COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN DIEUDONNÉ

Sur le produit de composition

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 17-34
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__17_0>

Sur le produit de Composition

par

Jean Dieudonné [1]).

1. Dans tout ce qui suit, G désignera un groupe abélien localement compact [2]), $\mathfrak{M}^1(G)$ l'espace des mesures (complexes) bornées sur G, $L^1(G)$ l'espace des classes de fonctions intégrables pour la mesure de Haar dx sur G (par abus de langage, une classe est identifiée à une quelconque des fonctions de la classe); $L^1(G)$ est considéré comme sous-espace de $\mathfrak{M}^1(G)$, la fonction $f \in L^1(G)$ étant identifiée à la mesure bornée μ telle que $d\mu(x) = f(x)dx$. L'effet „régularisant" du produit de composition $\mu * f$ d'une mesure bornée μ par une fonction $f \in L^1(G)$ est bien connu, en ce qui concerne les propriétés de la fonction $\mu * f$ [3]); nous allons montrer qu'il exerce un effet analogue sur la *convergence* des suites de mesures bornées dans G.

Soit Φ_0 l'espace des fonctions complexes continues dans G et à support compact, muni de la norme $\| f \| = \sup\limits_{x \in G} | f(x) |$; son complété $\overline{\Phi}_0$ est l'espace des fonctions complexes continues dans G et tendant vers 0 à l'infini; $\mathfrak{M}^1(G)$ est, comme on sait, le *dual* de Φ_0 et de $\overline{\Phi}_0$, et nous désignerons par $\| \mu \|$ la norme d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$; la convergence dans $\mathfrak{M}^1(G)$ pour cette norme est qualifiée de convergence *forte*; pour $f \in L^1(G)$ et $d\mu(x) = f(x)dx$,

---

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

[2]) L'hypothèse que G est abélien n'intervient en réalité qu'aux nos. 13 et 14; partout ailleurs, les résultats sont valables pour un groupe localement compact quelconque, comme on le vérifie aisément. Pour la théorie de l'intégration, la terminologie et les notations sont celles de N. Bourbaki [2]; pour le produit de composition, nous suivons l'exposé de H. Cartan et R. Godement [3].

[3]) Un exemple de cet effet est la remarque suivante, que je n'ai pas trouvée dans la littérature sur le produit de composition: pour deux fonctions intégrables f, g, le produit $f * g$ est presque partout égal à une fonction de 1re classe de Baire (ce qui n'est pas le cas pour une fonction intégrable quelconque, comme il est bien connu). Il suffit pour le montrer de considérer le cas où f et g sont positives; si $g_n = \inf(g, n)$, $f * g_n$ est continue puisque g_n est bornée, et en vertu du th. de Lebesgue, $f * g$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $f * g_n$, donc est semi-continue inférieurement, et par suite de première classe. Il est facile de voir sur des exemples que ce résultat ne peut être amélioré.

on a $\|\mu\| = \int |f(x)|\,dx = N_1(f)$. Rappelons que la convergence simple d'une suite (μ_n) de mesures bornées dans Φ_0 est appelée convergence *vague*; nous considérerons aussi dans ce qui suit la convergence simple de (μ_n) pour toute fonction complexe *continue* et bornée dans G (et par suite, comme on sait, intégrable pour toute mesure bornée sur G); on désignera par Φ_I l'espace de ces fonctions. Nous aurons aussi à considérer parfois l'ensemble Φ_I' des fonctions *uniformément continues et bornées* dans G; enfin, nous désignerons par Φ_{IV} l'ensemble des fonctions *boréliennes bornées* sur G (notations inspirées de celles de [6]).

Nous allons étudier dans ce qui suit la nature de la convergence d'une suite de produits de composition $\lambda_n * \mu_n$, sous diverses hypothèses concernant la convergence des deux suites (λ_n), (μ_n) de mesures bornées; nous examinerons aussi les particularités qui se présentent quand on suppose que l'une des suites (ou les deux) sont formées de fonctions de $L^1(G)$. Dans nos résultats, le fait qu'il est question de *suites* (ou de filtres à base dénombrable) joue un rôle essentiel; presqu'aucun d'eux ne subsiste si on remplace les suites (λ_n), (μ_n) par des filtres bornés à base non dénombrable.

2. Nous commencerons par démontrer un lemme sur les mesures bornées sur un espace localement compact et paracompact E, établi par I. Schur [7] lorsque E est discret:

LEMME. *Soit E un espace localement compact et paracompact, et soit (μ_n) une suite de mesures bornées sur E, qui converge simplement vers une mesure bornée μ dans Φ_I. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de E telle que $|\mu_n|(\complement K) \leqq \varepsilon$* [1] *pour tout entier n.*

Nous allons, comme I. Schur, raisonner par l'absurde, suivant la méthode habituelle en ce genre de propositions (cf. [6]). On peut toujours supposer que $\mu = 0$, en remplacant μ_n par $\mu_n - \mu$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute partie compacte K de E, il y ait un entier n pour lequel $|\mu_n|(\complement K) \geqq \alpha$. Remarquons que E, étant paracompact, est somme topologique d'une famille (E_λ) d'espaces localement compacts et dénombrables à l'infini [1, p. 107, th. 5]; chacun des E_λ est donc réunion d'une suite croissante $(A_{n\lambda})$ d'ensembles ouverts relativement compacts tels que $\bar{A}_{n\lambda} \subset A_{n+1.\lambda}$ pour tout n. On va définir une suite croissante (U_k) d'ensembles ouverts relativement compacts dans E, une suite (f_k) de fonctions continues à support compact dans E,

[1]) La notation $\complement A$ désignera dans tout ce travail le complémentaire d'une partie A.

et une suite croissante (n_k) d'entiers, de facon à satisfaire aux conditions suivantes:

1. U_{k+1} contient $\overline{U}_k$ et tous les ensembles $\bar{A}_{k\lambda}$ relatifs aux indices λ (en nombre fini) tels que U_k rencontre E_λ;

2. le support de f_k est contenu dans $U_k - \overline{U}_{k-1}$ et on a $0 \leqq f_k \leqq 1$;

3. pour $i < k$, on a $|\mu_{n_i}| (\complement \overline{U}_k) \leqq \frac{\alpha}{32}$;

4. on a $\sum_{i=1}^{k-1} \left| \mu_{n_k} (f_i) \right| \leqq \frac{\alpha}{32}$ et $\left| \mu_{n_k} (f_k) \right| \geqq \frac{\alpha}{8}$.

Pour poursuivre la récurrence, U_k, f_k et n_k étant supposés définis, il existe d'abord un indice $m_k > n_k$ tel que, pour $n \geqq m_k$, on ait $\sum_{i=1}^{k} \left| \mu_n(f_i) \right| \leqq \frac{\alpha}{32}$, et un voisinage compact V_k de $\overline{U}_k$ tel que $|\mu_m| (\complement V_k) \leqq \frac{\alpha}{32}$ pour tout $m \leqq m_k$. Par hypothèse, il existe un ensemble compact H_{k+1} contenu dans $\complement V_k$ et un indice n_{k+1} (nécessairement $> m_k$) tels que $|\mu_{n_{k+1}}| (H_{k+1}) \geqq \alpha$; il y a donc aussi une partie compacte L_{k+1} de H_{k+1} telle que $\left| \mu_{n_{k+1}} (L_{k+1}) \right| \geqq \frac{\alpha}{4}$, puis une fonction continue f_{k+1}, de valeurs comprises entre 0 et 1, égale à 1 dans L_{k+1}, à 0 dans le complémentaire d'un voisinage de L_{k+1} contenu dans $\complement V_k$, et telle que $\left| \mu_{n_{k+1}} (f_{k+1}) \right| \geqq \frac{\alpha}{8}$. Il reste à choisir pour U_{k+1} un voisinage ouvert relativement compact de V_k, contenant le support de f_{k+1} et tous les $\bar{A}_{k\lambda}$ pour les indices λ tels que U_k rencontre E_λ. Il est ainsi prouvé que la récurrence peut se poursuivre indéfiniment.

Cela étant, il résulte du choix des U_k que tout point de E admet un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de supports des f_k; la somme $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est donc une fonction continue dans E, telle que $0 \leqq f \leqq 1$. En outre, pour tout indice k, on a

$$|\mu_{n_k}(f)| \geqq |\mu_{n_k}(f_k)| - \sum_{i<k} |\mu_{n_k}(f_i)| - |\mu_{n_k}(\sum_{j>k} f_j)|$$

mais comme $\sum_{j>k} f_j$ a son support contenu dans $\complement V_k$, et est comprise entre 0 et 1, on a $|\mu_{n_k}(\sum_{j>k} f_j)| \leqq |\mu_{n_k}| (\complement V_k) \leqq \frac{\alpha}{32}$, d'ou finalement $|\mu_{n_k} (f)| \geqq \frac{\alpha}{16}$ pour tout indice k, ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration.

3. Avant d'aborder le sujet de cet article, ajoutons quelques remarques au lemme précédent.

En premier lieu, l'hypothèse que E est *paracompact* ne peut être supprimée de l'énoncé. Considérons en effet l'espace de Tychonoff E (cf. p. ex. [4]) complémentaire du point (ω, Ω) dans l'espace produit de l'espace E_0 des ordinaux $\leqq \omega$ et de l'espace E_1 des ordinaux $\leqq \Omega$. On sait que E est localement compact et non normal (ni par suite paracompact), et que dans E toute fonction numérique continue est bornée et tend vers une limite au point à l'infini (ω, Ω). Soit alors μ_n la mesure définie par la masse $+ 1$ au point (n, Ω) et la masse $- 1$ au point $(n + 1, \Omega)$; il est clair que $\mu_n(f)$ tend vers 0 pour toute fonction continue dans E, mais que pour toute partie compacte K de E, on a $|\mu_n|(\complement K) = 2$ à partir d'un certain rang.

Une seconde remarque est que le lemme s'applique aussi aux filtres sur $\mathfrak{M}^1(E)$ ayant une base *dénombrable* (cf. [1], p. 42, prop. 10) mais *non aux filtres bornés quelconques*. Considérons en effet un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ sur E, non convergent; toute fonction f bornée dans E admet donc une limite suivant $\mathfrak{F}$. Pour tout ensemble (nécessairement infini) $U \in \mathfrak{F}$, soit μ_U la mesure sur E définie par la masse $+ 1$ en un point de U, la masse $- 1$ en un autre point de U. Il est clair que, suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$, l'application $U \to \mu_U(f)$ converge vers 0 pour toute fonction $f \in \Phi_I$; mais comme $\mathfrak{F}$ ne converge pas dans E, pour tout ensemble compact $K \subset E$, $\complement K$ appartient à $\mathfrak{F}$, et si $U \subset \complement K$, on a $|\mu_U|(\complement K) = 2$.

4. Nous remarquerons tout d'abord que la convergence d'une suite (λ_n) de mesures bornées dans l'ensemble $\overline{\Phi}_0$ entraîne que cette suite est bornée en norme, soit $\|\lambda_n\| \leqq a$ (a indépendant de n); il n'en est pas de même de la convergence dans Φ_0 lorsque G n'est pas compact, mais si on suppose la suite (λ_n) bornée en norme, la convergence dans Φ_0 est équivalente pour cette suite à la convergence dans $\overline{\Phi}_0$. On remarquera aussi que si G est compact, les quatre ensembles Φ_0, $\overline{\Phi}_0$, Φ'_I et Φ_I sont identiques. Si on suppose que λ_n tend vers λ dans $\overline{\Phi}_0$ et μ_n vers μ dans $\overline{\Phi}_0$, en général $\lambda_n * \mu_n$ *ne tend pas vers* $\lambda * \mu$ dans $\overline{\Phi}_0$; par exemple, sur la droite numérique, si λ_n est la masse $+ 1$ au point n, et μ_n la masse $+ 1$ au point $- n$, $\lambda_n * \mu_n$ est la masse $+ 1$ au point 0, et ne tend donc pas vers 0 dans $\overline{\Phi}_0$, bien que λ_n et μ_n tendent vers 0 dans cet ensemble. Par contre, on a le théorème suivant:

Théorème 1. *Si λ_n tend vers λ dans Φ_I et μ_n vers μ dans $\overline{\Phi}_0$, $\lambda_n * \mu_n$ tend vers $\lambda * \mu$ dans $\overline{\Phi}_0$.*

Remarquons d'abord que $\lambda * \mu_n$ tend vers $\lambda * \mu$ dans $\overline{\Phi}_0$; en effet, pour toute fonction $f \in \overline{\Phi}_0$, $g(y) = \int f(xy)d\lambda(x)$ appartient à $\overline{\Phi}_0$, comme on le voit aisément. De même, $\lambda_n * \mu$ tend vers $\lambda * \mu$ dans Φ_I. On peut donc se ramener au cas où $\lambda = \mu = 0$. Comme $\| \lambda_n * \mu_n \|$ reste borné, il suffit de prouver que $(\lambda_n * \mu_n)(f)$ tend vers 0 pour toute fonction f continue et à support compact S. Pour tout $\varepsilon > 0$. il existe, en vertu du lemme du n° 2 [1]), un ensemble compact K tel que $| \lambda_n | (\complement K) \leqq \varepsilon$. Soit φ une fonction continue dans G à valeurs entre 0 et 1, de support compact H, égale à 1 dans K. La fonction $(1 - \varphi(x))f(xy)$ a son support dans $(\complement K) \times G$, d'où

$$\left| \iint (1 - \varphi(x))f(xy)d\lambda_n(x)d\mu_n(y) \right| \leqq bc\varepsilon$$

si $\| \mu_n \| \leqq b$ et $c = \sup\limits_{x \in G} | f(x) |$. Il suffit donc de prouver que l'intégrale $\iint \varphi(x)f(xy)d\lambda_n(x)d\mu_n(y)$ tend vers 0; le support de $\varphi(x)f(xy)$ est contenu dans $H \times (SH^{-1})$; il existe donc un nombre fini de fonctions continues à support compact u_i, v_i $(1 \leqq i \leqq p)$ telles que $| \varphi(x)f(xy) - \sum\limits_{i=1}^{p} u_i(x)v_i(y) | \leqq \varepsilon$ dans $G \times G$. Mais comme on a

$$\iint (\sum_i u_i(x)v_i(y))d\lambda_n(x)d\mu_n(y) = \sum_i \left(\int u_i(x)d\lambda_n(x)\right)\left(\int v_i(y)d\mu_n(y)\right)$$

l'hypothèse entraîne que la somme du second membre tend vers 0, ce qui démontre le théorème.

5. Sous les hypothèses du th. 1, il n'est pas vrai en général que $\lambda_n * \mu_n$ tende vers $\lambda * \mu$ *dans* Φ_I, même lorsque $\lambda = \mu = 0$ [2]). Prenons par exemple, sur la droite numérique, μ_n définie par la masse $+ 1$ au point n, λ_n définie par la masse $+ 1$ au point 0 et la masse $- 1$ au point $1/n$. Pour toute fonction $f \in \Phi_I$, on a

$$\iint f(x + y)d\lambda_n(x)d\mu_n(y) = f(n) - f\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

quantité qui ne tend pas nécessairement vers 0 si f n'est pas uniformément continue.

Le fait que dans l'exemple précédent la fonction f doit être prise

[1]) Nous utilisons ici le fait bien connu qu'un groupe localement compact est paracompact (parce que la composante de l'unité est engendrée par un voisinage compact, et est donc un sous-groupe ouvert dénombrable à l'infini).

[2]) Lorsque $\lambda_n = \varepsilon$, on a $\lambda_n * \mu_n = \mu_n$ pour tout indice n; on ne peut donc espérer que la convergence de $\lambda_n * \mu_n$ soit meilleure que celle de μ_n, sauf lorsque λ_n tend vers 0.

non uniformément continue n'est d'ailleurs pas fortuit (cf. n⁰ 8, prop. 1).

Notons aussi que dans l'exemple du début de ce n⁰, on peut remplacer λ_n et μ_n par des „régularisées" $\lambda_n * g_n$, $\mu_n * g_n$, où g_n est une fonction de Φ_0 à support arbitrairement petit; celà montre qu'on ne peut améliorer le th. 1 lorsqu'on y suppose que l'une ou l'autre des mesures λ_n, μ_n appartient à $L^1(G)$.

6. Prouvons maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si λ_n tend vers λ dans Φ_I et μ_n vers μ dans Φ_I, $\lambda_n * \mu_n$ tend vers $\lambda * \mu$ dans Φ_I.*

Soit f une fonction de Φ_I. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, en vertu du lemme du n⁰ 2, un ensemble compact K tel que $|\lambda_n|(\complement K) \leqq \varepsilon$ et $|\mu_n|(\complement K) \leqq \varepsilon$ pour tout entier n. Soit φ une fonction continue dans G, à valeurs entre 0 et 1, de support compact H, égale à 1 dans K. Comme la fonction $(1 - \varphi(x)\varphi(y))f(xy)$ a son support dans la réunion de $(\complement K) \times G$ et de $G \times (\complement K)$, on a $\left| \iint (1 - \varphi(x)\varphi(y))f(xy)d\lambda_n(x)d\mu_n(y) \right| \leqq (a + b)c\varepsilon$, avec $c = \sup |f(x)|$. Il suffit donc de prouver que l'intégrale $\iint \varphi(x)\varphi(y) f(xy)d\lambda_n(x)d\mu_n(y)$ tend vers 0; comme la fonction continue $\varphi(x)\varphi(y)f(xy)$ est à support compact, on peut l'approcher uniformément par des fonctions de la forme $\Sigma u_i(x)v_i(y)$, où les u_i et v_i sont continues à support compact, et la démonstration se termine comme celle du th. 1.

Ce résultat ne peut être amélioré, même si G est compact. En effet, prenons par exemple pour G le tore $\mathbf{T}$, identifié à l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de $\mathbf{R}$, et pour $\lambda_n = \mu_n$ la mesure définie par la masse $+1$ au point $1/n$, la masse -1 au point $-1/n$; pour toute fonction numérique f, on a $\iint f(x+y)d\lambda_n(x)d\mu_n(y) = f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(-\frac{2}{n}\right) - 2f(0)$, qui ne tend pas vers 0 si f n'est pas continue au point 0. En remplacant dans cet exemple λ_n par une régularisée convenable $\lambda_n * g_n$, on voit que le résultat du th. 2 ne s'améliore pas non plus lorsque λ_n et μ_n sont dans $L^1(G)$.

7. THÉORÈME 3. *Si λ_n et μ_n tendent respectivement vers λ et μ dans Φ_{IV}, $\lambda_n * \mu_n$ tend vers $\lambda * \mu$ dans Φ_{IV}.*

On se ramène aussitôt au cas où $\lambda = \mu = 0$. Soit f une fonction quelconque de Φ_{IV}; on a $(\lambda_n * \mu_n)(f) = \int g_n(x)d\lambda_n(x)$, où $g_n(x) = \int f(xy)d\mu_n(y)$; g_n est équivalente (pour λ_n) à une fonction borélienne telle que $\| g_n \| \leqq bc$ (avec $c = \sup_{x \varepsilon G} | f(x) |$) pour tout n; en outre, $g_n(x)$ tend par hypothèse vers 0 pour tout $x \in G$. On peut écrire $d\lambda_n(x) = h_n(x) d\lambda(x)$, où λ est une mesure positive sur G et h_n une fonction intégrable pour λ. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K tel que $| \lambda_n | (\complement K) \leqq \varepsilon$ pour tout n, d'après le lemme du n⁰ 2, d'où $\left| \int_{\complement K} g_n(x) d\lambda_n(x) \right| \leqq bc\varepsilon$ pour tout n. D'autre part, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout ensemble borélien $A \subset K$ tel que $\lambda(A) \leqq \delta$, on ait $| \lambda_n | (A) \leqq \varepsilon$ pour tout n (voir par exemple [5]). Or, en vertu du th. d'Egoroff ([2], p. 187) il existe un ensemble compact $H \subset K$ tel que dans H la suite (g_n) converge uniformément vers 0 et que $\lambda(K - H) \leqq \delta$; si n_0 est assez grand pour que, dans H, on ait $| g_n(x) | \leqq \varepsilon$, on a par suite $\left| \int_H g_n(x) d\lambda_n(x) \right| \leqq a\varepsilon$; d'autre part si $A = K - H$, $\left| \int_A g_n(x) d\lambda_n(x) \right| \leqq bc\varepsilon$ pour tout n en vertu du choix de δ, d'où finalement $\left| \int g_n(x) d\lambda_n(x) \right| \leqq$ $\leqq (a + 2bc)\varepsilon$, ce qui démontre le théorème.

Ici encore, sous les hypothèses du th. 3, la convergence de $\lambda_n * \mu_n$ ne peut être améliorée, même si G est compact et si λ_n et μ_n sont dans $L^1(G)$. En effet, prenons $G = \mathbf{T}$, et $d\lambda_n(x) = d\mu_n(x) =$ $= \cos 2\pi nx \, dx$; on constate aisément que $\lambda_n * \mu_n$ est la mesure $\frac{1}{2} \cos 2\pi nx \, dx$, dont la norme est constante, et ne tend donc pas vers 0 avec $1/n$.

Si on veut conserver la conclusion du th. 3 pour λ et μ quelconques, on ne peut évidemment affaiblir les hypothèses, puisque pour $\lambda_n = \varepsilon$ (ε mesure égale à $+1$ en l'élément neutre de G), on a $\lambda_n * \mu_n = \mu_n$. Par contre, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si λ_n tend vers λ dans Φ_I et si $f_n \in L^1(G)$ tend vers $f \in L^1(G)$ dans Φ_{IV}, alors $\lambda_n * f_n$ tend vers $\lambda * f$ dans Φ_{IV}.*

On sait déjà, d'après le th. 2, que $\lambda_n * f_n$ tend vers $\lambda * f$ dans Φ_I. D'autre part, comme $\lambda_n * f_n \in L^1(G)$, tout revient à démontrer les deux propriétés suivantes (cf. par exemple [5]):

a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de G telle que $\int_{\complement K} | (\lambda_n * f_n)(x) | \, dx \leqq \varepsilon$ pour tout n;

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour $m(A) \leqq \delta$ (m mesure de Haar sur G), on a $\int_A \left| (\lambda_n * f_n)(x) \right| dx \leqq \varepsilon$ pour tout n.

Or, en vertu du lemme du n⁰ 2, il existe un ensemble compact H tel que $| \lambda_n | (\complement H) \leqq \varepsilon$ et $\int_{\complement H} | f_n(x) | \, dx \leqq \varepsilon$ pour tout entier n. Pour tout ensemble borélien B contenu dans le complémentaire de

$K = HH$, la fonction $\varphi_B(xy)$ (où φ_B est la fonction caractéristique de B) a son support dans le complémentaire de $H \times H$, d'où aussitôt l'inégalité $\left| \int_B (\lambda_n * f_n)(x) dx \right| \leqq (a + b)\varepsilon$; on en déduit que l'on a $\int_{\complement K} | (\lambda_n * f_n)(x) | \, dx \leqq 4(a + b)\varepsilon$.

D'autre part, comme f_n tend vers f dans Φ_{IV}, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour $m(A) \leqq \delta$, on ait $\int_A | f_n(x) | \, dx \leqq \varepsilon$ pour tout n. Pour tout $y \in G$, on a, en raison de l'invariance de la mesure de Haar par translation, $m(Ay^{-1}) \leqq \delta$, et par suite $\int | f_n(x) | \varphi_A(xy) dx \leqq \varepsilon$; cela entraîne $\left| \int_A (\lambda_n * f_n)(x) dx \right| \leqq a\varepsilon$, et par suite $\int_A | (\lambda_n * f_n)(x) | \, dx \leqq 4a\varepsilon$ pour tout n, ce qui achève la démonstration [1]).

Remarquons que la conclusion du th. 4 ne subsiste plus si dans l'énoncé on remplace la convergence dans Φ_I par la convergence dans Φ'_I. Prenons en effet pour G la droite numérique; soit $f_n(x) = \sin nx$ pour $0 \leqq x \leqq \pi$, $f_n(x) = 0$ ailleurs; on voit aussitôt que f_n tend vers 0 dans Φ_{IV}. Soit d'autre part g la fonction de Φ_{IV} égale à $\sin nx$ pour $n\pi \leqq x \leqq (n + 1)\pi$, n prenant toutes les valeurs entières. La fonction $f_n * g$ est alors égale à $\frac{\pi}{2}$ au point $n\pi$, mais prend au point $n\pi + \frac{\pi}{2n}$ une valeur qui tend vers 0 avec $1/n$. Cela étant, si on prend pour λ_n la mesure définie par la masse $+ 1$ au point $n\pi$, la masse $- 1$ au point $n\pi + \frac{\pi}{2n}$, la suite (λ_n) tend vers 0 dans Φ'_I, mais $\lambda_n(f_n * g) = (\lambda_n * \check{f}_n)(g)$ ne tend pas vers 0 avec $1/n$.

8. Passons enfin au cas où l'une des mesures λ_n, μ_n converge *fortement* vers sa limite. La remarque faite avant le th. 4 montre qu'en général la convergence de $\lambda_n * \mu_n$ est alors du même type que la convergence de celle des mesures λ_n, μ_n qui ne converge pas fortement. Mais on a le résultat suivant:

THÉORÈME 5. *Si λ_n tend vers λ dans Φ'_I et si $f_n \in L^1(G)$ tend fortement vers $f \in L^1(G)$, $\lambda_n * f_n$ tend fortement vers $\lambda * f$.*

On se ramène aussitôt au cas où $\lambda = 0$ et $f_n = f$ pour tout n, puisque $N_1(\lambda_n * (f - f_n)) \leqq || \lambda_n || \, . \, N_1 (f - f_n)$, et que la suite

[1]) Je ne suis pas parvenu à déterminer si $\lambda_n * \mu_n$ tend vers 0 dans Φ_{IV} lorsqu'on suppose que λ_n tend vers 0 dans Φ_I et que μ_n tend vers 0 dans Φ_{IV}, si les μ_n ne sont pas des mesures ayant pour base la mesure de Haar.

des $\|\lambda_n\|$ est bornée. D'autre part, on peut supposer que $f \in \Phi_0$, car Φ_0 est dense dans $L^1(G)$, et si $N_1(f-g) \leqq \varepsilon$, on a $N_1(\lambda_n*(f-g)) \leqq \varepsilon \|\lambda_n\|$. Notons d'abord que pour tout $x \in G$, $(\lambda_n * f)(x)$ tend par hypothèse vers 0 avec $1/n$; comme en outre $|(\lambda_n * f)(x)| \leqq \leqq \|\lambda_n\| \cdot \|f\|$ pour tout x, on voit que pour toute partie compacte K de G, $\int_K |(\lambda_n * f)(x)|\, dx$ tend vers 0 en raison du th. de Lebesgue. Tout revient donc à prouver la proposition suivante: *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K tel que l'on ait $\int_{\complement K} |(\lambda_n * f)(x)|\, dx \leqq \varepsilon$ pour tout n.*

Raisonnons par l'absurde, supposant donc qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour toute partie compacte K de G, il existe un entier n pour lequel $\int_{\complement K} |(\lambda_n * f)(x)|\, dx \geqq \alpha$. Soit d'autre part V un voisinage compact du support de f. On peut alors définir une suite d'ensembles compacts H_k et une suite strictement croissante d'entiers n_k, satisfaisant aux conditions suivantes:

1. si L_k est la réunion des H_i d'indice $i < k$, H_k ne rencontre pas $L_k V^2$, et on a $\left| \int_{H_k} (\lambda_{n_k} * f)(x)dx \right| \geqq \frac{\alpha}{4}$;

2. on a $\sum_{i<k} \int_{H_i} |(\lambda_{n_k} * f)(x)|\, dx \leqq \frac{\alpha}{16}$;

3. pour tout $i \leqq k$, on a $\sum_{j>k} \int_{H_j} |(\lambda_{n_i} * f)(x)|\, dx \leqq \frac{\alpha}{16}$.

On peut en effet choisir d'abord m_k assez grand pour que $\sum_{i<k} \int_{H_i} |(\lambda_n * f)(x)|\, dx \leqq \frac{\alpha}{16}$ pour tout $n \geqq m_k$, ce qui entraîne $m_k > n_i$ pour $i < k$. On prend ensuite un voisinage compact W_k assez grand de $L_k V^2$, tel que $\int_{\complement W_k} |(\lambda_{n_i} * f)(x)|\, dx \leqq \frac{\alpha}{16}$ pour tout $i < k$. L'hypothèse permet alors de déterminer n_k et H_k vérifiant la condition 1° et tels que H_k ne rencontre pas W_k, d'où la possibilité de poursuivre la récurrence.

Soit alors H la réunion des H_k, et g sa fonction caractéristique; la fonction $\check{f} * g$ est uniformément continue puisque $f \in \Phi_0$, et on a

$$\lambda_{n_k}(\check{f} * g) = (\lambda_{n_k} * f)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{H_j} (\lambda_{n_k} * f)(x)dx$$

d'où

$$|\lambda_{n_k}(\check{f} * g)| \geqq \left| \int_{H_k} (\lambda_{n_k} * f)(x)dx \right| - \sum_{i<k} \int_{H_i} |(\lambda_{n_k} * f)(x)|\, dx -$$

$$-\sum_{i>k}\int_{H_i} |(\lambda_{n_k} * f)(x)|\, dx \geqq \frac{\alpha}{8}$$

pour tout entier k, ce qui contredit l'hypothèse.

On notera que la conclusion du th. 5 n'est plus valable si on remplace la convergence dans Φ_I' par la convergence dans $\overline{\Phi}_0$: si λ_n est une mesure dont le support est ponctuel et s'éloigne indéfiniment dans G, $\lambda_n \check{*} f$ ne tend même pas vers 0 dans Φ_I'.

Le th. 5 entraîne la proposition suivante:

Proposition 1. *Si λ_n tend vers 0 dans Φ_I' et si μ_n tend vers μ dans $\overline{\Phi}_0$, $\lambda_n * \mu_n$ tend vers 0 dans Φ_I'.*

Remarquons tout d'abord que toute fonction $g \in \Phi_I'$ peut être approchée *uniformément dans G* par des produits de composition $\check{f} * g$, où $f \in \Phi_0$ a un support arbitrairement petit et $N_1(f) = 1$; cela résulte aussitôt de la continuité uniforme de g. Comme la suite des normes $\|\lambda_n * \mu_n\|$ est bornée par hypothèse, pour démontrer la proposition, il suffit donc de voir que $(\lambda_n * \mu_n)(\check{f} * g)$ tend vers 0 pour tout $f \in \Phi_0$ et tout $g \in \Phi_I'$. Or on a $(\lambda_n * \mu_n)(\check{f} * g) = ((\lambda_n * f) * \mu_n)(g)$; en vertu du th. 5, $\lambda_n * f$ tend fortement vers 0; il suffit alors de remarquer que $\|(\lambda_n * f) * \mu_n\| \leqq N_1(\lambda_n * f) . \|\mu_n\|$ pour voir que $(\lambda_n * f) * \mu_n$ tend fortement vers 0, d'où la proposition.

9. Montrons maintenant que la plupart des résultats précédents cessent d'être valables lorsqu'il s'agit de la convergence de filtres bornés (à base non dénombrable) sur $\mathfrak{M}^1(G)$. Prenons pour G la droite numérique $\mathbf{R}$, et soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre non convergent sur $\mathbf{R}$; pour tout ensemble $U \in \mathfrak{F}$, soit λ_U la mesure définie par la masse $+1$ en un point x_U de U, la masse -1 en un autre point y_U de U; on a vu (n° 3) que $U \to \lambda_U$ converge vers 0 dans Φ_{IV} suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$. Soit d'autre part μ_U la mesure définie par la masse $+1$ au point $-x_U$ et la masse -1 au point $-y_U$; comme $-\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre sur $\mathbf{R}$, $U \to \mu_U$ converge aussi vers 0 dans Φ_{IV} suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$. Cela étant, pour toute fonction bornée f on a $\iint f(x+y)d\lambda_U(x)d\mu_U(y) = 2f(0) - f(x_U - y_U) - f(y_U - x_U)$. Or, comme tout ensemble $U \in \mathfrak{F}$ est non borné, on peut toujours supposer que $|x_U - y_U| > 1$. Si alors f est une fonction de Φ_0 égale à 1 pour $x = 0$ et dont le support est contenu dans un intervalle de longueur $< \frac{1}{2}$, on a $\iint f(x+y)d\lambda_U(x)d\mu_U(y) = 2$ pour tout $U \in \mathfrak{F}$, et par suite l'application $U \to \lambda_U * \mu_U$ ne converge pas vers 0, même dans Φ_0, suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$; ceci donne des contre-exemples pour l'extension des th. 1, 2 et 3 aux filtres quelconques; en remplaçant λ_U par $\lambda_U * g$, où $g \in \Phi_0$ a un support assez petit, on aurait un contre-exemple analogue pour le th. 4. Enfin, avec les mêmes notations, la fonction $\lambda_U * f$ est identique à la fonction $t \to f(t + x_U) - f(t + y_U)$, d'où $N_1(\lambda_U * f) = 2 \int | f(x) | \, dx$; l'application $U \to \lambda_U * f$ ne converge donc pas fortement vers 0 suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$ (contre-exemple à l'extension du th. 5).

On a seulement la proposition élémentaire suivante:

PROPOSITION 2. *Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble $\mathfrak{M}^1(G)$ est borné et converge dans Φ_I vers une mesure μ_0, l'application $\mu \to \mu * f$ converge dans Φ_{IV} vers $\mu_0 * f$ (suivant $\mathfrak{F}$) pour toute fonction $f \in L^1(G)$.*

En effet, comme il existe par hypothèse dans $\mathfrak{F}$ un ensemble borné, on peut se ramener au cas où f est continue et à support compact, comme dans la démonstration du th. 5 (n⁰ 8). Or, pour toute fonction borélienne bornée g, on a $(\mu * f)(g) = \mu(\check{f} * g)$, en posant comme d'ordinaire $\check{f}(x) = f(x^{-1})$; comme $\check{f} * g$ est une fonction continue bornée, cela démontre la proposition.

Ici encore, il est immédiat que si on suppose seulement que μ tend vers μ_0 dans $\overline{\Phi}_0$ (suivant $\mathfrak{F}$), $\mu * f$ ne tend même pas vers $\mu_0 * f$ dans Φ_I.

10. Les contre-exemples du n⁰ 9 sont relatifs à un groupe G non compact. Lorsque G est *compact*, il est facile de voir que l'application $(\lambda, \mu) \to \lambda * \mu$ est continue quand on munit $\mathfrak{M}^1(G)$ de la topologie de la convergence vague, et que λ et μ restent dans des parties bornées de $\mathfrak{M}^1(G)$ [2, p. 95, prop. 4]. De même, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, l'application $\mu \to \mu * f$ transforme un filtre borné et convergent dans Φ_I en un filtre fortement convergent [1]). Par contre, si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux filtres bornés sur $\mathfrak{M}^1(G)$ qui convergent respectivement vers λ_0 et μ_0 dans Φ_{IV}, $\lambda * \mu$ ne converge pas nécessairement dans Φ_{IV} vers $\lambda_0 * \mu_0$ suivant le filtre $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$. Par exemple, sur le tore $\mathbf{T}$, soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre (nécessairement convergent), formé d'ensembles infinis, et pour tout $U \in \mathfrak{F}$, soit λ_U une mesure définie par la masse $+1$ en un point x_U de U, la masse -1 en un autre point y_U de U. Soit μ_U la mesure définie par la masse $+1$ au point $-x_U$, la masse -1 au point $-y_U$; λ_U et

[1]) Il suffit de prouver que $\int f(xy^{-1}) d\mu(y)$ converge uniformément vers 0 (pour $x \in G$) lorsque μ tend vers 0 dans Φ_I en restant bornée en norme par un nombre fixe; on se ramène aussitôt au cas où f est continue, et la proposition résulte alors de la possibilité d'approcher uniformément $f(xy^{-1})$ par une fonction de la forme $\Sigma u_i(x) v_i(y)$, où les u_i et v_i sont continues dans G.

t

μ_U convergent vers 0 dans Φ_{IV}, suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$. Mais, si f est la fonction caractéristique du point 0, on a
$\iint f(x+y)\, d\lambda_U(x) d\mu_U(y) = 2f(0) - f(x_U - y_U) - f(y_U - x_U) = 2$, ce qui prouve que $\lambda_U * \mu_U$ ne tend pas vers 0 suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$ [1]).

11. Ajoutons à ce qui précède quelques remarques sur les divers modes de convergence considérés pour les suites de mesures bornées. En premier lieu, on a la proposition suivante, qui précise le lemme du n⁰ 2:

PROPOSITION 3. *Soit E un espace localement compact et paracompact et soit (μ_n) une suite de mesures bornées sur E, telle que pour toute fonction $f \in \Phi_I$, la suite $(\mu_n(f))$ ait une limite finie $\mu(f)$. Alors μ est une mesure bornée sur E.*

Tout d'abord, comme la suite (μ_n) est une suite de Cauchy pour la convergence dans $\overline{\Phi}_0$, c'est-à-dire la convergence faible dans le dual de l'espace de Banach $\overline{\Phi}_0$, elle est bornée et converge *dans* $\overline{\Phi}_0$ vers une mesure bornée λ. Il s'agit de montrer que (μ_n) converge aussi vers λ *dans* Φ_I; il suffira évidemment pour cela de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de E telle que $|\mu_n|(\complement K) \leqq \varepsilon$ pour tout n. Supposons le contraire, et construisons les suites (U_k) et (H_k) comme au n⁰ 2; il est clair alors que l'on a $|\mu_{n_{k+1}} - \mu_{n_k}|(H_{k+1}) \geqq \frac{\alpha}{2}$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse et au lemme du n⁰ 2, puisque la suite des mesures bornées $\lambda_k = \mu_{n_{k+1}} - \mu_{n_k}$ converge vers 0 dans Φ_I.

12. Pour les mesures *positives* (bornées) sur un groupe G, le lemme du n⁰ 2 et la prop. 3 peuvent être améliorés de la façon suivante:

THÉORÈME 6. *Soit (μ_n) une suite de mesures positives bornées sur G, telle que, pour toute fonction f uniformément continue et bornée dans G, la suite $(\mu_n(f))$ ait une limite finie $\mu(f)$. Alors μ est une mesure sur G, et la suite (μ_n) tend vers μ dans Φ_I.*

Comme dans la prop. 3, on voit d'abord que la suite (μ_n) est bornée dans $\mathfrak{M}^1(G)$, et converge dans $\overline{\Phi}_0$ vers une mesure positive bornée μ; ici encore, le résultat sera établi si on prouve que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de G telle que $\mu_n(\complement K) \leqq \varepsilon$ pour tout entier n. Raisonnons encore par l'absurde, en supposant qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour toute partie compacte K de G, il y ait un entier n pour lequel $\mu_n(\complement K) \geqq \alpha$. Soit V un

[1]) J'ignore si le résultat du th. 4 est vrai lorsqu'on y remplace les suites par des filtres bornés, G étant compact.

voisinage compact symétrique de l'élément neutre dans G, et soit f une fonction continue et $\geqq 0$, de support contenu dans l'intérieur de V, et telle que $\int f(x)dx = 1$. On peut définir par récurrence une suite croissante (U_k) d'ensembles ouverts relativement compacts, une suite d'ensembles compacts (H_k), une suite de fonctions uniformément continues (g_k), et deux suites strictement croissantes d'entiers (n_k), (m_k), de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

1. $V^2 \subset U_1$, U_{k+1} contient la réunion de $\overline{U}_k V$ et de $H_{k+1}V^3$, H_{k+1} ne rencontre pas $\overline{U}_k V^3$;

2. on a $\mu_{n_k}(H_k) \geqq \frac{\alpha}{2}$, et $\mu_q(\complement U_k) \leqq \frac{\alpha}{8}$ pour $q \leqq m_k$;

3. si L_k est la réunion des ensembles compacts $H_i V$ pour $i \leqq k$, $g_k = f * \varphi_{L_k}$;

4. on a $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$ pour tout k, et $| \mu_q(g_k) - \mu(g_k) | \leqq \frac{\alpha}{8}$ pour tout $q \geqq m_k$.

En effet, H_k, U_k, n_k et m_k étant supposés déterminés, soit W_k un voisinage compact de $\overline{U}_k$; on a $\mu_q(\complement W_k) \leqq \frac{\alpha}{8}$ pour $q \leqq m_k$; en vertu de l'hypothèse, on détermine un n_{k+1} tel que $\mu_{n_{k+1}}(\complement(W_k V^3)) \geqq \alpha$, puis une partie compacte H_{k+1} de $\complement(W_k V^3)$ telle que $\mu_{n_{k+1}}(H_{k+1}) \geqq \frac{\alpha}{2}$. On a nécessairement $n_{k+1} > m_k$; L_{k+1} est alors déterminé ainsi que g_{k+1}; on prend $m_{k+1} > n_{k+1}$ de sorte que $| \mu_q(g_{k+1}) - \mu(g_{k+1}) | \leqq \frac{\alpha}{8}$ pour tout $q \geqq m_{k+1}$; enfin, on prend pour U_{k+1} un voisinage compact de la réunion de $\overline{U}_k V$ et de $H_{k+1}V^3$, assez grand pour que $\mu_q(\complement U_{k+1}) \leqq \frac{\alpha}{8}$ pour tout $q \leqq m_{k+1}$.

Soit alors L la réunion des ensembles $H_k V$, et soit $g = f * \varphi_L$, fonction limite de la suite croissante des g_k; il est immédiat que g est uniformément continue dans G, que l'on a $0 \leqq g(x) \leqq 1$ dans G et $g(x) = 1$ dans tout ensemble H_k; en outre, dans $U_{k+1} - \overline{U}_k$, g est nulle hors de $H_{k+1}V^2$. On a alors, d'après les choix faits ci-dessus

$$\mu_{n_{k+1}}(g) \geqq \mu_{n_{k+1}}(g_{k+1}) \geqq \mu_{n_{k+1}}(g_k) + \mu_{n_{k+1}}(H_{k+1}) \geqq \mu(g_k) - \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{2}$$

et

$$\mu_{m_k}(g) \leqq \mu_{m_k}(g_k) + \mu_{m_k}(\complement U_k) \leqq \mu(g_k) + \frac{\alpha}{4}$$

d'où $\mu_{n_{k+1}}(g) - \mu_{m_k}(g) \geqq \frac{\alpha}{8}$, ce qui contredit l'hypothèse que la suite $(\mu_n(g))$ admet une limite finie.

13. A la notion de convergence dans Φ_I d'une suite (μ_n) de mesures bornées est enfin liée la notion de convergence simple, dans le dual $\hat{G}$ de G, de la suite des *transformées de Fourier*

$$\hat{\mu}_n(\hat{x}) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\mu_n(x)$$

de ces mesures; comme les caractères $\hat{x} \in \hat{G}$ sont uniformément continus sur G, il est clair que la convergence de (μ_n) vers une mesure bornée μ_0 dans Φ_I' (et a fortiori dans Φ_I) entraîne la convergence de $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ vers $\hat{\mu}_0(\hat{x})$ pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$. La réciproque est inexacte, même si la suite (μ_n) est formée de mesures *positives*, comme le montre l'exemple suivant, dû à A. Wintner [9, p. 21]: G est le groupe $\mathbf{R}$, μ_n est là mesure de densité $g_n(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, où $g_n(x) = x/n^2$ pour $0 \leqq x \leqq n$, et $g_n(x) = 0$ ailleurs; on voit aussitôt que cette suite de mesures viole la conclusion du lemme du n⁰ 2, donc ne peut converger dans Φ_I, ni même dans Φ_I' en raison du th. 6; pourtant, la suite des $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ converge pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, comme on le vérifie aussitôt.

Ce résultat négatif a une conséquence intéressante. Désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des transformées de Fourier des mesures bornées sur le groupe dual $\hat{G}$; on sait que $\mathfrak{B}$ est formé de fonctions uniformément continues dans G, combinaisons linéaires de fonctions continues de type positif [3, p. 90]; on a $\overline{\Phi}_0 \subset \overline{\mathfrak{B}} \subset \Phi_I'$ en désignant par $\overline{\mathfrak{B}}$ l'adhérence de $\mathfrak{B}$ pour la topologie de la convergence uniforme dans G (*loc. cit.*, p. 98). Il est facile de voir que $\overline{\Phi}_0 \neq \overline{\mathfrak{B}}$ si G n'est pas compact; en outre, l'exemple ci-dessus prouve que $\overline{\mathfrak{B}} \neq \Phi_I'$ en général. En effet, si une suite bornée (μ_n) de mesures bornées est telle que $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ converge vers une limite finie pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, la suite (μ_n) est convergente dans $\mathfrak{B}$ (et par suite dans $\overline{\mathfrak{B}}$); car, soit $f(x) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\lambda(\hat{x})$ une fonction de $\mathfrak{B}$; on a

$$\mu_n(f) = \iint \langle x, \hat{x} \rangle d\lambda(\hat{x}) d\mu_n(x) = \int \hat{\mu}_n(\hat{x}) d\lambda(\hat{x})$$

et en vertu du th. de Lebesgue, la suite $(\mu_n(f))$ tend vers une limite finie. Pour $G = \mathbf{R}$, il y a donc des fonctions uniformément continues qui n'appartiennent pas à $\overline{\mathfrak{B}}$.

14. Nous terminerons en généralisant à un groupe abélien localement compact quelconque G un critère de convergence dans Φ_I d'une suite de mesures bornées, critère qui fait intervenir les transformées de Fourier des mesures de la suite, et qui a été donné pour le cas $G = \mathbf{R}$ par A. Wintner [9, p. 24]:

THÉORÈME 7. *Soit (μ_n) une suite de mesures bornées et positives sur G, telle que pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, la suite $(\hat{\mu}_n(\hat{x}))$ ait une limite finie $\varphi(\hat{x})$, et que φ soit continue au voisinage de l'élément neutre de $\hat{G}$. Dans ces conditions, la suite (μ_n) converge dans Φ_I vers une mesure bornée μ_0, dont φ est la transformée de Fourier.*

La démonstration suivra la même marche que celle de A. Wintner (*loc. cit.*). En premier lieu, la suite (μ_n) est bornée, puisque $\hat{\mu}_n(\hat{e}) = \mu_n(G) = \| \mu_n \|$. Comme la suite (μ_n) est convergente dans $\overline{\mathfrak{B}}$, et a fortiori dans $\overline{\Phi}_0$, il suffit (prop. 3) de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte K de G telle que $\mu_n(\complement K) \leqq \leqq \varepsilon$ pour tout n. Par hypothèse, il existe un voisinage compact V de $\hat{e}$ dans $\hat{G}$ tel que $| \varphi(\hat{x}) - \varphi(\hat{e}) | \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $\hat{x} \in V$; l'ensemble H des $x \in G$ tels que $\Re(1 - \langle x, \hat{x} \rangle) \leqq \frac{1}{2}$ pour tout $\hat{x} \in V$ est un voisinage compact de e dans G [8, p. 100]. De la relation

$$\int \Re(1 - \langle x, \hat{x} \rangle) d\mu_n(x) = \Re(\hat{\mu}_n(\hat{e}) - \hat{\mu}_n(\hat{x}))$$

il suit donc, pour tout $\hat{x} \in V$ et tout entier n,

$$\tfrac{1}{2}\mu_n(\complement H) \leqq | \hat{\mu}_n(\hat{e}) - \hat{\mu}_n(\hat{x}) |$$

d'où, en intégrant dans V

$$\tfrac{1}{2}\mu_n(\complement H)\hat{m}(V) \leqq \int_V | \hat{\mu}_n(\hat{e}) - \hat{\mu}_n(\hat{x}) | \, d\hat{x}. \tag{2}$$

Mais en vertu du th. de Lebesgue, le second membre de cette inégalité tend vers $\int_V | \varphi(\hat{e}) - \varphi(\hat{x}) | \, d\hat{x} \leqq \frac{\varepsilon}{4} \hat{m}(V)$ lorsque n augmente indéfiniment; il existe donc n_0 tel que pour $n \geqq n_0$, le second membre de (2) soit $\leqq \frac{\varepsilon}{2} \hat{m}(V)$. On en déduit aussitôt la proposition, en prenant pour K la réunion de H et d'un ensemble compact L tel que $\mu_n(\complement L) \leqq \varepsilon$ pour $n \leqq n_0$.

Il importe de remarquer que le th. 7 ne s'étend pas au cas où les mesures μ_n ne sont pas supposées positives: par exemple, si $G = \mathbf{R}$, et si μ_n est la mesure définie par la masse $+ 1$ au point n, la masse $- 1$ au point $n + \frac{1}{n}$, la suite $(\hat{\mu}_n(\hat{x}))$ tend vers 0 pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, sans que la suite (μ_n) converge vers 0 dans Φ_I.

Notons aussi que si (μ_n) est une suite de mesures bornées telle que $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ tende vers une limite finie pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, la suite des normes $\| \mu_n \|$ n'est pas nécessairement bornée si les μ_n ne sont pas positives. C'est ce que montre l'exemple suivant: on prend $G = \mathbf{R}$, $d\mu_n(x) = g_n(x)dx$, où $g_n(x) = x/n^{3/2}$ pour $- n \leqq x \leqq n$,

$g_n(x) = 0$ ailleurs. On vérifie aisément que $\hat{\mu}_n(\hat{x})$ tend vers 0 pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, mais $\| \mu_n \| = \sqrt{n}$ tend vers $+ \infty$.

Appendice.

En relation avec les résultats précédents, l'intéressant problème réciproque suivant m'a été posé par H. C. Davis: *que peut-on dire de la convergence de (μ_n) vers μ lorsqu'on sait que, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, la suite $(\mu_n * f)$ converge vers $\mu * f$ suivant un certain mode?*

1. On peut évidemment se ramener au cas où $\mu = 0$. L'hypothèse la plus faible sur la suite $(\mu_n * f)$ est qu'elle converge vers 0 *dans* Φ_0; mais, de cette hypothèse, il ne résulte même pas que la suite des normes $\| \mu_n \|$ soit bornée. En effet, en vertu de la relation $(\mu * f)(\varphi) = \mu(\check{f} * \varphi)$, l'hypothèse signifie que la suite des $\mu_n(f * \varphi)$ tend vers 0 quels que soient $f \in L^1(G)$ et $\varphi \in \Phi_0$. Mais si on prend par exemple pour G le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers, l'hypothèse signifie seulement que $\mu_n(f)$ tend vers 0 pour toute fonction $f \in L^1(G)$; or, cette condition est vérifiée en particulier en prenant pour μ_n la mesure définie par la masse $+ 1$ en chacun des points x tels que $n \leqq x \leqq 2n$, ce qui donne $\| \mu_n \| = n$.

Toutefois, l'hypothèse faite ci-dessus entraîne que la suite (μ_n) converge vers 0 *dans* Φ_0. Il suffit pour le voir de montrer que, pour tout ensemble compact K, les restrictions λ_n des μ_n à K sont telles que la suite des normes $\| \lambda_n \|$ soit bornée; la propriété en résultera, compte tenu du fait que toute fonction $\varphi \in \Phi_0$, dont le support est contenu dans un ensemble ouvert relativement compact U, peut être approchée uniformément par des produits de composition $\varphi * \psi$ de fonctions de Φ_0, de support contenu dans U. Or, soit V un voisinage symétrique compact de 0, et soit ν_n la restriction de μ_n à VK; si $f \in L^1(G)$ a son support dans V, on a $\mu_n(\check{f} * \varphi) = = \nu_n(\check{f} * \varphi) = (\nu_n * f)(\varphi)$ pour toute fonction $\varphi * \Phi_0$ de support contenu dans K. Désignons par $u_n(f)$ la restriction à K de la fonction intégrable $\nu_n * f$; l'hypothèse entraîne, en vertu du th. de Banach-Steinhaus, appliqué à l'espace des fonctions continues à support dans K, qu'il existe un nombre $a(f)$ indépendant de n, tel que $N_1(u_n(f)) \leqq a(f)$ pour tout indice n. Or, $f \to u_n(f)$ est évidemment une application linéaire continue de $L^1(V)$ dans $L^1(K)$, puisque $N_1(u_n(f)) \leqq N_1(\nu_n * f) \leqq \| \nu_n \| N_1(f)$; appliquant cette fois le théorème de Banach-Steinhaus à l'espace $L^1(V)$, on voit qu'il existe une constante b telle que $\| u_n \| \leqq b$ pour tout entier n. Or, pour tout n fixe, on peut trouver une fonction $\varphi_n \in \Phi_0$, de support contenu dans K, telle que $\| \varphi_n \| \leqq 1$ et que $\nu_n(\varphi_n)$ soit arbitrairement voisin de $| \nu_n | (K) = \| \lambda_n \|$; et d'autre part, on peut trouver $f_n \in \Phi_0$, de support contenu dans V, tel que $N_1(f_n) = 1$ et que $\nu_n(\check{f}_n * \varphi_n)$ soit arbitrairement voisin de $\nu_n(\varphi_n)$, donc de $\|\lambda_n\|$. Comme $|\nu_n(\check{f}_n * \varphi_n)| = |(\nu_n * f_n)(\varphi_n)| \leqq N_1(u_n(f_n)) \leqq b$, on en conclut que $\|\lambda_n\| \leqq b$ pour tout n, ce qui démontre notre assertion.

2. Supposons maintenant que, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, la suite $(\mu_n * f)$ converge vers 0 *dans* $\overline{\Phi}_0$. Nous allons voir alors que la suite (μ_n) converge aussi vers 0 *dans* $\overline{\Phi}_0$. En effet, le th. de Banach-Steinhaus appliqué à l'espace $\overline{\Phi}_0$, montre tout d'abord que pour toute $f \in L^1(G)$, il existe un nombre $a(f)$ indépendant de n, tel que $N_1(\mu_n * f) \leqq a(f)$ pour tout n. Si on pose $v_n(f) = \nu_n * f$, v_n est une application linéaire continue de l'espace de Banach $L^1(G)$ dans lui-même, et le th. de Banach-Steinhaus appliqué à $L^1(G)$ montre qu'il existe une constante b telle que $\|v_n\| \leqq b$ pour tout n. Mais on voit comme au n° 1 que $\|v_n\| = \|\mu_n\|$; comme on sait déjà que la suite (μ_n) converge vers 0 dans Φ_0, elle converge aussi dans $\overline{\Phi}_0$.

3. Considérons enfin le cas où, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, la suite $(\mu_n * f)$ converge vers 0 *dans* Φ'_I; alors, il en est de même de la suite (μ_n). Il suffit pour le voir de remarquer que toute fonction $g \in \Phi'_I$ peut être approchée *uniformément dans* G par des produits de composition $f * g$, où $f \in \Phi_0$ a un support arbitrairement petit et $N_1(f) = 1$ (n° 8). Comme la suite des normes $\|\mu_n\|$ est bornée, pour que (μ_n) converge vers 0 dans Φ'_I, il suffit donc qu'elle converge vers 0 dans l'ensemble des fonctions de la forme $f * g$, où $g \in \Phi'_I$ et $f \in \Phi_0$; mais en raison de la relation $\mu_n(f * g) = (\mu_n * \check{f})(g)$, cela est impliqué par l'hypothèse.

Ce résultat, joint au th. 5, prouve que, si pour *toute* fonction $f \in \Phi_0$, la suite $(\mu_n * f)$ tend vers 0 dans Φ'_I, alors, pour toute fonction $f \in L^1(G)$, la suite $(\mu_n * f)$ tend *fortement* vers 0. Mais on observera que cette dernière condition, inversement, n'implique pas, pour la suite (μ_n), un mode de convergence plus strict que la convergence dans Φ'_I. Par exemple, soit μ_n la mesure définie dans **R** par la masse $+1$ au point n et la masse -1 au point $n + \dfrac{1}{n}$; la suite (μ_n) ne converge pas vers 0 dans Φ_I, mais pour toute fonction $f \in L^1(G)$, on a $(\mu_n * f)(x) = f(x+n) - f\left(x + n + \dfrac{1}{n}\right)$, et on sait que l'intégrale

$$\int \left| f(x+n) - f\left(x + n + \frac{1}{n}\right) \right| dx = \int \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| dx$$

tend vers 0 avec $1/n$.

BIBLIOGRAPHIE

N. Bourbaki

[1] Eléments de Mathématique, Topologie générale, chap. I—II, 2e éd. (Actual, Scient. et Ind., n⁰ 858—1142, Paris, Hermann, 1951).

[2] Eléments de Mathématique, Intégration, chap. I—IV (Actual Scient. et Ind. n⁰ 1175, Paris (Hermann), 1952).

H. Cartan et R. Godement

[3] Théorie de la dualité et analyse harmonique, dans les groupes abéliens localement compacts (Ann. Ec. Norm. Sup., 64 (1947) p. 79—99).

J. Dieudonné

[4] Sur les espaces uniformes complets (Ann. Ec. Norm. Sup., 56 (1939), p. 277—291).

[5] Sur les espaces de Köthe (Journ. d'Anal. Math., 1 (1951), p. 81—115).

[6] Sur la convergence des suites de mesures de Radon (Anais da Acad. Bras. de Ciencias, 23 (1951), p. 21—38).

I. Schur

[7] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen (Journ. de Crelle 151 (1921) p. 79—111).

A. Weil

[8] L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (Actual. Scient. et Ind., n⁰ 869, Paris, Hermann, 1940).

A. Wintner

[9] The Fourier transforms of Probability Distributions, Baltimore, 1947.

Universidade do Brasil.

(Oblatum 7-11-52).