MAURICE FRÉCHET

La kanonaj formoj de la 2, 3, 4 - dimensiaj paraanalitikaj funkcioj

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 81-96

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__81_0>

La kanonaj formoj de la 2, 3, 4 - dimensiaj paraanalitikaj funkcioj

de

Maurice Fréchet.

Résumé: L'auteur rappelle d'abord les définitions et les propriétés des fonctions dérivables (et des fonctions paraanalytiques) à n dimensions relativement à une règle R_p de multiplication, telles qu'elles ont été résumées d'abord dans deux Notes [1] et démontrées ensuite dans deux mémoires plus étendus [4], [7].

Il montre ensuite pour $n = 2$, 3 et 4, que toutes ces fonctions peuvent être ramenées par des opérations simples (précisées plus loin) à des formes canoniques dont il donne les tableaux. Les derniers tableaux (pour $n = 4$), comportant 130 formules pour 5 fonctions canoniques, sont déjà assez touffus pour qu'il soit raisonnable d'attendre, pour examiner les valeurs de n supérieures à 4, que le besoin s'en fasse sentir à propos d'un problème particulier.

Le développement qui suit est rédigé dans la langue internationale Esperanto, comme les deux Mémoires [4] et [7].

Rememorigo de la difinoj.

Antaŭa rimarko: Pri la kialoj kiuj kondukis nin al la koncepto de funkcioj deriveblaj rilate regulon de multiplikado R_p (aŭ paraanalitikaj), ni sendas al la supre citita traktaĵo. Ni rememorigos sen komentarioj kelkajn difinojn.

Por faciligi la legadon de nia jam citita traktaĵo, ni prezentis ĝin sen prunto al la teorio de la hiperkompleksaj nombroj. Sed tie-ĉi por atingi la kanonajn formojn de niaj funkcioj, estos treege oportune al ni uzi la redukton de la hiperkompleksaj nombroj al iliaj kanonaj formoj. Ĉar ni uzos tiun redukton ni ĉesos do tie-ĉi utiligi la vektoran lingvon kaj ni uzos senpere la nocion de hiperkompleksa nombro. Sufiĉos por ni cetere supozi ke oni konas la fundamenton de tiu teorio, tia kia ĝi prezentiĝas ekzemple en traktaĵo de Elie Cartan [3].

Ni konsideros do du hiperkompleksajn n-dimensiajn nombrojn x kaj X:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$
$$X = X_1 e_1 + \dots + X_n e_n$$

obeantajn la saman regulon R de multiplikado, difinatan per la rilatoj:

$$e_k \,.\, e_r = \sum_{h=1}^{n} u_{krh} e_h$$

kaj ni studos la funkciojn:

$$X = F(x) = \sum_{h=1}^{n} F_h(x_1, \dots, x_n) e_h.$$

Kvankam estas̑ eble studi (kiel ni faris por $n = 2$, en nia antaŭlasta traktaĵo [4]) la ĝeneralan kazon kiam la regulo R estas ia ajn, ni nin limigos poste, kiel en nia lasta traktaĵo [2], al kazo kiu kondukas al pli multaj interesaj rezultatoj: kiam la regulo R obeas la sekvantajn tri kondiĉojn:

la multiplikado laŭ R estas *komuta* $(x \,.\, y = y \,.\, x)$
asocia $((x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z))$
ekzistas̑ unu ĉefa unuo I rilate R $(I \,.\, x = x \,.\, I = x)$

Oni distingos per *noto* R_p la regulojn R kiuj verigas tiujn tri kondiĉojn.

Derivado: Ni devos distingi poste: funkcion diferencialeblan [1]) kaj funkcion deriveblan (rilate regulon R_p).

Funkcio F estas *derivebla* (rilate regulon R_p) por $x = x^0$ $(x^0 \equiv x_1^0 e_1 + \dots x_n^0 e_n)$ se:

1^0 ĝi estas difinata en la ĉirkaŭaĵo de x^0 kaj diferencialebla [1]) por $x = x^0$.

2^0 $\dfrac{dF}{dx}$ estas, por $x = x^0$, sendependa de dx, t.e. ekzistas nombro $F'_0 = \Sigma F'_h e_h$ sendependa de dx, tia ke

$$dF = F'_0 \,.\, dx \;\; (= dx \,.\, F'_0)$$

(F'_0 nomiĝas la *derivaĵo* de F por $x = x^0$.)

Funkcio $F(x)$ estas *paraanalitika* (rilate la regulon R_p), por $x = x^0$ se, en la ĉirkaŭaĵo de x^0: 1e. ĝi havas sinsekvajn diferencialojn [1]) dF, d^2F, ... 2e. ĝi estas derivebla rilate R_p.

Rememorigo de kelkaj ecoj.

Ni rememorigos ĉi-tie nur la ecojn kiuj estos utilaj por ni poste, de la deriveblaj aŭ paraanalitikaj funkcioj, kaj sendas al nia lasta (supre citita) traktaĵo por la aliaj ecoj.

---

[1]) Temas ĉi-tie pri diferencialebleco en la senco de Stolz-W. H. Young (por kiu, ni rememorigu ĝin, ne sufiĉas la ekzisto de la parcialaj derivaĵoj).

Ni ĝeneraligu du gravajn ecojn de la klasikaj analitikaj funkcioj. Oni povas montri ke: la komponantoj $F_h(x_1, \ldots, x_n)$ de derivebla funkcio $F(x)$ (rilate R_p) por $x = x^0$, verigas por $x = x^0$ iun sistemon S de $n(n-1)$ ekvacioj kun parcialaj derivaĵoj de la unua ordo rilataj al n nekonataj funkcioj. Se plie $F(x)$ estas derivebla (rilate R_p) en la ĉirkaŭaĵo de x^0 kaj havas por $x = x^0$ duarangan diferencialon, la F_h verigas por $x = x^0$ iun sistemon σ de $n(n-1)/2$ ekvacioj kun parcialaj derivaĵoj de la dua ordo de unu nekonata funkcio.

En la kazo kiam e_1 estas la ĉefa unuo rilata al R_p, la sistemoj S kaj σ povas esti skribataj senpere kiel ĉi-sube, se oni konas la u_{krh}:

$$(1)\quad S\ \left\{ \frac{\partial F_h}{\partial x_r} = \sum_{k=1}^{n} u_{krh} \frac{\partial F_h}{\partial x_1} \quad (r = 2, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, n) \right.$$

$$(2)\quad \sigma\ \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_{k=1}^{n} u_{rsk} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_k} \quad (r = 2, \ldots, n;\ s = 2, \ldots n) \right.$$

Kompreneble, se $F(x)$ estas paraanalitika (rilate R_p) por $x = x^0$, tio estas sufiĉa por ke ĝiaj komponantoj F_h verigu la sistemojn S kaj σ en la ĉirkaŭaĵo de x^0.

Inter la plej simplaj paraanalitikaj funkcioj oni povas citi:

la polinomoj: $a_0 + a_1 . x + \ldots + a_q . x^q$;

la sumoj de la entjeraj konverĝantaj serioj

$$(3)\quad \begin{cases} e^x = I + x + x^2/2! + \ldots + x^q/q! + \ldots \\ \cos x = I - x^2/2! + \ldots + (-1)^q x^{2q}/(2q)! + \ldots \\ \sin x = x - x^3/3! + \ldots + (-1)^q x^{2q+1}/(2q+1)! + \ldots \end{cases}$$

kiuj estas paraanalitikaj por ĉiu „valoro" de la hiperkompleksa nombro x. Se oni notas per $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$, tiujn tri funkciojn, oni havas:

$$(4)\begin{cases} d\varphi(x) = \varphi(x) . dx,\ d\psi(x) = -\theta(x) . dx,\ d\theta(x) = \psi(x) . dx \\ \text{kun } \varphi(0) = I = \psi(0),\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

Same kiel ni notos pli fore por ĉiu kanona regulo R_p la formojn ricevatajn de la sistemoj S kaj σ, same ni asocios kun tiuj formoj la respondajn formojn de e^x, $\cos x$, $\sin x$. La leganto povos facile en ĉiu kazo dedukti la tabelon Φ de la komponantoj de F el la sistemo S kaj kalkuli e^x, $\cos x$, $\sin x$, ne el la difinoformuloj (3) sed prefere el la diferencialaj ekvacioj (4).

Reduktéblaj formoj.

Oni povas nomi *reduktebla* regulon de multiplikado R tian ke oni povu dividi la aron de la bazunuoj e_k en du grupojn

$$(e_1, \ldots, e_r);\ (e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

tiajn ke $e_k \cdot e_s$ estu nula se e_k, e_s, ne estas en la sama grupo, kaj ke se e_k, e_s, estas en la sama grupo, $e_k \cdot e_s$ esprimiĝu kiel lineara funkcio de la unuoj de tiu grupo.

Se R_p estas reduktebla kaj se: $F(x) = \sum\limits_h F_h e_h$ estas derivebla rilate R_p, oni havas:

$$\begin{aligned}\sum_h dF_h e_h &= \left(\sum_{k=1}^{n} F'_k e_k\right)\left(\sum_{s=1}^{n} dx_s e_s\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{r} F'_k e_k\right)\left(\sum_{s=1}^{r} dx_s e_s\right) + \left(\sum_{k=r+1}^{n} F'_k e_k\right)\left(\sum_{s=r+1}^{n} dx_s e_s\right)\end{aligned}$$

kaj eĉ:

$$\sum_{h=1}^{r} dF_h e_h = \left(\sum_{k=1}^{r} F'_k e_k\right)\left(\sum_{s=1}^{r} dx_s e_s\right)$$

$$\sum_{h=r+1}^{n} dF_h e_h = \left(\sum_{k=r+1}^{n} F'_k e_k\right)\left(\sum_{s=r+1}^{n} dx_s e_s\right)$$

Alivorte: *se la regulo R_p estas reduktebla, ĉiu funkcio $F(x)$ derivebla (rilate R_p) estas la sumo de du funkcioj kun r kaj $n - r$ dimensioj deriveblaj rilate R_p (aŭ rilate du regulojn R'_p, R''_p kiuj kune egalas R_p).*

Oni povos diri ke $F(x)$ mem estas reduktebla.

De tiam *ĉiu funkcio derivebla kaj reduktebla rilate regulon R_p estas malkomponebla en sumon de du aŭ pli ol du funkcioj deriveblaj malreduktеblaj rilate R_p*. Rezultas el tio ke, *por trovi ĉiujn n-dimensiajn (pleje) funkciojn deriveblajn (rilate R_p), sufiĉas trovi inter tiuj funkcioj la malreduktеblajn.* Tion-ĉi ni faros por $n = 2, 3, 4$. Ĉio ĵus dirita pri la reduktеblaj deriveblaj funkcioj aplikiĝas al la *reduktеblaj paraanalitikaj funkcioj.*

Ŝanĝado de la unuoj. Se oni faras sur la bazunuoj $e_1, \ldots, e_n$ transformon $\mathfrak{T}$, (t.e. lineara homogena kaj unu-unusenca transformo)

$$f_h = \sum_{j=1}^{n} d_{jh} e_j \tag{5}$$

$$\left(\text{sekve } e_j = \sum_{h=1}^{n} \beta_{hj} f_h\right),$$

oni havas egalaĵojn kiel:

$$\sum_h dF_h e_h = \sum_j dF_h\left(\sum_j \beta_{jh} f_j\right) = \sum_j d\left[\sum_h \beta_{jh} F_h\right] f_j$$

$$\sum_k F'_k e_k = \sum_j \left(\sum_k \beta_{jk} F'_k\right) f_j$$

$$\sum_r dx_r e_r = \sum_j \left[d\left(\sum_r \beta_{jr} x_r\right)\right] f_j.$$

De tiam se oni metas

$$y_j = \sum_r \beta_{jr} x_r$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} G_j(y_1, \ldots, y_n) &= \sum_h \beta_{jh} F_h(x_1, \ldots, x_n) \\ G'_j(y_1, \ldots, y_n) &= \sum_k \beta_{jk} F'_k(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

oni vidas ke, se $F = \Sigma F_h e_h$ estas derivable (paraanalitika) rilate R_p por $x = x^0$, la funkcio

$$G(y) = G_j(y_1, \ldots, y_n) f_j = F(x)$$

ankaŭ estas derivebla (paraanalitika) por $y = y^0 = \sum_r \beta_{jr} x_r^0$ rilate la regulon ϱ_p ricevatan kiam oni faras en la regulo R_p la transformon (5) sur la e_j.

Kanonaj reguloj. Nu oni trovas sur la paĝoj 400, 402, 403 de la jam citita traktaĵo de Elie Cartan liston por $n = 2, 3, 4$ de la kanonaj formoj de la reguloj R asociaj, malredukteblaj kaj havantaj unu ĉefan unuon [1]). *Se oni forlasas la nekomutajn regulojn* de tiu listo, aŭ la redukteblajn, oni ricevas la liston de la konservotaj reguloj kiuj estas *la tuto de la kanonaj kaj malredukteblaj reguloj* R_p, por $n = 2, 3, 4$.

Estos senutile ripeti tie-ĉi tiujn el la ecoj de la deriveblaj aŭ paraanalitikaj funkcioj, demonstritaj en nia lasta traktaĵo, kies formoj estas sendependaj de la formoj de R_p. Kontraŭe la sistemoj S kaj σ, la esprimoj de e^x, $\sin x$, $\cos x$, ricevas por ĉiu regulo R_p malimplicitan formon kiun ni montros tie-ĉi.

Tiuj kanonaj formoj estas interesaj unue ĉar ili donas *simplajn ekzemplojn* de deriveblaj aŭ paraanalitikaj funkcioj. Sed ankaŭ ĉar ili kondukas al formado de ĉiuj deriveblaj aŭ paraanalitikaj funkcioj, dank'al aplikado de la sekvanta teoremo, senpera konsekvenco de la *p.* 84.

Teoremo. I. Por $n = 2, 3$, aŭ 4, ĉiu funkcio derivebla en la ĉirkaŭaĵo de x^0 rilate unu aŭ alian regulon de multiplikado R_p povas deduktiĝi el la sekvantaj tabeloj Φ pere de unu aŭ pluraj el la sekvantaj operacioj:

1°. Apliki al la e_k transformon $\mathfrak{x}$ (t.e. lineara, homogena kaj unu-unu-senca) kaj transformi konsekvence variantojn kaj funkciojn.

2°. Kiam R_p estas reduktebla (R_p malkomponebla tiam en re-

1) Kanonaj, t.e. havantaj formojn kiujn ciuj reguloj povas preni post reduktado aŭ unuoŝanĝo.

gulojn R'_p, R''_p, ... malreduktebIajn), adicii funkciojn malreduktebIajn rilate respektive R'_p, R''_p, ... (tiajn funkciojn oni jam ricevis per la operacio 1^0).

II. La sama teoremo aplikiĝas al la paraanalitikaj funkcioj se nur la operacioj 1^0, 2^0 koncernas funkciojn ankaŭ paraanalitikajn. Por tio sufiĉas, kiel ni vidos p. 87, ke la funkcioj A, B, C, kiuj eventuale troviĝas en la tabeloj Φ estu *senfine deriveblaj* proksime de x^0.

Atentigo. En la tabeloj ĉi poste de la utiligataj R_p, oni supozis ke e_1 estas la ĉefa unuo. En ĉiu kvadrata tabelo montranta R_p, la esprimo de $e_k \,.\, e_r$ troviĝas ĉe la renkonto de la linio k kaj de la kolono r. Oni juĝis utile noti por ĉiu kanona formo la esprimon de la jakobiano de la komponantoj F_h de $F(x)$, t.e.

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Sinsekvantaj valoroj de n

$$\boxed{n = 1}$$

La kazo $n = 1$ prezentas per si-mem neniun interesaĵon. Estas tamen necese mencii ĝin ĉar *ĝi partoprenas en la formado de la reduktebIaj funkcioj.* La regulo R_p reduktiĝas en tiu kazo al:

$$e_1^2 = e_1. \tag{7}$$

Φ $\left\{\right.$ Oni povas skribi $x = x_1 e_1$

$F(x) = F_1(x_1) \,.\, e_1$ kaj devas ekzisti nombro sendependa de dx_1

$F' = F'_1 e_1$, tia ke

$F'_1(x_1) dx_1 e_1 = dF(x) = F'_1 e_1 \,.\, dx_1 e_1 = F'_1 dx_1 e_1$, sekve $F'_1 =$ $= F'_1(x_2)$. Por ke $F(x)$ estu derivebla rilate la regulon (7) por $x = x^0$, estas do necese kaj sufiĉe ke $F_1(x_1)$ estu derivebla en la ordinara senco por $x_1 = x_1^0$.

Aplikado. — 1^0. Ni jam montris en nia Noto de la 11a de Majo 1953 [1] ke por iu ajn nombro n_1 da dimensioj la regulo difinata per:

$$e_k \,.\, e_r = \begin{cases} e_k & \text{se } k = r \\ 0 & \text{se } k \neq r \end{cases} \tag{8}$$

estigas la funkcion:

$$F(x) = f_1(x_1) e_1 + \ldots + f_n(x_n) e_n \tag{9}$$

kiu estas derivebla en la ĉirkaŭaĵo de $x = x^0 = \Sigma x_k^0 e_k$ rilate tiun regulon se ĉiu funkcio $f_k(x_k)$ estas derivebla proksime de

$x_k = x_k^0$. Estas klare ke la regulo (8) estas reduktebla kaj ke la funkcio (9) estas reduktebla kaj povas skribiĝi sub la formo: $F(x) = F_1(x_1) + \ldots + F_n(x_n)$ kie ĉiu $F_k(x_k)$ estas malreduktebla funkcio $f_k(x_k)e_k$, derivebla rilate la malredukteblan regulon difinatan per $e_k^2 = e_k$.

Se $F(x)$ estas paraanalitika por $x = x^0$, ankaŭ la $F_k(x_k)$ estas paraanalitikaj kaj $f_k(x_k)$ devas esti senfine derivebla en la ĉirkaŭaĵo de x_k. Kaj reciproke.

— 2⁰. La kazo $n = 1$, estas utila ankaŭ por trovi la redukteblajn deriveblajn funkciojn kiuj ne havas la formon (9) kaj *kiujn oni devus almeti al la sekvantaj tabeloj* de malredukteblaj funkcioj por ricevi ĉiujn kanonajn funkciojn. Ni lasos tiun zorgon al la leganto por mallongigi.

$$\boxed{n > 1}$$

La kanonaj reguloj de multiplikado notataj pli poste por $n = 2, 3, 4$, estas ĉiuj reguloj R_p. Ili estas do interalie komutaj. Ni devis forlasi plurajn regulojn nekomutajn notatajn en la supre cititaj tabeloj de Elie Cartan. La ecoj kiujn ni pruvis [1] por la reguloj R_p, ne estus ĉiuj veraj por la tiel forlasataj reguloj. Sed la leganto povus certiĝi per senpera studado ke iuj ecoj daŭras, kiel oni tion vidas ekzemple por $n = 2$ en nia antaŭlasta traktaĵo [4].

Por la *konservataj* reguloj, t.e. la *malredukteblaj* reguloj R_p, al kiuj oni povas konduki ĉiun regulon R_p, ĉar e_1 estas tie ĉiam ĉefa unuo, oni povas apliki la formulojn (1) kaj (2). Kiam $F(x)$ estas derivebla rilate R_p por $x = x^0$, la komponantoj F_k de $F(x)$ verigas laŭ (1) sistemon S kiun ni notos en la tabelon kiu respondas tiun regulon R_p. Kiam $F(x)$ estas derivebla rilate R_p apud x^0, ni lasos la leganton dedukti el S, kio ĉiam facila estas, la tabelon Φ de la esprimoj de la F_k kiel funkcioj de la x_r, same kiel la esprimon de J.

Kiam fine $F(x)$ ne nur estas derivebla apud x^0, sed ankaŭ havas por $x = x^0$ duarangan diferencialon, la formulo (2) ebligas skribi senpere por ĉiu kanona regulo R_p la formon ricevatan de la responda sistemo σ por $x = x^0$.

Kiam $F(x)$ ne nur estas derivebla apud x^0 sed ankaŭ havas apud $x = x^0$ senfinnombrajn diferencialojn $dF, d^2F, \ldots$ (t.e. estas paraanalitika por $x = x^0$) oni ankoraŭ havas la samajn formojn kanonajn, sed la funkcioj A, B, C, kiuj troviĝas en la tabeloj Φ, devas esti senfine deriveblaj apud x^0. Kaj reciproke.

La tabeloj S, Φ, σ, J kaj ψ estos skribataj post anstataŭigo de la antaŭa notado kun indicoj, (valora por iu ajn n) per la pli familiara (kiam n estas malgranda) notado, x, y, z, t, X, Y, Z, T.

Du-dimensiaj funkcioj.

La nombroj $n(n-1)$, $n(n-1)/2$ de la ekvacioj de la sistemoj S kaj σ estas tie-ĉi 2 kaj 1. Du kanonaj reguloj R_p estas sufiĉaj.

Regulo A.

Ĝi kondukas al la klasikaj analitikaj funkcioj kaj sekve al *konataj* formuloj. Ni skribas do la sekvantan tabelon nur kiel rememorigo kaj por ebligi la komparon.

Konataj formuloj

$$A \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{Bmatrix}$$

$$S \left\{ \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}; \right. \qquad \sigma \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \right.$$

Φ $\left\{\right.$ Oni retrovas la monogenajn funkciojn post anstataŭigo de la ĉefa unuo e_1 per 1 kaj e_2 per i

$$X + iY = f(x+iy) = f(z)$$

$$J = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2 \geqq 0$$

$$\Psi \left\{ \begin{aligned} e^z &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{aligned} \right.$$

Regulo D

Tiu-ĉi kondukas en la kazo $n = 2$ al la nova tabelo kiu sekvas:

$$D \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$S \left\{ \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0; \right. \qquad \sigma \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \right.$$

Φ $\left\{\right.$ $X = A(x)$

$Y = yA'(x) + B(x)$ kie $A'(x) \equiv \dfrac{dA}{dx}$ kaj $B(x)$ devas esti deriveblaj en la ĉirkaŭaĵo de x^0. Kaj reciproke.

$J = [A'(x)]^2 \geqq 0.$

Se oni metas tie-ĉi $z = xe_1 + ye_2$

$$\Psi \left\{ \begin{aligned} e^z &= e^x(e_1 + ye_2) \\ \cos z &= (\cos x)e_1 - (\sin x)ye_2 \\ \sin z &= (\sin x)e_1 + (\cos x)ye_2 \end{aligned} \right.$$

Ni jam sciigis pri la du supraj familioj A, D en nia noto de la 22a de dec. 1952 [5]. Sed tiam ili estis nur du simplaj ekzemploj. La ĉi-supra teorema (p. 85) kontraŭe faras el ili (kun la formo Φ por $n = 1$) la fonton por la formado de *ĉiuj la deriveblaj* (aŭ para-analitikaj) *funkcioj* du-dimensiaj.

En la sama noto ni ankaŭ difinis iun certan familion P (laŭ la tipo (9) de la p. 86 por $n = 2.$). Sed tiu lasta ĉar reduktebla ne rajtas troviĝi en la nuna tabelo.

TRI-DIMENSIAJ FUNKCIOJ.

La nombroj $n(n-1)$, $n(n-1)/2$ de la ekvacioj de S kaj σ reduktiĝas al 6 kaj 3 por $n = 3$. Tie-ĉi ankoraŭ du kanonaj reguloj R_p estas sufiĉaj.

Regulo α

$$\alpha \left\{\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$S \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} \end{cases} \qquad \sigma \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \end{cases}$$

$$\Phi \begin{cases} X = A(x), \ Y = yA'(x) + B(x) \\[1ex] Z = \dfrac{y^2}{2} A''(x) + yB'(x) + zA'(x) + C(x) \\[1ex] \text{kie } A''(x),\ B'(x),\ C(x) \text{ estas deriveblaj apud } x = x^0. \\ \text{Kaj reciproke.} \end{cases}$$

$$J = [A'(x)]^3$$

$$\Psi \begin{cases} \text{Se oni metas } t = xe_1 + ye_2 + ze_3 \\[1ex] e^t = e^x e_1 + ye_2 + \left(\dfrac{y^2}{2} + z\right) e_3 \\[2ex] \cos t = \cos x \left(e_1 - \dfrac{y^2}{2} e_3\right) - \sin x (ye_2 + ze_3) \\[2ex] \sin t = \sin x \left(e_1 - \dfrac{y^2}{2} e_3\right) + \cos x (ye_2 + ze_3) \end{cases}$$

Rimarko. Ni jam donis tiun formon en nia traktaĵo de la 26a de Januaro 1953 [6]. (Pli precize ni donis formon *ekvivalentan* laŭ la vidpunkto de la teoremo de la P. 5. Ĝi diferencis de la antaŭa, cetere, nur per du koeficientoj en la esprimo de Z).

Sed eĉ se ni tiam estus asociintaj al la donita formo por $n=3$ la sekvantan formon β, ni estus ricevintaj nur du simplajn ekzemplojn. La teoremo de la p. 85 igas ilin ludi nune fundamentan rolon.

Regulo β

$$\beta \left\{\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$S \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=0 \\ &\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned}\right. \qquad \sigma \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \right.$$

Φ $\left\{\right.$ $X = A(x)$ $Y = yA'(x) + B(x)$ $Z = zA'(x) + C(x)$
kie $A'(x)$, $B(x)$, $C(x)$ estas deriveblaj apud x^0. Kaj reciproke.

$J = [A'(x)]^3$

Ψ $\left\{\right.$ Se oni metas ankoraŭ $t = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$e^t = e^x(e_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$\cos t = \cos x\, e_1 - \sin x\, (ye_2 + ze_3)$$
$$\sin t = \sin x\, e_1 + \cos x\, (ye_2 + ze_3)$$

Kvar-dimensiaj funkcioj

La nombroj $n(n-1)$, $n(n-1)/2$ de la ekvacioj de S kaj σ iĝas tie-ĉi 12 kaj 6. Necesas nun jam *kvin* kanonaj malredukteblaj formoj.

Regulo λ

$$\lambda: \left\{\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_4 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$S \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial t}=0 \\ &\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial x};\quad \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x};\quad \frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x} \end{aligned}\right.$$

$$\sigma \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \end{cases}$$

$$\Phi \begin{cases} X = A(x), \quad Y = yA'(x) + B(x), \quad Z = zA'(x) + C(x) \\ T = \dfrac{y^2 + z^2}{2} A''(x) + yB'(x) + zC'(x) + tA'(x) + D(x), \\ \text{kie } A''(x),\ B'(x),\ C'(x),\ D(x) \text{ devas esti deriveblaj por} \\ x \text{ apud } x^0. \end{cases}$$

$$J = [A'(x)]^4 \geqq 0$$

$$\Psi \begin{cases} \text{Se oni metas } v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4\text{:} \\ e^v = e^x \left[e_1 + ye_2 + ze_3 + \left(\dfrac{y^2 + z^2}{2} + t \right) e_4 \right] \\ \cos v = \cos x \left(e_1 - \dfrac{y^2 + z^2}{2} e_4 \right) - \sin x (ye_2 + ze_3 + te_4) \\ \sin v = \sin x \left(e_1 - \dfrac{y^2 + z^2}{2} e_4 \right) + \cos x (ye_2 + ze_3 + te_4) \end{cases}$$

Regulo μ

$$\mu\colon \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_4 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$S \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \end{cases}$$

$$\Phi \begin{cases} X = A(x); \quad Y = yA'(x) + B(x); \quad Z = zA'(x) + C(x) \\ T = \dfrac{y^2}{2} A''(x) + yB'(x) + tA'(x) + D(x) \\ \text{kie } A''(x), B'(x), C(x), D(x) \text{ devas esti deriveblaj apud } x^0. \end{cases}$$

$J = [A'(x)]^4$

$$\Psi \begin{cases} \text{Se oni metas ankoraù } v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4\text{:} \\ e^v = e^x\left[(e_1 + ye_2 + ze_3 + \left(\frac{y^2}{2} + t\right)e_4\right] \\ \cos v = \cos x\left[e_1 - \frac{y^2}{2}e_4\right] - \sin x[ye_2 + ze_3 + te_4] \\ \sin v = \sin x\left[e_1 - \frac{y^2}{2}e_4\right] + \cos x(ye_2 + ze_3 + te_4] \end{cases}$$

RIMARKO. Por evidentigi pli grandan similecon inter la formoj Φ kiuj respondas al la reguloj λ, μ, ν — similecon kiun ni notos pli poste *p.* 92—93. ni faris en unu el la kanonaj reguloj donitaj de Elie Cartan la transformon $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2$, $f_3 = e_4$, $f_4 = e_3$, kiu donas la regulon ekvivalentan μ.

Regulo ν

$$\nu\colon \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$S \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial x} \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi \begin{cases} X = A(x), \\ Y = yA'(x) + B(x),\ Z = zA'(x) + C(x),\ T = tA'(x) + \\ + D(x), \\ \text{kie } A'(x), B(x), C(x), D(x) \text{ devas esti deriveblaj apud } x^0. \end{cases}$$

$J = [A'(x)]^4 \geqq 0$

$$\Psi \begin{cases} e^v = e^x(e_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) \\ \cos v = \cos xe_1 - \sin x(ye_2 + ze_3 + te_4) \\ \sin v = \sin xe_1 + \cos x(ye_2 + ze_3 + te_4) \end{cases}$$

RIMARKO. Oni observos grandan analogecon inter la formoj de la kanonaj funkcioj respondaj al la reguloj λ, μ, ν. Por tiuj tri reguloj oni havas fakte $X = A(x)$, $Y = yA'(x) + B(x)$, $Z = zA'(x) + C(x)$ kaj T estas polinomo en y, z kaj t. La analogeco kun la sekvanta regulo ϱ estas malpli granda. La kanona formo respondanta al la lasta studota regulo, la regulo τ, estas tre malsimila al la antaŭaj.

Regulo ϱ

$$\varrho: \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$S \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}. \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \end{cases}$$

$$\Phi \begin{cases} X = A(x), Y = yA'(x) + B(x); Z = \dfrac{y^2}{2} A''(x) + \\ + yB'(x) + zA'(x) + C(x) \\ T = \dfrac{y^3}{6} A'''(x) + \dfrac{y^2}{2} B''(x) + yC'(x) + yzA''(x) + \\ + zB'(x) + tA'(x) + D(x) \\ \text{kie } A'''(x),\ B''(x),\ C'(x),\ D(x) \text{ devas esti deriveblaj} \\ \text{apud } x^0. \end{cases}$$

$$J = [A'(x)]^4 \geqq 0.$$

$$e^v = e^x \left[e_1 + ye_2 + \left(\frac{y^2}{2} + z \right) e_3 + \left(\frac{y^3}{6} + yz + t \right) e_4 \right]$$

$$\cos v = \cos x \left(e_1 - \frac{y^2}{2} e_3 - yze_4 \right) - \\ - \sin x \left[ye_2 + ze_3 + \left(t - \frac{y^3}{6} \right) e_4 \right]$$

$$\sin v = \sin x \left(e_1 - \frac{y^2}{2} e_3 - yze_4 \right) + \\ + \cos x \left[ye_2 + ze_3 + \left(t - \frac{y^3}{6} \right) e_4 \right]$$

Regulo τ

$$\tau: \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & -e_3 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$S \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial t} = -\dfrac{\partial T}{\partial z} = -\dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial Z}{\partial y} = -\dfrac{\partial T}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \end{cases}$$

Φ { Se oni metas $\xi = x + iy$, $\eta = z + it$, oni havas $X + iY = f(\xi)$; $Z + iT = \eta f'(\xi) + g(\xi)$, kie $f(\xi)$ kaj $g(\xi)$ estas analitikaj funkcioj de ξ apud $\xi_0 = x_0 + iy_0$.

$J = |f'(\xi)|^4 \geqq 0$

Ψ { Metu $F(v) = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 + Te_4$
Tiam, $X + iY$ kaj $Z + iT$ estas egalaj resp.
al e^{ξ} kaj ηe^{ξ}
al $\cos \xi$ kaj $-\eta \sin \xi$ kiam $F(v) = \begin{cases} e^v \\ \cos v \\ \sin v \end{cases}$
al $\sin \xi$ kaj $\eta \cos \xi$

Historia rimarko. La legado de miaj Notoj al la C. R. pri la para-analitikaj funkcioj elvokis ĉe S-ro Maurice Janet iujn interrilatojn, kiujn li bonvolis komuniki al mi kaj kiujn mi nun indikos. Inter la antaŭaj ĝeneraligoj (kun n dimensioj) de la klasikaj analitikaj funkcioj oni povas citi unue la sekvantajn:

Emile Picard [8] donis interesan difinon, sed tian ke la kondiĉoj de Cauchy-Riemann, liniaj, estas anstataŭataj de *ne*-liniaj sistemoj de ekvacioj kun partaj derivatoj.

Ankaŭ Fueter proponis ĝeneraligon sed laŭ kiu la kvadrato de iu analitika ĝeneraligata funkcio ne estas funkcio kun samaj ecoj. Tiuj du ĝeneraligoj prezentas do tre grandajn diferencojn kun la klasikaj analitikaj funkcioj.

Sed dum mi foliumis la numeron de la C. R. kie troviĝas la Noto de Emile Picard, mi konstatis ke G. Scheffers [9] donis

difinon bazitan sur unu el la du kondiĉoj kiuj karakterizas la mian. Hiperkompleksa funkcio $\Phi(w) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \cdot e_k$ de la hiperkompleksa varianto $w = \Sigma x_k e_k$ devas kontentigi la sekvantan kondiĉon: ekzistas hiperkompleksa nombro $\Phi' = \Sigma_k \Phi'_k e_k$ tia ke $d\Phi = \Phi' \cdot dw$, t.e. $\Sigma d\Phi_h \cdot e_h = (\Sigma \Phi'_k e_k) \cdot (\Sigma dx_r e_r)$ [1]).
Tiu kondiĉo implikas ke la funkcioj $\Phi_k(x_1, \ldots, x_n)$ estu diferencieblaj, sed en la senco elektata en la tempo de Scheffers. Kaj fakte, li aplikas sian difinon nur en la okazo kiam la $\Phi_k(x_1, \ldots, x_n)$ estas analitikaj en la klasika senco, kaj kontentiĝas indikante ke oni povas ĝin apliki ankoraŭ kiam la Φ_k havas kontinuajn partajn derivatojn. Nu, en la du okazoj, se oni aplikus la difinon kiam w estas la ordinara kompleksa nombro, oni ne ricevus la plej ĝeneralan monogenan funkcion. Scheffers demonstras ke la derivato de iu analitika (hiperkompleksa) funkcio estas analitika. Sed li supozas ke la komponantoj de la funkcio estas analitikaj funkcioj en la ordinara senco. Nu ni vidis supre ke tiu sufiĉa kondiĉo ne estas necesa. Kaj se oni supozus pri la komponantoj nur ke ili havas kontinuajn partajn derivatojn, tiu supozo iĝus necesa sed ne sufiĉa.

Same Scheffers starigis nian fundamentan teoremon, laŭ kiu paraanalitika funkcio de paraanalitika funkcio estas paraanalitika, nur en specialaj kazoj.

Ni kontentiĝos per tiuj kelkaj rimarkoj. Legante la unuan Noton de Scheffers, oni konvinkiĝos ke nia difino estas pli kompleta kaj ke ni ne nur precizigis la rezultatojn de Scheffers, sed ankaŭ aldonis multajn gravajn ecojn. Al Scheffers tamen oni devas redoni la meritaĵon esti la pioniro en tiu direkto. Des pli ke, en sia dua Noto, li donis tre interesajn aplikojn al la teorio de la grupoj, aplikojn pri kiuj ni ne okupiĝis.

Ni menciu fine ke F. Hausdorff [4] donis ĝeneraligon ankoraŭ pli vastan ol tiu de Scheffers, sed kiu, pro tio mem, neniigus multe inter la plej gravaj ecoj de la klasikaj analitikaj funkcioj.

---

1) G. Scheffers konsideras unue la ĝeneralan okazon kiam oni havas same $d\Phi = dw \cdot \Phi'$ sed poste limigas sin per la okazo pli interesa, kiam la multiplikado estas komuta.

BIBLIOGRAFIO.

[1] C. R. Ac. Sc. Paris, t.236, 1953; p. 1832—34 kaj p. 2191—2193.

[2] *La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj,*

[3] *Nombres complexes,* laŭ artikolo de E. Study, Enciklopedio de la matematikaj sciencoj, franca eldono, t. 1, vol. 1, kajero 3, 1908, vidu p. 367—378, 393—403.

[4] *Determinado de la plej ĝeneralaj planaj paraanalitikaj funkcioj,* Annali di Matematica, serie IV, t. XXXV, 1953, p. 255.

[5] C. R., t.235, 1952, p. 1585—1587.

[6] C. R., t.236, 1953, p. 348—351.

[7] *La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, baldaŭ presota.

[8] *Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles,* C. R., t. 114, 1892, p. 805—807.

[9] C., R. t. 116, 1893; pp. 1114, 1242. Bericht ges. Leipzig, Bd 45, 1893, Math., p. 828, Bd 46, 1894, Math. p. 120.

(Oblatum 16-9-'54)