ 2. Anwendung.

In diesem Paragraphen geben wir eine Anwendung der Methode von § 1.

Satz. Sei X ein n-dimensionaler sphärischer Zyklus, der nicht homolog 0 ist in $\mathfrak{K}$, *n gerade*, $\geqq 2$. Sei $X = cY$, c ganz, > 0, wobei Y ein Basiselement der Ordnung m ($m = 0$ oder $m > 1$, $c \not\equiv 0$ mod m) einer geeigneten Basis von $\mathfrak{H}^n$ ist.

Seien ferner die Homotopiegruppen

$$\Pi^{kn-1}(\mathfrak{K}) = 0, \text{ für } k = 2, 3, \ldots, r, \quad r \geqq 2.$$

Ist s die grösste ganze Zahl $\leqq r$, für welche

$$c^s s! \not\equiv 0 \bmod m$$

gilt, so sind die Homologiegruppen

$$\mathfrak{H}^{kn} \neq 0, \text{ für } k = 2, 3, \ldots, s.$$

Beweis. 1) Wir beweisen zunächst, dass es für jedes k, $k = 2, 3, \ldots, r$, eine Abbildung eines Produktes von k n-dimensionalen Sphären in $\mathfrak{K}$ gibt, wobei X das Bild jedes Faktors ist. Diesen Beweis führen wir durch vollständige Induktion.

$k = 2$. Sei $[X] = \alpha$, $\alpha \in \Pi^n$; nach Voraussetzung ist $\alpha \circ \alpha = 0$, daher lässt sich ein Produkt von 2 n-dimensionalen Sphären in $\mathfrak{K}$ so abbilden, dass X das Bild jedes Faktors ist.

Induktionsvoraussetzung: Das Produkt $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ von k n-dimensionalen Sphären lasse sich durch eine Abbildung f so in $\mathfrak{K}$ abbilden, dass X das Bild jedes Faktors ist und dass für $i \neq j$ $f(S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times o_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_k) = f(S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times o_j \times S_{j+1} \times \ldots \times S_k)$.

Behauptung: Dasselbe gilt für $k + 1$.

Beweis: Wir setzen $k + 1$ Abbildungen g_i an:

$$g_i(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \ldots \times E_{k+1}) = f(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k),$$

für $i = 1, 2, \ldots, k + 1$, wobei wir von den n-dimensionalen Einheitswürfeln E_j zu den Sphären S_l durch Randpunktidentifikation übergehen (die Randpunkte der E_j sollen in die ausgezeichneten Punkte o_l der Sphären übergehen). Auf Grund der Induktionsvoraussetzung sind dann die Annahmen, die wir zu Beginn von § 1 machten, für die g_i erfüllt; es lässt sich wie in § 1, 1. eine Abbildung g auf $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{k+1})^{\cdot}$ definieren, welche wir, da $\Pi^{(k+1)n-1} = 0$ ist, auf $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{k+1}$ erweitern können. Damit haben wir eine Abbildung g des Produktes $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{k+1}$, wobei X das Bild jedes Faktors ist und wobei für $i \neq j$

$$g(S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times o_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_{k+1}) = g(S_1 \times \ldots \times S_{j-1} \times o_j \times S_{j+1} \times \ldots \times S_{k+1})$$

gilt, da wir die g_i entsprechend angesetzt haben und nach Induktionsvoraussetzung.

2) Sei jetzt k fest und f die Abbildung des Produktes $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ in $\mathfrak{R}$. Wir wählen wieder ein zu Y duales Element Y'; Y' ist ein Cozyklus mod m. In $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ wählen wir ebenfalls zu den Faktoren duale Elemente $T_1, T_2, \ldots, T_k$; für diese gilt

$$T_i \cup T_i = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k = T,$$

wobei T der zum Grundzyklus des Produktes $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ duale Cozyklus ist. Y' und alle T_i haben gerade Dimension, daher ist das Cupprodukt kommutativ. Sei h'_f der Homomorphismus der Cohomologiegruppen von $\mathfrak{R}$ in diejenigen von $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$. Es ist

$$h'_f Y' = c(T_1 + T_2 + \ldots + T_k).$$

Daher gilt

$$f(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k) \cdot (Y' \cup Y' \cup \ldots \cup Y') =$$
$$(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k) \cdot (h'_f Y' \cup h'_f Y' \cup \ldots \cup h'_f Y') =$$
$$(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k) \cdot (c^k k! T) = c^k k!,$$

wobei bei den mehrfachen Cupprodukten k Faktoren zu setzen sind. Da Y' ein Cozyklus mod m ist, können wir schliessen, dass $f(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k)$ nicht homolog 0 ist in $\mathfrak{R}$, falls $c^k k! \not\equiv 0$ mod m ist, q.e.d..

Für ungerade Dimension von X würde der zweite Teil des Beweises versagen; ausserdem kann der Satz dann nicht uneingeschränkt gelten, wie das Beispiel in Kap. I, § 5, 9. zeigt.

Der Spezialfall dieses Satzes, in welchem X nicht divisionshomolog 0 ist in $\mathfrak{R}$, wurde bereits in der Einleitung formuliert. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Fall die Zyklen, welche sich durch Konstruktion in den Gruppen $\mathfrak{H}^{kn}$ ergeben, die Ordnung 0 besitzen, $k = 2, 3, \ldots, r$. Daher enthält die Gruppe $\mathfrak{H}^{kn}$ in diesem Fall eine unendlich zyklische Untergruppe, $k = 2, 3, \ldots, r$.

Korollar. Es gibt keinen endlichdimensionalen Komplex, der in den Dimensionen $kn - 1$ asphärisch ist, für $k = 2, 3, \ldots$ (n gerade, $\geqq 2$), und der einen n-dimensionalen sphärischen Zyklus besitzt, welcher nicht divisionshomolog 0 ist.

Wir wollen noch den Zusammenhang des bewiesenen Satzes mit der Theorie der Eilenberg-MacLaneschen Gruppen herstellen. Ein Satz von Eilenberg und MacLane [15] lautet:

Ist ein Komplex asphärisch in allen Dimensionen, ausser der Dimension n ($n > 1$), so gilt für seine Homologiegruppen:

$$\mathfrak{H}^k = 0, \text{ für } k < n, \quad \mathfrak{H}^n \cong \Pi^n, \quad \mathfrak{H}^k = \mathfrak{H}^k(\Pi^n), \text{ für } k > n.$$

Zur Bestimmung der Gruppen $\mathfrak{H}^k(\Pi^n)$ für $k > n$ folgt aus unserem Satze:

Ist n gerade, $\Pi^n \cong \mathfrak{G}$, so enthält die Gruppe $\mathfrak{H}^{kn}(\Pi^n)$ eine unendlich zyklische Untergruppe, für $k = 2, 3, \ldots$.

Ist n gerade, $\Pi^n \cong \mathfrak{G}_m$, so sind die Gruppen $\mathfrak{H}^{kn}(\Pi^n)$ nicht trivial, für alle k, für die $k! \not\equiv 0 \bmod m$ gilt.

Wir können daher auch sagen: Es gibt keinen endlichdimensionalen Komplex, dessen Homotopiegruppen $\Pi_r = 0$ sind für $r \neq n$, n gerade, > 0, und dessen $\Pi^n \neq 0$ und nicht endlich ist. Damit ist ein Beitrag zur Beantwortung einer von H. Hopf gestellten Frage geleistet ([16], S. 258, Problem 30); der Spezialfall $n = 2$ wurde bereits von H. Hopf a.a.O. ausgesprochen. Ob ein ähnlicher Satz für ungerades $n > 1$ gilt, ist, soviel wir wissen, nicht bekannt.

LITERATURVERZEICHNIS.

J. H. C. Whitehead

[1] On adding relations to homotopy groups, Annals of Math. 42 (1941).

H. Hopf

[2] Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helvet. 14 (1942).

H. Hopf

[3] Beiträge zur Homotopietheorie, Comment. Math. Helvet. 17 (1944).

J. H. C. Whitehead

[4] On simply connected, 4-dimensional polyhedra, Comment. Math. Helvet. 22 (1949).

L. PONTRJAGIN

[5] Classification of the mappings of an $(n + 1)$-dimensional sphere into a polyhedron K_n whose fundamental group and Betti groups of dimensions 2, 3, . . ., $n - 1$ are trivial, Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., Ser. Mat. 14 (1950).

G. HIRSCH

[6] Sur le troisième groupe d'homotopie des polyèdres simplement connexes, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949).

P. ALEXANDROFF und H. HOPF

[7] Topologie I (Berlin 1935)

S. EILENBERG

[8] On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fund. Math. 32 (1939).

N. E. STEENROD

[9] Products of cocycles and extensions of mappings, Annals of Math. 48 (1947).

J. P. SERRE

[10] Homologie singulière des espaces fibrés, III, C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951).

W. HUREWICZ

[11] Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam: I und II Bd. 38 (1935), III und IV Bd. 39 (1936).

H. HOPF

[12] Ueber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen 104 (1931).

H. HOPF

[13] Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen: I Bd. 100 (1928), II Bd. 102 (1930).

H. HOPF

[14] Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelle Journal 163 (1930).

S. EILENBERG und S. MACLANE

[15] Relations between homology and homotopy of spaces, Annals of Math. 46 (1945).

S. EILENBERG

[16] On the problems of topology, Annals of Math. 50 (1949).

Oblatum 4-4-54.