

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

M. BOUTET DE MONVEL

Opérateurs elliptiques

Cours de l'institut Fourier, tome 11 (1975-1976)

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1975-1976__11__1_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

J'ai essentiellement repris le rapport , en détaillant les démonstrations qui n'y étaient qu'esquissées . Les §1.4 , 3.7 , 4.5 et 4.6 ne figuraient pas dans le rapport (4.6 n'est pas en forme) ; en revanche je n'ai pas repris le §5 du rapport . Il faudrait rajouter (au §4.1) un théorème de dualité entre homologies de D et tD (que j'ai oublié) . Je n'ai pas démontré la régularité analytique des solutions d'une équation elliptique à coefficients analytiques ; c'est un résultat important , mais qui coute plus cher (voir rapport dans le cas des opérateurs à coefficients constants)

Je n'ai pas eu le courage de faire le point sur ce dont on a besoin de théorie des distributions ; c'est assez peu de toute façon , et avec quelques galipettes , on pourrait peut-être s'en passer complètement . Il faut en tout cas la définition , la réflexivité , la correspondance noyau opérateur (on n'a pas besoin de la réciproque (th. de Schwartz) car tous les opérateurs introduits ont un noyau , défini par une intégrale oscillante); on n'a pas besoin de la nucléarité ; elle est plutôt avantageusement remplacée par des considérations sur la décroissance rapide de la transformée de Fourier , qui équivalent à la nucléarité , et sont utiles de toute façon . Il faut évidemment la définition de la transformation de Fourier , dans les espaces \mathcal{S}' et \mathcal{S} de Schwartz ; aussi la formule de réciprocity (qui ne couterait pas cher au §2) - en tout cas , sauf \mathcal{S}' et \mathcal{S} , il y a tout ce qu'il faut dans TS .

La preuve présentée au §3.2 est un peu artificielle ; une autre preuve , plus systématique , repose sur la méthode de la phase stationnaire , qui permet de prouver qu'une expression de la forme $e^{ix \cdot y} a(x-y, +) dy d$ est une amplitude , et d'en trouver un développement asymptotique . Quoiqu'un peu plus lourde , c'est la méthode qui s'adapte immédiatement pour l'étude des opérateurs de Hörmander .

Enfin j'ai introduit une classe un peu plus restreinte d'amplitudes , avec laquelle le symbole est plus facile à définir et à manier que dans le rapport .

§0 Notations et préliminaires

1. L'espace numérique R^n sera toujours muni de sa structure euclidienne et de sa mesure de Lebesgue canoniques. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs, le produit scalaire et la norme sont notés

$$x \cdot y = \sum x_j y_j$$

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} .$$

La mesure de Lebesgue, notée dx , est l'unique mesure invariante par translation qui charge de la masse 1 le cube unité $[0,1]^n$.

Un multi-indice est une suite $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers positifs (le nombre n sera toujours clair d'après le contexte, et nous ne l'inclurons pas dans la notation). Si α est un multi-indice, et x un vecteur de R^n , on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$$

de sorte que, par exemple, si f est une fonction de classe C^N sur R^n , la formule de Taylor s'écrit

$$f(y) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (\partial/\partial x)^\alpha f(x) (y-x)^\alpha + o(|y-x|^N)$$

2. Distributions

Soit X un ouvert de R^n . On note $C^\infty(X)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur X . On le munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées, qui en fait un espace de Fréchet (nucléaire). Si (X_k) est une suite croissante de parties compactes de X dont les intérieurs recouvrent X (par exemple : X_k est l'ensemble des $x \in X$

tels que $|x| \leq k$, et que la distance de x à la frontière de X soit $\geq 1/k$, les seminormes

$$p_k(f) = \sup_{\substack{|x| \leq k \\ x \in X_k}} |(\partial/\partial x)^k f(x)|$$

forment une suite fondamentale de seminormes.

Rappelons que $X \mapsto C^\infty(X)$ est un faisceau de fonctions sur R^n . Si $f \in C^\infty(X)$, le support de f est le plus petit fermé $\text{supp } f$ en dehors duquel f est nulle.

On note $C_0^\infty(X)$ le sous-espace des fonctions à support compact de $C^\infty(X)$. On le munit de la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application de multiplication $f \mapsto fg$ est continue : $C^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(X)$ pour toute $g \in C_0^\infty(X)$ (c'est encore un espace nucléaire, mais ce n'est plus un Fréchet).

$C^{-\infty}(X)$ désigne le dual de $C_0^\infty(X)$; ses éléments sont les fonctions généralisées, ou distributions. On identifie $C^\infty(X)$ à un sous-espace de $C^{-\infty}(X)$ par l'application qui à $f \in C^\infty(X)$ associe la forme linéaire sur $C_0^\infty(X)$:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

Si U est un ouvert de X , on a une application de restriction canonique : $C^{-\infty}(X) \rightarrow C^{-\infty}(U)$, qui à $f \in C^{-\infty}(X)$ associe la restriction de f à $C_0^\infty(U) \subset C_0^\infty(X)$. Rappelons que $U \mapsto C^{-\infty}(U)$ est un faisceau (d'espaces vectoriels) sur R^n . Si $f \in C^{-\infty}(X)$, le support de f est le plus petit fermé $\text{supp } f$ tel que la restriction de f au complémentaire de $\text{supp } f$ soit nulle.

$C_0^{-\infty}(X)$ désigne le sous-espace des distributions à support compact de $C^{-\infty}(X)$; il s'identifie au dual de $C^\infty(X)$.

(On munit habituellement $C^{-\infty}(X)$ et $C_0^{-\infty}(X)$ de la topologie forte, qui coïncide avec la topologie de Mackey car les parties bornées de $C^\infty(X)$ ou de $C_0^\infty(X)$ sont compactes; les quatre espaces $C^\infty(X)$, $C_0^\infty(X)$, $C^{-\infty}(X)$, $C_0^{-\infty}(X)$ sont réflexifs).

3. Transformation de Fourier

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n telles que pour tous multi-indices α, β , $x^\alpha (\partial/\partial x)^\beta f$ soit bornée (f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées). On le munit de la topologie définie par la suite de semi-normes

$$p_k(f) = \sup_{\substack{|\alpha+\beta| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^n}} |x^\alpha (\partial/\partial x)^\beta f(x)|$$

qui en fait un espace de Fréchet (nucléaire)

$\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)$ désigne le dual fort de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *den = distributions*

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier \hat{f} de f est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad -2i\pi$$

La transformation de Fourier est un automorphisme de \mathcal{L} et se prolonge continument en un automorphisme de \mathcal{L}' . L'isomorphisme inverse est donné par la formule

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

valable par exemple si \hat{f} est intégrable et f continue.

Plus généralement, si X est un ouvert de \mathbb{R}^m , on note $S^{(\infty)}(X \times \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ sur $X \times \mathbb{R}^n$ telles que pour tout compact $K \subset X$ et tous multi-indices α, β, γ , $(\partial/\partial x)^\alpha y^\beta (\partial/\partial y)^\gamma f$ soit bornée sur $K \times \mathbb{R}^n$. La transformation de Fourier partielle :

$$f \mapsto \hat{f}(x, \eta) = \int e^{-iy \cdot \eta} f(x, y) dy$$

est un automorphisme de $S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Rappelons enfin que si f est une distribution à support compact sur \mathbb{R}^n , f est tempérée ; \hat{f} est une fonction C^∞ (qui se prolonge en une fonction analytique entière) donnée par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \langle f | e^{ix \cdot \xi} \rangle$$

\hat{f} et chacune de ses dérivées est dominée par une puissance de $(1 + |\xi|)$.

4. Notations concernant les variétés

de dimension finie

Toutes les variétés seront supposées séparées, dénombrables à l'infini, et de classe C^∞ . Les fibrés vectoriels sont aussi supposés C^∞ (et la dimension de la fibre finie !)

Si X est une variété, TX désigne son fibré tangent, et T^*X son fibré cotangent. $C^\infty(X)$ est l'espace des fonctions numériques (à valeurs complexes) sur X ; c'est un espace de Fréchet (comme il devrait résulter de VAR §2 n°3). $C_0^\infty(X)$ est le sous-espace des fonctions C^∞ à support compact, et sa topologie est définie comme au n°2. Plus généralement, si E est un fibré vectoriel sur X , $C^\infty(X, E)$ est l'espace de Fréchet des sections C^∞ de E , et $C_0^\infty(X, E)$ le sous-espace des sections C^∞ à support compact (sa topologie est à nouveau définie comme au n°2).

$C_0^\infty(X)$ et $C^\infty(X)$ ne sont pas canoniquement en dualité, car la dualité définie par la mesure de Lebesgue au n°2 n'est pas invariante par changement de coordonnées. On note Ω le fibré vectoriel réel dont les sections sont les formes tordues de degré maximum sur X ; $C_0^\infty(X, \Omega)$ s'identifie donc à l'espace des mesures à support compact et de densité C^∞ sur X , et est de façon canonique en dualité avec $C^\infty(X)$. Enfin $C^{-\infty}(X)$ désigne le dual de $C_0^\infty(X, \Omega)$, de sorte que $C^\infty(X)$ s'identifie à un sous espace de $C^{-\infty}(X)$; plus généralement si E est un fibré vectoriel sur X , on note $C^{-\infty}(X, E)$ le dual de $C_0^\infty(X, E \otimes \Omega)$ (où E' désigne le dual de E); $C^\infty(X, E)$ s'identifie canoniquement à un sous espace de $C^{-\infty}(X, E)$. Les éléments de $C^{-\infty}(X, E)$ sont les sections généralisées, ou sections à coefficients distributions, de E . $C_0^{-\infty}(X)$, resp. $C_0^{-\infty}(X, E)$ désigne le sous espace de $C^{-\infty}(X)$, resp. $C^{-\infty}(X, E)$, des sections généralisées à support compact; il s'identifie au dual de $C^\infty(X, \Omega)$, resp. $C^\infty(X, E \otimes \Omega)$.

On dit qu'un sous-espace $L \subset C^{-\infty}(X)$ est localisable si on a $\varphi \cdot L \subset L$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$. On note alors $L_{loc} \subset C^{-\infty}(X)$ l'ensemble des distributions $f \in C^{-\infty}(X)$ telles que $\varphi f \in L$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$, et L_{comp} l'ensemble des distributions à support compact de L ou L_{loc} . Plus généralement si E est un fibré vectoriel sur X , on pose $L_{loc}(X, E) = L_{loc} \cdot C^\infty(X, E) \subset C^{-\infty}(X, E)$; ses éléments sont les sections à coefficients dans L_{loc} de E .

5. Opérateurs pseudo-différentiels - préliminaires

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit A un opérateur linéaire continu : $C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, posons

$a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{ix \cdot \xi})$ (e^{ix \cdot \xi} étant considéré comme élément de $C^\infty(X)$).
Handwritten notes: d'un op. V / choisir une base quelcon. (la base) mais par convention. A_y(e^{ix \cdot \xi})

Si $f \in C_0^\infty(X) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, \hat{f} est bien définie et on a

$f = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$ $f = \int_{\mathbb{R}^n} \xi_\xi \hat{f}(\xi) d\xi$

L'intégrale peut être considérée comme intégrale convergente à valeurs dans $C^\infty(X)$. Par linéarité et continuité on a donc

$Af = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} A(e^{ix \cdot \xi}) \hat{f}(\xi) d\xi$ $f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$

La fonction $a(x, \xi)$ est une fonction C^∞ sur $X \times \mathbb{R}^n$ (parce que $\xi \rightarrow e^{ix \cdot \xi}$ est une application $C^\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow C^\infty(X)$). Elle jouit en outre de la propriété suivante :

(0.1) Pour tout compact $K \subset X$ il existe des nombres positifs C et N tels qu'on ait

$|a(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^N$ pour $x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n$.

En effet comme A est un opérateur linéaire continu, $p(f) = \sup_{x \in K} |Af(x)|$ est une seminorme continue sur $C^\infty(X)$, il existe un compact $L \subset X$ et des nombres c, N tels que pour $f \in C^\infty(X)$ on ait

$p(f) \leq c \sup_{|k| \leq N, x \in L} |(\partial/\partial x)^k f(x)|$

On a donc, avec une constante C convenable : $p(e^{ix \cdot \xi}) \leq C(1 + |\xi|)^N$ puisque $(\partial/\partial x)^k e^{ix \cdot \xi} = (i\xi)^k e^{ix \cdot \xi}$, et $e^{ix \cdot \xi}$ est de module 1. L'assertion (0.1) en résulte aussitôt.

Chaque dérivée de $a(x, \xi)$ vérifie encore (0.1) ; cela résulte par récurrence du fait que $\partial a/\partial x_j$ (resp. $\partial a/\partial \xi_j$) correspond au commutateur $[\partial/\partial x_j, A]$ (resp. $-i[x_j, A]$), puisqu'on a

$\partial a/\partial x_j = e^{-ix \cdot \xi} (-i\xi_j A(e^{ix \cdot \xi}) + (\partial/\partial x_j)A(e^{ix \cdot \xi}))$
et $i\xi_j e^{ix \cdot \xi} = (\partial/\partial x_j) e^{ix \cdot \xi}$ (resp. calcul analogue)

Inversement si $a(x, \xi)$ est une fonction continue sur $X \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie (0.1), on lui associe un opérateur $A = a(x, D)$ défini par

$$(0.2) \quad a(x, D) f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad \text{si } f \in C_0^\infty(X)$$

C'est un opérateur continu : $C_0^\infty(X) \rightarrow C(X)$; il est continu $C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ si chaque dérivée de a par rapport à x vérifie (0.1) ; il se prolonge en un opérateur continu : $C_0^{-\alpha}(X) \rightarrow C^\alpha(X)$ si $a \in S^{-\alpha}(X \times \mathbb{R}^n)$ (avec la notation du n°3)

Si S est un ensemble de fonctions vérifiant (0.1), on notera OPS l'ensemble des opérateurs $a(x, D)$ pour $a \in S$. Ainsi si S est l'ensemble des polynômes de ξ à coefficients fonctions C^∞ de x , OPS est l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ (car il résulte de la formule de réciprocity de Fourier qu'on a $a(x, D) = \text{Id}$ si $a = 1$, d'où, en dérivant sous le signe $a(x, D) = \left(1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ si $a = \xi^\alpha$).

Nous appellerons amplitudes les fonctions satisfaisant à (0.1). Les opérateurs pseudo-différentiels correspondent aux amplitudes décrites au §1. Pour l'étude des opérateurs elliptiques, on n'a pas besoin d'autres amplitudes que celles du §1 ; pour d'autres problèmes, il peut être utile au contraire d'introduire des ensembles d'amplitudes plus grands (par exemple pour étudier les opérateurs hypo-elliptiques), ou plus petits (par exemple pour étudier l'analyticité des solutions d'une équation aux dérivées partielles).

En pratique il sera commode de reporter dans la formule (0.2) la définition de la transformée de Fourier de f :

$$(0.2)\text{bis} \quad Af(x) = \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) f(y) dy d\xi$$

où pour l'instant l'intégrale est définie en intégrant d'abord par rapport à y , puis par rapport à ξ . On peut alors généraliser en remplaçant la fonction $a(x, \xi)$ par une fonction convenable $a(x, y, \xi)$ sur $X \times X \times \mathbb{R}^n$. Comme on verra, ceci n'introduit pas vraiment d'opérateurs nouveaux, mais donne une grande souplesse dans le maniement des opérateurs pseudo-différentiels.

Le §2 donne une présentation systématique d'intégrales telles que (0.2)bis, qui en rend l'utilisation très commode.

§1 Amplitudes

1. Définitions

hauteur d'un cône
*quelque nombre d'éléments de \mathbb{R}_+^**

On appelle cône C^∞ tout fibré principal C^∞ (séparé, dénombrable à l'infini) de groupe \mathbb{R}_+^* (groupe multiplicatif des nombres réels positifs).

Soit U un cône. La base de U est la variété $X = U/\mathbb{R}_+^*$. U est isomorphe au cône trivial $X \times \mathbb{R}_+^*$; se donner un isomorphisme de U sur $X \times \mathbb{R}_+^*$ revient à se donner une fonction $r : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (la deuxième projection) homogène de degré 1 ($r(\lambda u) = \lambda r(u)$ pour $\lambda > 0$) (de telles fonctions existent localement, donc aussi globalement comme on voit en utilisant une partition de l'unité sur X).

soit $m \in \mathbb{R}$
(1.1) Définition. - On note $S^m(U)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(U)$ telles que, avec $a_\lambda(u) = a(\lambda u)$, l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geq 1$, soit borné dans $C^\infty(U)$.

(1.1)bis Si X est une variété, E un fibré vectoriel réel sur X , on notera aussi $S^m(E)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(E)$ dont la restriction au cône $E - \{0\}$ appartient à S^m ($\{0\}$ désigne par abus la section nulle de E): on impose donc en plus que a soit C^∞ au voisinage de la section nulle.

(1.2) Plus généralement, si U est un cône, et E un \mathbb{R}_+^* -fibré vectoriel sur U , $S^m(U, E)$ désigne l'ensemble des sections C^∞ a de E telles que l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geq 1$, soit borné dans $C^\infty(U, E)$ (où on a posé $a_\lambda(u) = H_\lambda^{-1} a(\lambda u)$, $H_\lambda v$ désignant le résultat de l'opération définie par $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ sur $v \in E$)

(1.3) Exemple: on dit qu'une fonction numérique a sur U est homogène de degré m si on a $a(\lambda u) = \lambda^m a(u)$. Si a est somme finie de fonctions homogènes de degré $\leq m$, on a $a \in S^m(U)$

On munit $S^m(U)$ de la topologie définie comme suit: si (p_k) est une suite fondamentale de semi-normes de $C^\infty(U)$, la suite (P_k) définie par

$$P_k(a) = \sup_{\lambda \geq 1} \lambda^{-m} p_k(a_\lambda)$$

est une suite fondamentale de seminormes de $S^m(U)$.

(1.4) Proposition. - $S^m(U)$ est un espace de Fréchet .

Tout d'abord $S^m(U)$ est métrisable puisque sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes (EVT ^{1.2}), et que l'inclusion $S^m(U) \subset C^\infty(U)$ est continue, donc $S^m(U)$ est séparé . *ce sous-espace est complet*

Remarquons maintenant que si p est une semi-norme continue sur $C(U)$, et $T \geq 1$, la seminorme

$$p^T(f) = \sup_{1 \leq \lambda \leq T} \lambda^{-m} p(f_\lambda)$$

est continue sur $C^\infty(U)$ (l'ensemble des homothéties de rapport λ , $1 \leq \lambda \leq T$ est un ensemble compact de difféomorphismes de U).

Soit alors (a_j) une suite de Cauchy de $S^m(U)$. Alors pour tout k la suite $\lambda^{-m} p_k((a_i - a_j)_\lambda)$ tend vers 0 pour $i, j \rightarrow \infty$, uniformément pour $\lambda \geq 1$. Faisant $\lambda = 1$, on voit que (a_j) est une suite de Cauchy de $C^\infty(U)$, donc (a_j) tend vers une limite $a \in C^\infty(U)$ pour $j \rightarrow \infty$. En outre pour tout k $\lambda^{-m} p_k((a_j)_\lambda)$ est uniformément borné pour $j \geq 1$, $\lambda \geq 1$; à la limite on voit que $\lambda^{-m} p_k(a_\lambda)$ est borné pour $\lambda \geq 1$, d'où $a \in S^m(U)$. Enfin, toujours en passant à la limite, on voit que $\lambda^{-m} p_k((a_j - a)_\lambda)$ tend vers 0 pour $j \rightarrow \infty$, uniformément pour $\lambda \geq 1$, donc (a_j) tend vers a dans $S^m(U)$. $S^m(U)$ est donc complet, et ceci prouve la proposition.

(1.5) On a évidemment $S^m \subset S^{m'}$ si $m \leq m'$. *conséquence de la proposition 1.4*

$$S^{-\infty}(U) = \bigcap S^m(U)$$
$$S^\infty(U) = \bigcup S^m(U)$$

(la notation $S^{-\infty}$ est cohérente avec celle du §0, n°3)
 $S^{-\infty}$ est muni de la topologie limite projective, qui en fait un espace de Fréchet; S^∞ est muni de la topologie limite inductive (ce n'est pas un espace de Fréchet); dire qu'une application linéaire de S^∞ dans un espace localement convexe est continue revient donc à dire que sa restriction à S^m est continue pour tout m .

Soit P un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur U . On dit que P est homogène de degré k (par rapport aux homothéties) si on a $P(a)_\lambda = \lambda^k P(a_\lambda)$ pour toute $a \in C^\infty(U)$. Ainsi sur le cône $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ les opérateurs homogènes de degré k sont les opérateurs de

la forme

$$P = \sum_{r+j} a_{\alpha, j} (\partial/\partial x)^\alpha (\partial/\partial r)^j$$

où les coefficients $a_{\alpha, j}$ sont C^∞ , ^{indépendants} homogènes de degré Q .

(1.6) Proposition. - Si P est un opérateur différentiel à coefficients C^∞ , homogène de degré k sur U , P ~~est~~ continu: $S^m(U) \rightarrow S^{m+k}(U)$

Cela résulte immédiatement du fait qu'on a $\lambda^{-m-k} P(a)_\lambda = P(\lambda^{-m} a_\lambda)$

(1.7) Proposition. - Le produit $(a, b) \mapsto ab$ ~~est~~ bilinéaire continu: $S^m \times S^{m'} \rightarrow S^{m+m'}$.

Cela résulte aussitôt de ce qu'on a $\lambda^{-m-m'} (ab)_\lambda = (\lambda^{-m} a_\lambda)(\lambda^{-m'} b_\lambda)$

(1.8) Proposition. - Soit $F : U \rightarrow U'$ un morphisme de cônes (ie. F est C^∞ , et $F(\lambda u) = \lambda F(u)$ pour $\lambda > 0$). Alors la composition $a \mapsto a \circ F$ est continue: $S^m(U') \rightarrow S^m(U)$.

Cela résulte du fait que la composition $a \mapsto a \circ F$ est continue $C^\infty(U') \rightarrow C^\infty(U)$ et qu'on a $(a \circ F)_\lambda = a_{\lambda \circ F}$.

(1.9) Proposition. - Soit G une fonction $C^\infty \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors la composition $a \mapsto G \circ a$ est continue (non linéaire): $S^0 \rightarrow S^0$.

En effet la composition $a \mapsto G \circ a$ est continue dans $C^\infty(U)$, et on a $(G \circ a)_\lambda = G \circ a_\lambda$. Plus généralement si $a \in S^0$, et si G est définie et C^∞ au voisinage de l'adhérence de l'image de a , on a $G \circ a \in S^0$, car il existe une fonction $C^\infty G_1$ définie dans \mathbb{C} entier, qui coïncide avec G sur l'image de a . Ainsi si $a \in S^0$ et si on a $|a| \geq \varepsilon > 0$, on a $1/a \in S^0$.

2. Approximations

(1.10) Soit U un cône, (~~qu'on identifie à $X \times \mathbb{R}_+$ au moyen d'une fonction $r > 0$, C^∞ , homogène de degré 1~~). On dit qu'une partie V de U est voisinage de l'infini si elle contient une partie ouverte V' telle que pour tout $u \in U$ il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda u \in V'$ pour $\lambda > \lambda_0$ de façon équivalente: il existe une fonction $c > 0$, continue et homogène de degré 0 telle que $r(u) > c(u)$ implique $u \in V$.

Nous dirons qu'une partie V de U est saturée si on a $\lambda V \subset V$ pour $\lambda \geq 1$. Si V est un ouvert saturé de U , on note encore $S^m(V)$ l'espace des fonctions $a \in C^\infty(V)$ telles que l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda|_V$ soit borné dans $C^\infty(V)$. Par abus de langage nous dirons qu'une fonction a est de classe S^m au voisinage de l'infini s'il existe un voisinage ouvert saturé de l'infini V tel que a soit défini dans V et qu'on ait $a|_V \in S^m(V)$.

Soit V un voisinage ouvert de l'infini, saturé. Il existe une fonction $\chi \in C^\infty(U)$ nulle au voisinage de $[V$, et égale à 1 au voisinage de l'infini. On a alors $\chi \in S^0(U)$, et si $a \in S^m(V)$, la fonction a' qui est égale à χa dans V , et à 0 hors de V , appartient à $S^m(U)$. Ainsi si a est de classe S^m au voisinage de l'infini, il existe une fonction $a' \in S^m(U)$ qui coïncide avec a au voisinage de l'infini.

(Remarquons que si $a \in C^\infty(U)$, on a $a \in S^m(U)$ si et seulement si la restriction de a à V est de classe S^m , ^{où} si V est n'importe quel voisinage de l'infini, ~~ouvert et saturé~~, la condition $a \in S^m$ dépend uniquement du comportement de a à l'infini).

Soient f et g deux fonctions continues sur U . Nous dirons que f domine g au voisinage de l'infini et nous écrirons

$$(1.11) \quad g \lesssim f$$

si pour tout cône $U' \subset U$ de base compacte, il existe un nombre $C > 0$ tel que $g \leq Cf$ au voisinage de l'infini dans U' .

Par exemple si $a \in S^m(U)$, on a toujours $|a| \lesssim r^m$.

(1.12) Exemple. - On dit qu'une ^{fonction} amplitude $a \in S^m(U)$ est elliptique de degré m si on a $r^m \lesssim |a|$. Alors $1/a$ est de classe S^{-m} au voisinage de l'infini. (il y a alors l'ordre m de la part de a)

En effet il est immédiat que $r^{-m}a$ est elliptique de degré 0 si a est elliptique de degré m , et il suffit donc de prouver l'assertion pour $m = 0$. Dans ce cas, pour tout cône $U' \subset U$ ouvert de base relativement compacte, il existe un voisinage ouvert saturé de l'infini V dans U' et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $|a| \geq \varepsilon$ dans V . On a alors $1/a \in S^0(V)$ en vertu de la proposition (1.9) et de la remarque qui suit la démonstration de cette proposition.

En particulier un polynôme

$$a = \sum_0^m a_j r^j$$

où les a_j sont C^∞ , homogènes de degré 0, est elliptique de degré m si et seulement si a_m ne s'annule pas (est inversible); ~~est~~ $1/a$ est alors de classe S^{-m} , elliptique, au voisinage de l'infini.

(1.13) Une partie B de $S^m(U)$ est bornée si l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geq 1$, $a \in B$, est borné dans $C^\infty(U)$ (ceci est une condition nécessaire et suffisante pour que, avec les notations de (1.4), les semi-normes $\lambda^{-m} P_k(a_\lambda)$ soient uniformément bornées pour $\lambda \geq 1$ et $a \in B$, donc que les seminormes $P_k(a)$ soient uniformément bornées pour $a \in B$).

Proposition. - Soit B une partie de $S^m(U)$. On suppose que $\lambda^{-m} a_\lambda$ tend vers 0 / dans $C^\infty(U)$, uniformément pour $a \in B$. Alors B est relativement compacte dans $S^m(U)$, et sur B la topologie de la convergence simple, ou de C^∞ , coïncide avec celle de S^m .

En particulier une partie bornée de $S^{m'}$ est relativement compacte dans S^m si $m' \leq m$.

(La condition de la proposition n'est évidemment pas nécessaire pour que B soit compacte : elle n'est pas vérifiée pour la partie d'un élément : $\{r\} \subset S^1$)

Si B satisfait à la condition de la proposition, B est bornée donc précompacte dans C^∞ (rappelons que les parties fermées bornées de C^∞ sont compactes ; cela résulte du théorème d'Ascoli). Il suffit donc de montrer que les structures uniformes de C^∞ et de S^m induisent la même structure uniforme sur B . Or soit p une semi-norme continue sur C^∞ . Nous avons vu que la semi-norme

$$p^T(f) = \sup_{1 \leq \lambda \leq T} \lambda^{-m} p(f_\lambda)$$

est continue sur C^∞ pour tout $T \geq 1$ (cf.(1.4)). Il résulte de l'hypothèse faite sur B que pour tout $\xi > 0$, il existe $T \geq 1$ tel que pour $a \in B$ et $\lambda \geq T$ on ait $\lambda^{-m} p(a_\lambda) \leq \xi/2$. Alors pour tous $a, b \in B$, $p^T(a-b) \leq \xi$ implique $\sup_{\lambda \geq 1} \lambda^{-m} p((a-b)_\lambda) \leq \xi$. Ainsi, avec les notations de (1.4), les écarts¹ définis par les semi-normes p_k^T ($T \geq 1$, $k=1,2,\dots$) et les écarts définis par les semi-normes P_k définissent la même structure uniforme sur B . Ceci achève la démonstration.

(1.14) Lemme. - Soit $\chi \in C^\infty(U)$ une fonction nulle au voisinage de 0, égale à 1 au voisinage de l'infini. Posons $\chi_\lambda(u) = \chi(\lambda u)$.

(i) l'ensemble des $1 - \chi_\lambda$, $\lambda \in R_+$, est borné dans $S^0(U)$

(ii) l'ensemble des $\lambda^{-m} \chi_\lambda$, $\lambda \in R_+$, est borné dans $S^m(U)$ si $m \geq 0$.

En effet comme on a $\lambda^{-m}(\mu^{-m} \chi_\mu)_\lambda = (\lambda\mu)^{-m} \chi_{\lambda\mu}$, il suffit de prouver que pour $m \geq 0$, l'ensemble des $\lambda^{-m} \chi_\lambda$, $\lambda \in R_+$, est borné dans $C^\infty(U)$ (alors l'ensemble des $1 - \chi_\lambda$ est aussi borné dans $C^\infty(U)$ et dans $S^0(U)$). Or χ_λ tend vers 1 dans $C^\infty(U)$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$, donc l'ensemble des $\lambda^{-m} \chi_\lambda$, $\lambda \geq 1$, est borné dans $C^\infty(U)$ si $m \leq 0$. D'autre part, puisque χ est nulle au voisinage de 0, pour tout compact $K \subset U$, χ_λ est nulle dans K pour λ assez petit, de sorte que, pour tout $m \in R$, l'ensemble des $\lambda^{-m} \chi_\lambda$, $\lambda \leq 1$, est borné dans $C^\infty(U)$. CQFD

What is the...

(1.15) Corollaire. - $S^{-\infty}$ est dense dans S^∞ . Plus précisément l'adhérence de $S^{-\infty}$ dans S^m contient $S^{m'}$ pour tout $m' < m$.

En effet, si $a \in S^{m'}$, l'ensemble des $(1 - \chi_\lambda)a$ est borné dans $S^{m'}$ puisque l'ensemble des $(1 - \chi_\lambda)$ est borné dans S^0 . Comme $(1 - \chi_\lambda)$ est nulle au voisinage de l'infini, on a $(1 - \chi_\lambda)a \in S^{-\infty}$. Et comme $(1 - \chi_\lambda)$ tend vers 1 quand $\lambda \rightarrow 0$, $(1 - \chi_\lambda)a$ tend simplement vers a , donc tend vers a dans S^m si $m > m'$.

(1.16) Remarque. - $C_0(U)$ est dense dans $S^{-\infty}(U)$, donc aussi dans $S^\infty(U)$. Ainsi pour prouver qu'une application linéaire $I : C_0^\infty(U) \rightarrow E$ (où E est un espace localement convexe complet) se prolonge continuellement à $S^\infty(U)$, il suffit de prouver que pour tout m , I est continue pour la topologie induite sur $C_0^\infty(U)$ par celle de S^m .

3. Sommes asymptotiques

(1.17) Définition. - Soit (a_k) une suite de $S^\infty(U)$, et $a \in S^\infty(U)$. On dit que a est somme asymptotique des a_k et on écrit $a \sim \sum a_k$ s'il existe une suite (m_N) tendant vers $-\infty$ telle que

$$a - \sum_0^{N-1} a_k \in S^{m_N} \quad \text{pour tout entier } N \geq 0.$$

(Autrement dit, la série $\sum a_k$ converge vers a pour la topologie associée à la filtration de S^∞ par les S^m .)

(1.18) Théorème. - Soit $a_k \in S^{m_k}(U)$ une suite d'amplitudes ; on suppose $m_k \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$. Il existe $a \in S^\infty$ tel que $a \sim \sum a_k$.

(Autrement dit, la topologie associée à la filtration de S^∞ par les S^m est complète. Notons toutefois que cette topologie n'est pas séparée car $\bigcap S^m = S^{-\infty}$ n'est pas nul.)

Quitte au besoin à regrouper des termes, on peut supposer $m_k > m_{k+1}$. Posons $a_{k,n} = \chi_{1/n} a_k$, où χ_λ est la fonction du lemme (1.14). Comme $\chi_{1/n}$ est une suite bornée dans S^1 , $a_{k,n}$ tend vers 0 dans $S^{m_{k+1}}$ quand $n \rightarrow \infty$. Et comme $a_k - a_{k,n} \in S^{-\infty}$ pour tout n ($a_k - a_{k,n}$ est nul au voisinage de l'infini), le théorème résultera du lemme suivant, qui montre qu'il existe une suite n_k telle que la série $a = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k,n_k}$ converge dans $S^\infty(U)$, et que pour tout entier N on ait $a - \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k,n_k} \in S^{m_{N+1}}$, donc $a - \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{k,n_k} \in S^{m_{N+1}}$.

Lemme. - Soit F_k une suite décroissante d'espaces de Fréchet (ie. $F_k \supset F_{k+1}$, et la topologie de F_{k+1} est plus fine que la topologie induite par celle de F_k). Pour tout k , soit $(a_{k,n})_{n=1,2,\dots}$ une suite d'éléments de F_k qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Il existe une suite n_k telle que pour tout N , la série $\sum_{k > N} a_{k,n_k}$ converge dans F_N .

En effet, pour tout k soit p_n^k une suite fondamentale de seminormes de F_k . Choisissons n_k de sorte que pour tout $m \leq k$ et tout $\ell \leq k$, on ait $p_m^\ell(a_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$; ceci est possible puisque $a_{k,n}$ tend vers 0 dans F_k , que pour $\ell \leq k$, les seminormes p_m^ℓ sont continues sur F_k , et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'inégalités à satisfaire.

Alors, pour tous n, N , la série $\sum_{k > N} p_n^N(a_{k,n_k})$ converge puisque $p_n^N(a_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$ si $k \geq \sup(n, N)$. Le lemme est démontré.

4. Autres espaces d'amplitudes .

Comme in a signalé dans l'introduction , il peut être utile de considérer d'autres amplitudes que celles introduites ci-dessus . Dans cette direction , la théorie est loin d'être achevée , et je me contenterai de donner quelques exemples .

a. L'espace SH^m

Soit m un entier . On note SH^m le sous-espace de S^m formé des amplitudes a qui admettent un développement asymptotique en fonctions homogènes de degré entier :

$$a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k} \quad a_k$$

où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$. Un tel développement asymptotique est unique : si $a \sim 0$ (ie. $a \in S^{-\infty}$) , on a $a_{m-k} = 0$ pour tout k (en effet si k_1 est le premier entier tel que a_{m-k_1} ne soit pas identiquement nul , et si u est un point tel que $a_{m-k_1}(u) \neq 0$, on a $|a| \gtrsim r^{m-k_1}$ dans un voisinage conique de u , donc a ne peut pas être de degré $-\infty$).

C'est avec cette classe d'amplitudes que le calcul symbolique se décrit le plus commodément . De plus , bon nombre de propriétés des opérateurs différentiels s'énoncent de façon plus agréable pour les opérateurs pseudo-différentiels correspondant à cette classe.

b. L'espace S_{ρ}^m

Soit U un cône , et m , ρ deux nombres ^{réels} entiers . On note $S_{\rho}^m(U)$ l'ensemble des fonctions C^{∞} sur U telles que pour tous champs de vecteurs (dérivations) X_1 , \dots , X_k à coefficients C^{∞} , ^{homogènes de degrés} homogènes de degré -0 sur U , on ait

$$|X_1 \dots X_k a| \lesssim r^{m+k(1-\rho)}$$

En fait cet ensemble n'est intéressant que pour $0 < \rho \leq 1$, et ne produit des opérateurs qui ont des propriétés analogues à celles des opérateurs pseudo-différentiels décrits plus loin (calcul symbolique , continuité L^2) que pour $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$.

Exercice : pour $\rho = 1$, on a $S_{\rho}^m = S^m$.

[c. Espace $S_{\phi}^{\Lambda}(R^n)$

On se donne d'abord une famille de métriques euclidiennes sur R^n : $|u|_x = |\phi_x u|$, indexée par les points $x \in R^n$.

On dit que cette famille est régulière si elle satisfait à la condition suivante :

(i) Pour tout $R > 0$, il existe $C > 1$ tel que $|x-y|_x < R$ implique $1/C \leq |u|_x / |u|_y \leq C$ pour $u \in R^n \setminus \{0\}$.

Soit ϕ une famille régulière de métriques sur R^n . On dit qu'une fonction $\Lambda > 0$ sur R^n est un poids adapté à ϕ si elle satisfait à la condition suivante :

(ii) Pour tout $R > 0$, il existe $C > 1$ tel que $|x-y|_x < R$ implique $1/C \leq \Lambda(x)/\Lambda(y) \leq C$.

On dit de plus que Λ est tempérée s'il existe des nombres C et N tels que

$$1/C (1+|x|)^{-N} \leq \Lambda(x) \leq C (1+|x|)^N \quad \text{pour tout } x \in R^n.$$

Soit ϕ une famille régulière de métriques sur R^n , Λ un poids tempéré, adapté à ϕ . On note S_{ϕ}^{Λ} l'ensemble des fonctions $a \in C^{\infty}(R^n)$ telles que l'ensemble des fonctions

$$y \mapsto \Lambda(x)^{-1} a(x + \phi_x^{-1} y) \quad , \quad x \in R^n$$

soit borné dans $C^{\infty}(R^n)$.

Avec cette définition, il est aisé de démontrer les analogues des résultats des sections 1. et 2. ; il y a plusieurs notions utiles de développement asymptotique, que je ne décrirai pas.

Pratiquement tous les ensembles d'amplitudes que j'ai vu servir se décrivent en ces termes. En revanche, pour que les opérateurs pseudo-différentiels correspondant à ces classes aient des propriétés raisonnables, R. Beals impose en outre des conditions sur ϕ et Λ qui me paraissent désagréables et peu naturelles, et je ne pense pas que la théorie ait atteint son terme.

d. Amplitudes analytiques

Soit U un cône analytique réel. On appelle voisinage complexe de U toute variété analytique complexe U_c conique (ie. R_+ y opère, et l'application $R_+ \times U_c \rightarrow U_c$ est analytique réelle, partiellement holomorphe par rapport à la deuxième variable) de même dimension (sur \mathbb{C}) que U , muni d'une anti-involution τ (ie. τ est un automorphisme de cône, antiholomorphe, et $\tau^2 = \text{Id}$) dont U soit le cône des points fixes.

On dit qu'une amplitude a est analytique de degré m s'il existe un voisinage conique U_c de U et un prolongement holomorphe $\tilde{a} \in S^m(U_c)$ de a (il résulte de la formule de Cauchy qu'il suffit qu'on ait $|\tilde{a}| \leq r^m$ pour qu'on ait $\tilde{a} \in S^m(\zeta)$, si \tilde{a} est holomorphe).

Pour les amplitudes analytiques, il convient de modifier la notion de développement asymptotique. Je me contenterai de décrire le cas particulier le plus utile :

- On dit qu'une série formelle $\sum a_k$ de fonctions sur U est un symbole analytique formel de degré m si a_k est homogène de degré $m-k$, et s'il existe un voisinage complexe conique U_c de U tel que les a_k se prolongent toutes en fonctions holomorphes sur U_c et satisfont à la condition suivante :

(SAF) Pour tout compact K de U_c il existe une constante $A > 0$ telle qu'on ait $|a_k| \leq k! A^{k+1}$ pour tout k , sur K .

On dit qu'une amplitude analytique a est asymptotiquement somme des a_k et on écrit $a \sim \sum a_k$ s'il existe un voisinage conique U_c de U dans lequel a et les a_k soient tous holomorphes, tel que

Pour tout cône $U' \subset U_c$, de base compacte, il existe un nombre $A > 0$ tel que pour tout entier N on ait

$$\left| a - \sum_{k < N} a_k \right| \leq N! A^{N+1} r^{m-N}$$

(Il est vrai, mais non trivial, que si a_k est un symbole formel analytique de degré m , il existe une amplitude analytique a qui est asymptotiquement somme des a_k).

Soit U un sous cône ouvert du cône $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (où les homothéties sont définies par $\lambda(x, \xi) = (x, \lambda\xi)$). Si $a = \sum_k a_k$ et $b = \sum_k b_k$ sont deux symboles analytiques formels sur U , on définit le composé :

$$a \circ b = \sum_{k, \ell} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \binom{\alpha}{\xi} a_k \binom{\alpha}{\eta} b_\ell$$

(il convient de regrouper dans cette somme les termes homogènes de même degré). La loi de composition provient de la loi de composition des opérateurs pseudo-différentiels, comme on verra. L'ensemble des symboles analytiques formels est ainsi muni d'une structure d'algèbre associative. On montre qu'on définit ainsi un faisceau cohérent d'algèbres.]

§2. Intégrale oscillante.

(2.1) Définition.- Soit U un cône. On appelle phase sur U une fonction réelle $\varphi \in C^\infty(U)$, homogène de degré 1, sans point critique.

Soit U un cône. Soit $d\mu$ une mesure de densité C^∞ sur U , nulle au voisinage de 0 et hors d'un sous-cône à base compacte de U , homogène de degré 0 au voisinage de l'infini ($d\mu$ servira à la fois à intégrer et à tronquer) /choisir φ pour homogène et sans point critique.
 Soit φ une phase sur U

(2.2) Théorème.- L'intégrale $a \mapsto \int_U e^{i\varphi} a d\mu$ se prolonge continument à $S^\infty(U)$.

On appelle intégrale oscillante ce prolongement. On le notera encore $\int e^{i\varphi} a d\mu$. Pour démontrer le théorème, on effectue un certain nombre d'intégrations par parties.

(2.3) Lemme.- Il existe un opérateur différentiel L à coefficients C^∞ , homogène de degré -1 par rapport aux homothéties, tel que $L(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$

En effet, si $U = X \times \mathbb{R}_+$, où X est ouvert de \mathbb{R}^n , on peut prendre

$$L = (1/if) \left(\sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

où f est la fonction C^∞ , homogène de degré +2 :

$$f = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2$$

Dire que φ n'a pas de point critique revient à dire que f ne s'annule jamais.

On passe de là au cas général grâce à une partition de l'unité sur la base de U .

Prouvons le théorème. Soit L comme dans le lemme (2.3). Le transposé formel tL opère sur les mesures de densité C^∞ . Il est homogène de degré -1, donc $({}^tL)^k$ est continu $S^m(U, \mathcal{R}) \rightarrow S^{m-k}(U, \mathcal{R})$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $k \geq 0$. (Rappelons que \mathcal{R} est un fibré dont les sections s'identifient naturellement aux mesures ;

c'est un R_+ - fibré , et nous avons utilisé la notation de (1.2) .)

L'hypothèse sur le degré et le support de $d\mu$ implique alors que $({}^tL)^k(a d\mu)$ est (absolument) intégrable si $a \in S^m$ avec $m-k < 0$, et l'intégrale $a \mapsto \int e^{i\varphi} ({}^tL)^k(a d\mu)$ est alors continue sur S^m . (Si $U = X \times R_+$, où X est ouvert de R^n , dire que $d\mu$ est homogène de degré 0 au voisinage de l'infini revient à dire que, au voisinage de l'infini , $d\mu$ est de la forme $r^{-1} \omega(x) dx dr$ où $\omega(x)$ est une fonction C^∞ sur X .)

Or si a est de support compact , on a , par définition de tL

$$\int e^{i\varphi} a d\mu = \int L^k e^{i\varphi} a d\mu = \int e^{i\varphi} ({}^tL)^k(a d\mu) .$$

Comme k est arbitraire , pour tout m , l'intégrale $a \mapsto \int e^{i\varphi} a d\mu$ est continue sur $C_0^\infty(U)$ pour la topologie induite par celle de S^m . Elle se prolonge donc continument à $S^{-\infty}$ (cf. (1.15)) . Ceci démontre le théorème . En outre , si χ_ξ est défini comme dans le lemme (1.14) et si $a \in S^\infty$, $(1 - \chi_\xi) a$ tend vers a dans S^∞ si $\xi \rightarrow 0$, et on a donc

$$(2.4) \quad \int e^{i\varphi} a d\mu = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int e^{i\varphi} (1 - \chi_\xi) a d\mu$$

où l'intégrale qui figure au deuxième membre de cette égalité est l'intégrale usuelle des mesures à support compact .

2. Propriétés

La plupart des manipulations usuelles sur l'intégrale convergente se prolongent de façon naturelle à l'intégrale oscillante .

En particulier

(2.5) (Changement de variables) Si χ est un isomorphisme de cônes on a $\int e^{i\varphi} a d\mu = \int e^{i\varphi \circ \chi} \chi^*(a d\mu)$.

En coordonnées locales : si χ est un difféomorphisme du cône $X \times (R^N - \{0\})$ sur le cône $Y \times (R^N - \{0\})$, où X (resp. Y) est ouvert de R^m (resp. R^n) , homogène de degré 1 , si φ est une phase sur $Y \times (R^N - \{0\})$, et $a \in S(Y \times R^N)$ est nul hors de l'image réciproque d'un compact de Y , on a

$$\int_{Y \times R^N} e^{i\varphi(y, \eta)} a(y, \eta) dy d\eta = \int_{X \times R^N} e^{i\varphi \circ \chi(x, \xi)} a \circ \chi(x, \xi) |\det \chi'(x, \xi)| dx d\xi$$

(ici il n'est pas nécessaire de supposer a nul au voisinage de $Y \times \{0\}$).

(2.6) (Dérivation sous le signe somme)

Soit U un cône, X une variété, φ une phase sur le cône $X \times U$ telle que la différentielle partielle $d_U \varphi$ ne s'annule jamais, et $a \in S^m(X \times U)$. Soit enfin $d\mu$ une mesure sur U , comme au n°1.

Proposition. - La fonction $x \mapsto \int_U e^{i\varphi(x,u)} a(x,u) d\mu(u)$ est C^∞ sur X .

Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème usuel de dérivation sous le signe somme que l'application $a \mapsto F(a) = \int_U e^{i\varphi} a d\mu$ est continue $C_0(X \times U) \rightarrow C^\infty(X)$, et du théorème usuel de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre qu'elle se prolonge continument $S^m(X \times U) \rightarrow C(X)$ si $m < 0$.

Dans la preuve du lemme(2.2), on peut introduire des paramètres : il existe un champ de vecteurs vertical L , à coefficients C^∞ sur $X \times U$, homogène de degré -1 , tel que $L(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$. On a alors pour tout k

$$\int_U e^{i\varphi(x,u)} a(x,u) d\mu(u) = \int_U e^{i\varphi(x,u)} ({}^tL)^k(a(x,u) d\mu(u)) \quad \text{si } a \in C_0^\infty$$

de sorte que l'application $a \mapsto F$ est continue $C_0^\infty(X \times U) \rightarrow C(X)$ lorsqu'on munit $C_0^\infty(X \times U)$ de la topologie induite par celle de S^m , pour tout m , donc qu'elle se prolonge continument $S^\infty(X \times U) \rightarrow C(X)$.

Enfin si P est un opérateur différentiel sur X , à coefficients C^∞ , et si P_φ désigne l'opérateur (~~vertical~~) sur $X \times U$: $P_\varphi = e^{-i\varphi} P e^{i\varphi}$ on a $P F(a) = F(P_\varphi a)$ pour $a \in C_0(X \times U)$. Or si P est de degré inférieur à k , P est somme d'opérateurs (~~homogènes de degré~~ $\leq k$ (~~par rapport aux homothéties~~)) sur $X \times U$. P_φ est donc continu $S^m \rightarrow S^{m+k}$ pour tout m . Il s'ensuit que l'application $a \mapsto P F(a)$ est continue $C_0^\infty(X \times U) \rightarrow C(X)$ lorsqu'on munit $C_0^\infty(X \times U)$ de la topologie induite par celle de S^m , pour tout m , donc qu'elle se prolonge continument $S^\infty(X \times U) \rightarrow C(X)$. Ceci implique bien que $a \mapsto F(a)$ est continu $S^\infty(X \times U) \rightarrow C^\infty(X)$, et démontre la proposition.

3. Distributions définies par une intégrale oscillante

Soit X un ouvert de R^n , et soit φ une phase sur $X \times (R^N - \{0\})$. A tout $a \in S^\infty(X \times R^N)$ on associe la distribution $T_{a,\varphi}$ définie par l'intégrale oscillante

$$(2.3) \quad \langle T_{a,\varphi}, (u) \rangle = \int e^{i\varphi(x,t)} a(x,t) u(x) dx dt$$

Dans la suite de ce n° , nous supposons pour simplifier que toutes les amplitudes qui interviennent sont nulles au voisinage de $t = 0$ (ce n'est en fait pas indispensable : exercice - si $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ est nul pour $|t| \geq 1$, $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^∞)

On note $L^m(X)$ l'ensemble des distributions $T_{a,\varphi}$, avec $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ (nul au voisinage de $t = 0$) . On note $L^\infty(X)$ la réunion des L^m_φ .

Si $T \in L^\infty_\varphi$, et si (T_k) est une suite de L^∞_φ , on écrit $T \sim \sum T_k$ s'il existe une suite (m_k) tendant vers $-\infty$ telle que $T - \sum_{j < k} T_j$ appartienne à L^{m_k} . Il résulte du théorème (1.18) que pour toute suite $(m_k) \in L^{m_k}$, où (m_k) est une suite tendant vers $-\infty$ de nombres réels , il existe $T \in L^\infty_\varphi$ telle que $T \sim \sum T_k$.

Si $m < -N$, $T_{a,\varphi}$ est en fait la fonction continue définie par l'intégrale absolument convergente

$$(2.9) \quad T_{a,\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(x,t)} a(x,t) dy$$

(2.10) Soit P un opérateur différentiel de degré $\leq k$, à coefficients C^∞ sur X . Alors $P L^m \subset L^{m+k}$.

En effet si P désigne l'opérateur $e^{-i\varphi} P e^{i\varphi}$ sur $X \times \mathbb{R}^N$, on a $T_{a,\varphi} = T_{P_\varphi a,\varphi}$ (c'est vrai si $a \in C^\infty_0(X \times \mathbb{R}^N)$, donc aussi à la limite si $a \in S^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ - le fait que les coefficients de P_φ , comme φ , ne sont pas C^∞ au voisinage de $t = 0$ ne gêne pas puisqu'on suppose a nul au voisinage de $t = 0$) . Or on a $(\partial/\partial x_j)_\varphi = \partial/\partial x_j + i \partial\varphi/\partial x_j$, et $\partial\varphi/\partial x_j$ est homogène de degré 1 . Par récurrence sur k , il en résulte que P_φ est somme d'opérateurs homogènes de degré $\leq k$ (par rapport aux homothéties) , donc $P_\varphi a \in S^{m+k}$ si $a \in S^m$.

Par suite $T_{a,\varphi}$ est une fonction de classe C^k si $a \in S^m$ avec $m < -N-k$. En particulier $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^∞ si $a \in S^{-\infty}$.

Inversement toute fonction $f \in C^\infty(X)$ est de la forme $T_{a,\varphi}$ avec $a \in S^{-\infty}$: on peut par exemple choisir $a(x,t) = e^{i\varphi(x,t)} \chi(t) f(x)$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est nulle au voisinage de 0 , et $\int \chi(t) dt = 1$.

On a donc

$$(2.11) \quad C^\infty(X) = \bigcap L^m_\varphi(X)$$

Si la différentielle partielle $d_{x,t}\varphi$ ne s'annule jamais, il résulte de (2.6) que toute distribution $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^∞ . Dans le cas général, soit C_φ le cône des zéros de la différentielle partielle $d_{x,t}\varphi$, et soit S_φ la projection de C_φ sur X (S_φ est fermé dans X , car C_φ est un cône fermé dans $X \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$, et la projection $X \times S^{N-1} \rightarrow X$ est propre)

(2.12) Proposition. - Avec les notations ci-dessus, toute distribution $T \in L_\varphi^\infty$ est C^∞ en dehors de S_φ .

(Tout ceci se généralise aisément au cas où X est une variété; on peut aussi remplacer $X \times \mathbb{R}^N$ par une submersion $C^\infty U \rightarrow X$, homogène de degré 0, où U désigne un cône C^∞ .)

4. Opérateurs définis par des intégrales oscillantes

Soient X et Y deux ouverts d'espaces numériques (plus généralement des variétés), φ une phase sur $X \times Y \times \mathbb{R}^N$, et $a \in S^m(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$. On note $L_{a,\varphi}$ l'opérateur de noyau $T_{a,\varphi}$: c'est l'opérateur continu $C_0^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ défini par

$$\langle L_{a,\varphi} u, v \rangle = \langle u, {}^t L_{a,\varphi} v \rangle = \int \int e^{i\varphi(x,y,t)} a(x,y,t) u(y) v(x) dx dy dt$$

Si pour tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), la fonction $(y,t) \mapsto \varphi(x,y,t)$ (resp. $(x,t) \mapsto \varphi(x,y,t)$) est une phase (autrement dit si la différentielle partielle $d_{y,t}\varphi$ (resp. $d_{x,t}\varphi$) ne s'annule jamais) (2.6) montre que $L_{a,\varphi}$ est continu $C_0^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$, et on a

$$L_{a,\varphi} u(x) = \int e^{i\varphi(x,y,t)} a(x,y,t) u(y) dy dt$$

(resp. ${}^t L_{a,\varphi}$ est continu $C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$, donc $L_{a,\varphi}$ se prolonge en un opérateur continu $C_0^{-\infty}(Y) \rightarrow C^{-\infty}(X)$).

Si ces deux conditions sont vérifiées (ie. $d_{x,t}\varphi$ et $d_{y,t}\varphi$ ne s'annulent jamais), $L_{a,\varphi}$ est continu $C_0^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$, se prolonge continuellement $C_0^{-\infty}(Y) \rightarrow C^{-\infty}(X)$, et on a, avec la notation de (2.12)

(2.13) Proposition. - Pour toute $f \in C_0^{-\infty}(Y)$, on a $\text{supp sing } L_{a,\varphi} f \subset S_\varphi$ ($\text{supp sing } f$)

On a posé, si K est un compact de Y , $S_\varphi(K) = \text{pr}_X(S_\varphi \cap \text{pr}_Y^{-1}K)$.
 Soit en effet $x \notin S_\varphi(\text{supp sing } f)$ et montrons que $L_{a,\varphi} f$ est C^∞
 au voisinage de x : on peut décomposer $f = f_0 + f_1$, avec $f_0 \in C_0^\infty(Y)$
 et $f_1 \in C_0^{-\infty}(Y)$ de support assez voisin de $\text{supp sing } f$ pour qu'on
 ait $x \notin S_\varphi(\text{supp } f_1)$. Alors $L_{a,\varphi} f_0$ est C^∞ , comme f_0 , et
 $L_{a,\varphi} f_1$ est C^∞ au voisinage de x car le noyau de $L_{a,\varphi}$ est C^∞
 au voisinage de $\{x\} \times \text{supp } f_1$ (un opérateur de noyau C^∞ est continu
 $C_0^{-\infty} \rightarrow C^\infty$).

Remarque : ce qui fait marcher l'intégrale oscillante, c'est que
 les amplitudes qu'on intègre varient peu à l'infini : les dérivées
 d'ordre élevé de ces amplitudes sont très petites. Les constructions
 ci dessus se font tout aussi bien avec des amplitudes $a \in S_f^n$,
 pourvu qu'on ait $\delta > 0$ (alors on a, avec la notation du lemme(2.3)
 $({}^tL)^k(a \, d\mu) \in S^{m-kp}$ si $a \in S^m$ se sorte que $({}^tL)^k(a \, d\mu)$
 est intégrable pour k assez grand).

Opérateurs pseudo-différentiels

1. Définitions

(3.1) Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. On note L_a^{-1} l'opérateur défini par l'intégrale oscillante

$$L_a f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) f(y) dy d\xi$$

Ici la phase est $\varphi(x, y, \xi) = \langle x-y, \xi \rangle$. Elle est linéaire en ξ donc C^∞ au voisinage de $\xi = 0$, et il n'est plus nécessaire de supposer a nul au voisinage de $\xi = 0$ comme au §2. Les différentielles partielles $d_x \varphi = \xi$, $d_y \varphi = -\xi$ ne s'annulent jamais pour $\xi \neq 0$; en outre on a $d_\xi \varphi = x - y$, donc S_φ est la diagonale de $X \times X$. On a donc, en vertu du §2, n°4

(3.2) L_a^{-1} est continu $C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$, se prolonge continument $C_c^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$, et diminue le support singulier.

Le transposé de L_a est $L_{\bar{a}(y, x, -\xi)}$ et l'adjoint de L_a est $L_{\bar{a}(y, x, \xi)}$.

(3.3) Définition. - On note $OPS^m(X)$ l'ensemble des opérateurs L_a , avec $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. Les éléments de OPS^m sont les opérateurs pseudo-différentiels (opd.) de degré m .

(3.4) Si A, A_0, A_1, \dots sont des opd., on écrit $A \sim \sum A_k$ s'il existe une suite (m_k) tendant vers $-\infty$ telle que

$$A - \sum_{j < k} A_j \in OPS^{m_k}.$$

Il résulte de (1.18) que si $A_k \in OPS^{m_k}$ est une suite d'opd., où (m_k) est une suite qui tend vers $-\infty$, il existe un opd. A tel que $A \sim \sum A_k$.

Il résulte de (2.11) que $\bigcap OPS^m$ est l'ensemble des opérateurs à noyau C^∞ , donc continus : $C_0^{-\infty} \rightarrow C^\infty$. On écrit $A \sim 0$ si le noyau de A est une fonction C^∞ .

(3.5) Définition. - On dit qu'un opérateur $A : C_0^\infty(X) \rightarrow C^{-\infty}(X)$ est propre si les restrictions au support du noyau de A des deux projections $X \times X \rightarrow X$ sont propres.

Ainsi A est propre si pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $L \subset X$ tel que pour toute $f \in C_0^\infty(X)$ Af soit nulle hors de L si f est nulle hors de K , et Af soit nulle dans K si f est nulle dans L . Par exemple L_a est propre s'il existe un ensemble fermé $F \subset X \times X$ tel que les deux projections $F \rightarrow X$ soient propres, et que $a(x, y, \xi)$ soit nul pour $(x, y) \notin F$.

Si A est un opd. propre, il est continu $C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty$ et $C_0^{-\infty} \rightarrow C_0^{-\infty}$ et se prolonge continument $C^k \rightarrow C^k$ et $C^{-\infty} \rightarrow C^{-\infty}$ (A transforme somme localement finie en somme localement finie).

Il existe des voisinages fermés F de la diagonale de $X \times X$ tels que les deux projections $F \rightarrow X$ soient propres (par exemple, l'ensemble des couples (x, y) tels que $|x-y| < \xi$ ^{$\inf(\xi, \frac{1}{2}d(x, X), \frac{1}{2}d(y, X))$} et que les distances de x et y à la frontière de X soit $\leq \xi$, où ξ est un nombre > 0). ~~Si F est un tel voisinage, il existe une fonction C^∞ , $\chi(x, y)$, nulle hors de F , et égale à 1 au voisinage de la diagonale.~~ Alors, pour tout $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, $L_{\chi a}$ est un opd. propre, et $L_{a-\chi a}$ est un opérateur à noyau C^∞ puisque le noyau de $L_{a-\chi a}$ est nul au voisinage de la diagonale, et est ~~est nul~~ C^∞ en dehors de la diagonale d'après (2.12). On a donc prouvé :

(3.6) Proposition. - Pour tout opd. $A \in OPS^m(X)$, il existe un opd. propre A' tel que $A \sim A' \sim 0$. $A \sim A'$

(3.7) Exemple. - Soit $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$. L'opérateur $a(x, D)$ défini par

$$\begin{aligned} a(x, D)f &= (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) f(y) dy d\xi \end{aligned}$$

est un opd. de degré m (la deuxième intégrale est l'intégrale oscillante; pour toute $f \in C_0^\infty(X)$, l'égalité est vraie pour $a \in S^{-\infty}$ car les deux intégrales sont alors absolument convergentes de sorte que l'égalité résulte de la définition de \hat{f} ; elle reste vraie pour tout $a \in S^\infty$ par passage à la limite).

Comme on a vu au §0, si a est le polynôme $a(x, \xi) = \sum a_k(x) \xi^k$ où k est un entier positif, et $a_k \in C^\infty(X)$ pour $|k| \leq k$

(donc $a \in S^k(X \times R^n)$ d'après (1.3)), $a(x, D)$ est l'opérateur différentiel de degré $\leq k$: $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})^\alpha$. Les opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sont donc des opd. .

2. Symbole total

Nous montrons maintenant que les opd. sont essentiellement tous de la forme $a(x, D)$ (avec $a \in S^\infty(X \times R^n)$).

(3.1) Proposition.- (i) Soit A un opd. de degré $\leq m$ sur X.
Il existe $a \in S^m(X \times R^n)$ tel que $A \sim a(x, D)$.

En particulier

(ii) si A est propre, et si on pose $a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{ix \cdot \xi})$,
on a $a \in S^m(X \times R^n)$ et $A = a(x, D)$.

Une telle amplitude a est unique mod. $S^{-\infty}$:

(iii) si $a(x, D) \sim 0$, on a $a \sim 0$.

(iv) si $A = L_b$ avec $b \in S^m(X \times X \times R^n)$, on a $A \sim a(x, D)$ si

$$a(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|} i^{-|\alpha|} / \alpha! \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha b(x, y, \xi) \Big|_{y=x}$$

(Remarquons que $(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\alpha$ est homogène de degré $-|\alpha|$, donc $(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\alpha b \in S^{m-|\alpha|}$ d'après (1.6))

Démontrons d'abord (iv), qui implique (i). Comme on a

$$(y-x)^\alpha e^{i\langle x-y, \xi \rangle} = i^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha e^{i\langle x-y, \xi \rangle}$$

on voit, en intégrant par parties dans la formule de définition (3.1) qu'on a $L_{(y-x)^\alpha} a = i^{-|\alpha|} L_{\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha} a$.

D'autre part si $a \in S^m(X \times X \times R^n)$ est nul à l'ordre k sur la diagonale de $X \times X$, on a $a = \sum_{|\alpha| \geq k} (y-x)^\alpha a_\alpha$, avec $a_\alpha \in S^m(X \times X \times R^n)$, par exemple

$$a_\alpha(x, y, \xi) = k/\alpha! \int_0^1 (1-t)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha a(x, x+t(y-x), \xi) dt$$

Donc $L_a = i^{-k} \sum_{|\alpha| \geq k} L_{\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha} a_\alpha$ est en fait un opd. de degré $m-k$.

(iv) résulte alors de ceci, et de la formule de Taylor, qui montre que pour tout k , $a - \sum_{|\alpha| < k} (y-x)^\alpha a_\alpha(x, \xi) \in S^m$ est nul à l'ordre k sur la diagonale, si on pose

$$a_\alpha(x, \xi) = 1/\alpha! \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha a(x, y, \xi) \Big|_{y=x}$$

Soit maintenant A un opd. propre, de degré m , et soit $b \in S^m(X \times R^n)$ tel que $A \sim b(x, D)$

Soit $S(x, z) \in C^{-\infty}(X \times R^n)$ la transformée de Fourier inverse en ξ de $b(x, \xi)$. Le noyau de $b(x, D)$ est donc la restriction à $X \times X$ de $S(x, x-y)$ (en effet c'est vrai si $m < -n$, car alors le noyau de $b(x, D)$ est la fonction continue, somme de l'intégrale convergente $(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b(x, \xi) d\xi$; par passage à la limite dans $S^{-\infty}$, on voit que c'est encore vrai pour tout m).

On a $S|_{X \times (R^n - \{0\})} \in S^{-\infty}(X \times (R^n - \{0\}))$. En effet si α, β, γ sont trois multi-indices, avec $|\alpha| > m + n + |\beta|$, la distribution $z^\alpha (\frac{\partial}{\partial z})^\beta (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma S$ est une fonction continue, bornée au dessus de tout compact de X , puisque sa transformée de Fourier en z est $i^{|\beta| - |\alpha|} (\frac{\partial}{\partial \xi})^\alpha \xi^\beta (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma b(x, \xi) \in S^{m - |\alpha| + |\beta|}$, et est donc intégrable en ξ , uniformément quand x parcourt un compact de X .

Soit alors $a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{ix \cdot \xi})$ (où comme au §0, on considère, pour tout ξ , $e^{ix \cdot \xi}$ comme élément de $C^\infty(X)$), et soit $T(x, z)$ la transformée de Fourier inverse en ξ de $a(x, \xi)$. Comme on a (§0, n°5) $A = a(x, D)$, le noyau de A est la restriction à $X \times X$ de $T(x, x-y)$,

Soit \tilde{A} l'extension de A à $C^\infty(R^n)$ définie par $\tilde{A}(f) = A(f|_X)$. On a encore $a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} \big|_X \tilde{A}(e^{ix \cdot \xi})$ (où $e^{ix \cdot \xi}$ est maintenant considéré comme élément de $C^\infty(R^n)$). Pour toute $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, on a $\varphi = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$, d'où, comme au §0, $\tilde{A}\varphi = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$. Par suite, comme ci-dessus, le noyau de \tilde{A} est $T(x, x-y)$.

Comme A est propre, pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $L \subset X$ tel que si $f \in C^\infty(R^n)$ est nulle dans L , Af soit nul dans K ; pour $x \in K$, le support de la distribution $T(x, x-y)$, considérée comme distribution de y , est donc contenu dans L , et celui de la distribution $T(x, z)$, considérée comme distribution de z , est contenu dans $x - L \subset K - L$. Ainsi $T(x, z)$ est nulle au voisinage de $z = \infty$.

Comme on a $A \sim b(x, D)$, $T(x, x-y) - S(x, x-y)$ est C^∞ dans $X \times X$. Il est aussi C^∞ en dehors de la diagonale dans $X \times R^n$ (pour S , cela résulte de ce qui précède; d'autre part $T(x, x-y)$ est C^∞ hors de la diagonale dans $X \times X$, puisque c'est le noyau d'un opd., et il est nul, donc C^∞ au voisinage de $X \times (R^n - X)$ d'après ce

qui précède) . Comme $\mathcal{B} \mid_{X \times (\mathbb{R}^n - \{0\})} \in S^{-\infty}(X \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$, on a donc $a - b \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$, donc aussi $a - b \in S^{-\alpha}(X \times \mathbb{R}^n)$, et finalement $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$, ce qui démontre (ii) . En outre si $A = 0$, on a $a = 0$ donc $b \sim 0$, ce qui démontre (iii) , et achève la démonstration de la proposition .

(Avec les notations ci-dessus , le symbole total de A est la classe de a mod. $S^{-\infty}$.)

3. Composés et transposés

(3.9) Proposition. - Si A est un opd. , l'adjoint A^* est un opd. Si $A \sim a(x, D)$ on a $A^* \sim \sum i^{-|\alpha|} / \alpha! \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha \bar{a} \right) (x, D)$

En effet si $A = L_{a(x, y, \xi)}$, on a $A^* = L_{\bar{a}(y, x, \xi)}$.

En particulier l'adjoint de $a(x, D)$ est $L_{\bar{a}(y, \xi)}$, et la deuxième assertion résulte de ((3.8)(iv)) .

De même le transposé ${}^t A$ est un opd. ; si $A \sim a(x, D)$ on a ${}^t A \sim \sum i^{|\alpha|} / \alpha! \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha a(x, -D)$.

(3.10) Proposition. - Si A et B sont deux opd. de degrés respectifs $\leq m$ et $\leq m'$, et si A ou B est propre , $A \circ B$ est un opd. de degré $\leq m + m'$.

Si $A \sim a(x, D)$ et $B \sim b(x, D)$, on a $A \circ B \sim c(x, D)$, avec

$$c(x, \xi) \sim \sum i^{-|\alpha|} / \alpha! \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha b$$

En effet comme $A \circ B \sim 0$ si $A \sim 0$ ou $B \sim 0$, on peut d'après (3.6) supposer que A et B sont propres tous les deux . On peut en outre , d'après (3.8)(ii) et (3.9) supposer $A = a(x, D)$ avec $a(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{ix \cdot \xi})$, et $B = L_{b(y, \xi)}$, avec $\bar{b}(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} B^*(e^{ix \cdot \xi})$

On a alors

$$Bf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b(y, \xi) f(y) dy d\xi$$

d'où , comme au §0 ,

$$\begin{aligned} ABf &= (2\pi)^{-n} \int A(e^{ix \cdot \xi}) e^{-iy \cdot \xi} b(y, \xi) f(y) dy d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) b(y, \xi) f(y) dy d\xi \end{aligned}$$

(l'égalité est vraie si $m' < -n$, car alors la première intégrale , comme l'intégrale définissant B , peuvent être considérées comme intégrales convergentes à valeurs dans C^∞ ; par passage à la limite dans $S^{-\infty}$, on voit que c'est vrai pour tout m' .)

Comme on a $a(x, \xi) b(y, \xi) \in S^{m+m'}(X \times X \times R^n)$ d'après (1.6) , (1.7) ceci démontre la première assertion .

Pour la deuxième assertion , on remarque que d'après (3.8)(iv) et (3.9) , il existe des coefficients universels $c_{\alpha, \beta}$ (indépendants de a et b) tels que

$$c(x, \xi) \sim \sum c_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta b$$

Or la deuxième assertion est vraie lorsque A et B sont des opérateurs différentiels , comme il résulte aisément de la formule de Leibniz (alors en fait , tous les termes du développement asymptotique sont nuls sauf un nombre fini , et on a des égalités) . Elle est donc vraie dans tous les cas .

4. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété.

Soient X, X' deux ouverts de R^n , et χ un difféomorphisme de X sur X' . Soit $A \in OPS^m(X')$, et soit A_χ l'image inverse de A par χ ($A_\chi f = A(f \circ \chi^{-1}) \circ \chi$) .

(3.11) Proposition. - Avec les notations ci-dessus , A_χ est un opd.
Si $A \sim a(x, D)$ et $A_\chi \sim a_\chi(x, D)$, on a $a_\chi(x, \xi) = a(\chi x, {}^t \chi^{-1} \xi) \in S^{m-1}$.

Supposons $A = L_a$, avec $a \in S^m(X \times X \times R^n)$. On a donc

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) f(y) dy d\xi$$

On a alors

$$A_\chi f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle \chi x - \chi y, \xi \rangle} a(\chi x, \chi y, \xi) |\det \chi'(y)| f(y) dy d\xi$$

Le théorème de division des fonctions C^∞ montre qu'il existe une fonction $C^\infty M : X \times X \rightarrow L(R^n)$ telle que $\chi x - \chi y = M(x, y)(x-y)$ (par exemple $M(x, y) = \int_0^1 \chi'(x+t(y-x)) dt$) . On a alors $M(x, x) = \chi'(x)$ de sorte que M est inversible au voisinage de la diagonale de $X \times X$

Donc si $\text{supp } f$ est assez petit, et x assez voisin de $\text{supp } f$ pour que $M(x,y)$ soit inversible au voisinage de $\{x\} \times \text{supp } f$, on a

$$A_\chi f(x) = \int_{\mathbb{C}^n} \langle x-y, \xi \rangle a(\chi x, \chi y, {}^t M^{-1}(x,y) \cdot \xi) |\det {}^t M(x,y)|^{-1} |\det \chi'(y)| f(y) dy d\xi$$

Comme ~~de toute façon~~ ^{par ailleurs} le noyau de A est C^∞ hors de la diagonale, il résulte de (1.7) et (1.6) que A est un opd. de degré m .

Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer qu'on a $a(x, \xi) = a(x, x, \xi) \text{ mod. } S^{m-1}$, et, puisque $M(x,x) = \chi'(x)$ (donc les deux déterminants ci-dessus sont égaux pour $x = y$)
 $a_\chi(x, \xi) = a(\chi x, \chi x, {}^t \chi'(x)^{-1} \cdot \xi)$.

Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , E et F deux fibrés vectoriels sur X , nous dirons qu'un opérateur $A : C_0^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$ est un opd. de degré m , de type E, F si pour toute section C^∞ u de E et toute section C^∞ v de F , l'opérateur $\varphi \mapsto v \cdot A(\varphi u)$ est un opd. de degré m (si $E = X \times \mathbb{C}^N$ et $F = X \times \mathbb{C}^{N'}$ sont des fibrés triviaux, il revient au même de dire que les coefficients de la matrice de A sont des opd. de degré m , d'après (3.10), dans le cas où A ou B est la multiplication par une fonction C^∞)

Ceci justifie la définition suivante :

(3.12) Définition. - Soient X une variété, E et F deux fibrés vectoriels sur X . On dit qu'un opérateur $A : C_0^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$ est un opd. de degré m , de type E, F si le noyau de A est C^∞ en dehors de la diagonale, et si pour toute immersion ouverte $\chi : Y \rightarrow X$, où Y est ouvert d'un espace numérique, l'image réciproque A_χ de A par χ est un opd. (de type $\chi^* E, \chi^* F$)

Un tel opérateur se prolonge continument $C_0^{-m}(X, E) \rightarrow C^{-m}(X, F)$. On notera $\text{OPS}^m(X, E, F)$ ^(op. vect.) l'ensemble des opd. de degré m , de type E, F . Si $E = F = X \times \mathbb{C}$, on notera simplement $\text{OPS}^m(X)$ cet ensemble (opd. de degré m sur X).

Comme plus haut, on a une notion d'opérateur propre. Si A est un opd. propre, de type E, F , il est continu $C_0^\alpha(X, E) \rightarrow C_0^\alpha(X, F)$ et $C_0^{-\alpha}(X, E) \rightarrow C_0^{-\alpha}(X, F)$ et se prolonge continument $C^\alpha(X, E) \rightarrow C^\alpha(X, F)$ et $C^{-\alpha}(X, E) \rightarrow C^{-\alpha}(X, F)$. Par exemple, un opérateur différentiel de type E, F est un opd. propre.

5. Calcul symbolique

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n . On note $OPSH^m(X) \subset OPS^m(X)$ l'ensemble des opd. de la forme L_a , avec $a \in SH^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ (§1, n°5.a) Un opd. $A \in OPSH^\infty$ sera dit régulier (?). Comme $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta a$ est homogène de degré entier en ξ si a l'est, toutes les constructions et assertions ci dessus restent valables quand on travaille avec des amplitudes de SH^∞ . En particulier un opd. A est régulier si et seulement si son symbole total est somme asymptotique de fonctions C^∞ , homogènes de degrés entiers (tendant vers $-\infty$) de ξ , et A est équivalent à un opd. régulier propre. $OPSH^\infty$ est une classe d'opd. stable par adjonction, transposition, composition, changement de variables, etc...

(3.13) Définition. - Soit $A \sim a(x, D)$ un opd. régulier de degré m , où a est somme asymptotique de fonctions homogènes : $a \sim \sum a_{m-k}$. On appelle symbole de A , et on note $\sigma_m(A)$ le premier terme a_m ; c'est une fonction C^∞ , homogène de degré m en ξ sur $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Il résulte de (3.9), (3.10) qu'on a

$$(3.14) \quad \sigma_{A^*} = \overline{\sigma_A}$$

si B est un deuxième opd. régulier, de degré m' , et si A ou B est propre

$$(3.15) \quad \sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_m(A) \sigma_{m'}(B)$$

On a donc $\sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_{m+m'}(B \circ A)$, de sorte que le crochet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ est en fait de degré $\leq m+m'-1$. En examinant les termes correspondant aux multi-indices de longueur 1 dans le développement asymptotique de la proposition (3.10), on voit qu'on a

$$(3.16) \quad \sigma_{m+m'-1}([A, B]) = \frac{1}{i} \{ \sigma_m(A), \sigma_{m'}(B) \}$$

où le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est défini par

$$(3.17) \quad \{f, g\} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

* ou σ_A s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le degré

si X' est un autre ouvert de \mathbb{R}^n , et $\chi : X' \rightarrow X$ un difféomorphisme, on a, avec les notations du n°3, d'après (3.11)

$$\sigma_{A\chi}(x, \xi) = \sigma_A(\chi x, t\chi^{-1}(x). \xi)$$

Le symbole se transforme donc comme une fonction sur le fibré cotangent.

Soit maintenant X une variété, E et F deux fibrés vectoriels sur X . On dit qu'un opd. A de degré m , de type E, F est régulier si pour toute immersion ouverte $\chi : Y \rightarrow X$, où Y est ouvert d'un espace numérique, et toutes trivialisations $\phi : \chi^*E \rightarrow X \times \mathbb{C}^M$ et $\psi : \chi^*F \rightarrow X \times \mathbb{C}^N$, les coefficients de l'opérateur $\psi^* A \chi \phi^{-1}$ sont des opd. réguliers. Le symbole de A est alors l'unique section C^∞ , homogène de degré m , $a : T^*X - \{0\} \rightarrow L(E, F)$ telle que, avec les notations ci-dessus, les coefficients de la matrice de $\psi \circ \chi^* a \circ \phi^{-1}$ soient les symboles des coefficients de la matrice de $\psi^* A \chi \phi^{-1}$, pour tous les choix possibles de Y, χ, ϕ, ψ ($\chi^* a : T^*Y - \{0\} \rightarrow L(\chi^*E, \chi^*F)$ désignant l'image inverse de a par χ); qu'une telle section existe résulte aisément des remarques qui précèdent. On le note encore $\sigma_m(A)$, ou σ_A s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le degré. \uparrow

Les assertions ci-dessus se généralisent comme suit : si A (resp. B) est un opd. régulier de type E, F (resp. F, G), de degré m (resp. m'), et si A ou B est propre, on a

$$(3.18) \quad \sigma_{m+m'}(B \circ A) = \sigma_{m'}(B) \cdot \sigma_m(A)$$

(où le produit dans le membre de droite est défini par la loi de composition naturelle : $L(F, G) \times L(E, F) \rightarrow L(E, G)$).

Si E et F sont munis de métriques hermitiennes C^∞ , et X d'une mesure ω de densité C^∞ strictement positive, l'adjoint A^* de A est défini par la formule

$$\int_X (u | A^* v)_E \omega = \int_X (A u | v)_F \omega \quad \text{pour } u \in C_0^\infty(X, E), \quad v \in C_0^\infty(X, F)$$

C'est un opd. régulier, de type F, E si A est un opd. régulier de type E, F , et on a

$$(3.19) \quad \sigma(A^*) = \sigma(A)^*$$

\uparrow Toute section C^∞ , homogène de degré m , $T^*X \rightarrow L(E, F)$ est le symbole d'un opd. régulier de degré m $E \rightarrow F$; c'est immédiat si X est ouvert de \mathbb{R}^n , et E, F sont linéaires, et le cas général en résulte par partition de l'unité.

(où l'adjonction $L(E,F) \rightarrow L(F,E)$ est définie au moyen des métriques choisies sur E et F).

En effet ceci résulte immédiatement de (3.14) si X est ouvert de \mathbb{R}^n , $E = X \times \mathbb{C}^M$, $F = X \times \mathbb{C}^N$, où \mathbb{C}^M et \mathbb{C}^N sont munis des métriques hermitiennes canoniques, et ω est la mesure de Lebesgue. Si, toutes choses égales par ailleurs, on a $\omega = \lambda dx$ avec $\lambda \in C^\infty(X)$, $\lambda > 0$, l'adjoint est $A_\lambda^* = \lambda^{-1} A^* \lambda$ (A^* désignant l'adjoint pour la mesure de Lebesgue); or on a $\sigma(\lambda^{-1} A \lambda) = \sigma(A)$. Le cas général en résulte aussitôt car, avec les notations ci-dessus on peut choisir ϕ et ψ isométriques, et χ transforme de toute façon la mesure choisie sur X en une mesure de la forme λdx .

Si X est une variété, la 1-forme fondamentale de T^*X est l'unique forme ω_1 sur T^*X telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(X)$ on ait $p^*(d\varphi) = d(\varphi \circ p) = \omega_1 \circ p$ où p désigne la projection $T^*X \rightarrow X$ et dans le troisième membre, on a composé les formes comme des sections: $X \rightarrow T^*X$, et $T^*X \rightarrow T^*T^*X$. En coordonnées locales $\omega_1 = \sum \xi_j dx_j$. La 2-forme fondamentale de T^*X est $\omega_2 = d\omega_1$. En coordonnées locales $\omega_2 = \sum \xi_j \wedge dx_j$. Elle est non dégénérée, fermée, et T^*X est ainsi canoniquement muni d'une structure ^{symplectique} symplectique. Le crochet de Poisson des fonctions sur T^*X est alors défini par $\{f, g\} = \omega_2^{-1}(df, dg)$ si on interprète ω_2 comme forme bilinéaire alternée sur TT^*X , et si ω_2^{-1} désigne la forme inverse, sur T^*T^*X . Avec cette définition du crochet de Poisson, la formule (3.17) est encore vraie pour deux opd. réguliers, scalaires (ie. de type \mathbb{C}, \mathbb{C}) sur une variété.

On a enfin le résultat suivant (qui pourrait servir de définition du symbole)

(3.20) Proposition. - Soit A un opd. régulier de type E, F sur une variété X . Soit $u \in C_0^\infty(X, E)$ une section, et $\varphi \in C^\infty(X)$ une fonction réelle, telle que $d\varphi$ ne s'annule pas sur le support de u . On a alors $e^{-\lambda i \varphi} A(e^{\lambda i \varphi} u) = \lambda^m \sigma_A(d\varphi) \cdot u + o(\lambda^{m-1})$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$, uniformément sur tout compact.

Soit V un voisinage ouvert de $\text{supp } u$ dans lequel $d\varphi$ ne s'annule pas, et W un ouvert de X disjoint de $\text{supp } u$.

L'opérateur $f \mapsto A(fu)$ se prolonge continument : $C^{-\infty}(V) \rightarrow C^{-\infty}(W, F)$.
 Or il existe un champ de vecteurs C^∞ sur V , L , tel que $L\varphi = -i\varphi$
 (par exemple $L = -i |\text{grad } \varphi|^2 \text{ grad } \varphi$ où $\text{grad } \varphi$ désigne le champ
 de vecteurs associé à $d\varphi$ pour un choix d'une métrique C^∞ sur TX).
 On a alors pour tout entier k $L^k e^{\lambda i\varphi} = \lambda^k e^{\lambda i\varphi}$. Comme la famille
 $e^{\lambda i\varphi}$, $\lambda \geq 0$ est bornée dans $C(V)$, donc aussi dans $C^{-\infty}(V)$, la
 famille $\lambda^k e^{\lambda i\varphi}$ est bornée dans $C^{-\infty}(V)$ pour tout k , et la famille
 $\lambda^k A(e^{\lambda i\varphi} u)$ est bornée dans W , uniformément sur tout compact,
 pour tout k . Ceci démontre la proposition en dehors de $\text{supp } u$.

D'autre part, quitte à remplacer u par une somme finie de
 sections de petit support, on peut supposer le support de u aussi
 petit que l'on veut. Quitte alors à remplacer X par un voisinage
 ouvert convenable de $\text{supp } u$, et à choisir convenablement un système
 de coordonnées sur X , on est ramené au cas où X est ouvert de
 \mathbb{R}^n , où E et F sont triviaux, et où φ est linéaire, par exemple
 $\varphi = x_1$, sur X . Dans ce cas la proposition résulte de (3.8)(ii)
 et (iv), qui montre que $e^{-ix \cdot \xi} A(e^{ix \cdot \xi} u) \in SH^m$, et que le
 terme dominant est $\sigma_A(x, \xi) \cdot u(x)$. Ceci achève la démonstration.

(+)

Remarque.- Les constructions et assertions des n°1-4 sont encore
 valables pour les opd. de la classe OPS_ρ^m (correspondant aux amplitudes
 $a \in S_\rho^m$), pour $\rho > \frac{1}{2}$. Alors les développements asymptotiques de
 (3.8), (3.9), (3.10) convergent encore (les degrés des amplitudes qui
 y figurent tendent vers $-\infty$). Les résultats du n°4 sont encore
 valables, à condition d'interpréter le symbole de $A \in OPS_\rho^m$ comme
 une classe de fonctions $a \in S_\rho^m \text{ mod. } S_\rho^{m+1-2\rho}$ sur T^*X . (dans la
 formule (3.17) pour les commutateurs, il faut remplacer $\sigma_{m+m'-1}$
 par $\sigma_{m+m'+1-2\rho}$.)

(+) Si A est un opérateur différentiel de degré m ,
 $e^{-\lambda i\varphi} A(e^{\lambda i\varphi} u)$ est un polynôme de degré m en λ , de terme
 dominant $\lambda^m \sigma_A(d\varphi) \cdot u$; ceci est encore vrai, bien sûr, si φ
 n'est pas réelle, et si $d\varphi$ peut s'annuler sur $\text{supp } u$.

6. Continuité L^2 des opérateurs pseudo-différentiels.

(2.21) théorème. - Soit A un opd. de degré 0. Alors A est continu $L^2_{comp} \rightarrow L^2_{loc}$.

Il s'agit de montrer que, pour toutes $u, v \in C^\infty_0$, l'opérateur $f \mapsto uA(vf)$ est continu dans L^2 . On peut donc supposer que le support du noyau de A est compact.

Lemme. - Soient X un ouvert de R^n , et $A = a(x;D)$ un opd. propre de degré 0. On suppose qu'il existe deux nombres $M, \epsilon > 0$ tels que $|a(x, \xi)| \leq M^2 - \epsilon$. Alors il existe un opd. B propre, de degré 0, tel que $A^*A + B^*B \sim M^2 Id$.

Preuve du lemme : il résulte de (1.9) que $b_0(x, \xi) = (M^2 - |a(x, \xi)|^2)^{\frac{1}{2}}$ est dans S^0 , donc il existe un opd. propre $B_0 \sim b_0(x, D)$.

Il suffit alors de prendre $B \sim \sum_0^\infty B_k$, où B_k est un opd. propre de degré $-k$, construit par récurrence de sorte que

$$R_k = A^*A + (\sum_0^{k-1} B_j)^* (\sum_0^{k-1} B_j) - M^2 Id$$
 soit de degré $\leq -k$ pour tout k .

La construction est déjà faite pour $k=1$ ($A^*A + B_0^*B_0 - M^2 Id$ est de degré -1 d'après (3.9), (3.10)). Supposons la faite jusqu'au rang $k-1$. Notons que b_0 est réel, elliptique de degré 0 (cf. (1.12)) (en fait $1/b_0 \in S^0$ d'après (1.9)). Posons $b_k = -\frac{1}{2} r_k / b_0$ où $r_k = r_k(x, D)$, et soit B_k un opd. propre, $B_k \sim b_k(x, D)$. Comme R_{k-1} est auto-adjoint, de degré $-k$, on a $r_k - \bar{r}_k \in S^{-k-1}$, et finalement, d'après (3.9), (3.10), on a $R_k + B_k^*B_0 + B_0^*B_k \in OPS^{-k-1}$ et $R_{k+1} = R_k + B_k^*B_0 + B_0^*B_k = (\sum_0^{k-1} B_j^*)B_k + B_k^*(\sum_0^{k-1} B_j) \in OPS^{-k-1}$, ce qui démontre le lemme.

Fin de la preuve du théorème : Si le support du noyau de A est compact, on a $A = a(x, D)$ où $a \in S^0$ est nul pour x hors d'un compact convenable, donc a est borné, et le lemme s'applique à A . Soit alors B un opd. propre de degré 0 tel que $A^*A + B^*B = M^2 Id + R$ où R est un opérateur à noyau C^∞ . Alors si $f \in C^\infty_0$, on a

$$\int |Af|^2 \leq \int |Af|^2 + \int |Bf|^2 = \int (A^*A + B^*B)f.f = M^2 \int |f|^2 + \int Rf.f$$

Comme R est évidemment continu $L^2_{comp} \rightarrow L^2_{loc}$ le théorème en résulte aussitôt.

7. Moyan des opd. réguliers .

Soit a une fonction continue sur $R^n - \{0\}$, homogène de degré s .
Posons

$$m_\alpha(a) = \int_{S^{n-1}} x^\alpha a(x) d\sigma$$

où S^{n-1} désigne la sphère unité de R^n , et $d\sigma$ son élément de volume usuel (moment sphérique d'ordre α de a).

On a alors

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} x^\alpha a(x) dx = \begin{cases} m_\alpha(a) \varepsilon^{s+n+|\alpha|} & \text{si } s+n+|\alpha| \neq 0 \\ -m_\alpha(a) \text{Log } \varepsilon & \text{si } s+n+|\alpha| = 0 \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. On a alors

$$\varphi = \sum_{|\alpha| \leq -s-n} \varphi^{(\alpha)}(0) x^\alpha / \alpha! + o(|x|^{s+n+\rho}) \text{ , avec } \rho > 0 .$$

Parsuite la quantité

$$\int_{|x| > \varepsilon} a \varphi = \sum_{|\alpha| \leq -s-n} \frac{1}{\alpha!} \varphi^{(\alpha)}(0) m_\alpha(a) \varepsilon^{s+n+|\alpha|} + \sum_{|\alpha| = -s-n} \frac{1}{\alpha!} \varphi^{(\alpha)}(0) m_\alpha(a) \text{Log } \varepsilon$$

a une limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$. On note $pf a$ la distribution sur R^n telle que $\langle pf a, \varphi \rangle$ soit égale à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'expression ci-dessus pour toute $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$.

(5.12) Proposition. - Soit a une fonction C^∞ , homogène de degré s sur $R^n - \{0\}$. Alors il existe une fonction b , C^∞ , homogène de degré $-s-n$ sur $R^n - \{0\}$, et, si s est entier ≥ 0 (resp. entier $\leq -n$) un polynôme homogène de degré s (resp. $-s-n$) tels que la transformée de Fourier de $pf a$ soit de la forme

$$\begin{aligned} pf a &= pf b && \text{si } s \text{ n'est pas entier } \geq 0 \text{ ou } \leq -n \\ pf a &= pf b + R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \delta && \text{si } s \text{ est entier } \geq 0 \\ pf a &= pf b + R(x) \text{Log}|x| && \text{si } s \text{ est entier } \leq -n . \end{aligned}$$

Prenons pour abrégé $T = \text{pf } a$. Observons pour commencer que \hat{T} est C^∞ en dehors de 0. En effet si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 au voisinage de 0, χT est à support compact, donc $\widehat{\chi T}$ est C^∞ , et $(1-\chi)T$ est C^∞ au voisinage de 0, donc $(1-\chi)T \in S^s$, donc la transformée de Fourier de $(1-\chi)T$ est C^∞ en dehors de 0 (cf. preuve de la proposition (3.8), p. 27), ainsi que $\hat{T} = \widehat{\chi T} + \widehat{(1-\chi)T}$.

On a $\langle T(\lambda x), \varphi \rangle = \lambda^{-n} \langle T, \varphi(x/\lambda) \rangle$. Remplaçant φ par $\varphi(x/\lambda)$ et ξ par $\lambda \xi$ dans la définition de $\langle \text{pf } a, \varphi \rangle$, on en déduit aussitôt

$$\langle T(\lambda x), \varphi \rangle = \lambda^s \langle T, \varphi \rangle + \lambda^s \text{Log } \lambda \sum_{|k|=-n-s} \frac{1}{k!} m_k(a) \varphi^{(k)}(0)$$

autrement dit

$$T(\lambda x) = \lambda^s T(x) + (-1)^{-n-s} \lambda^s \text{Log } \lambda \sum_{|k|=-n-s} \frac{1}{k!} m_k(a) \delta^{(k)}$$

d'où

$$\hat{T}(\lambda \xi) = \lambda^{-n-s} \hat{T}(\xi) + \lambda^{-n-s} \text{Log } \lambda \sum_{|k|=-n-s} \frac{1}{k!} m_k(a) (i\xi)^k$$

or si on pose $T_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \text{Log } |\xi|$, on a, comme on vérifie immédiatement $T_\alpha(\lambda \xi) = \lambda^{|\alpha|} T_\alpha(\xi) + \lambda^{|\alpha|} \text{Log } \lambda \xi^\alpha$. Par suite

$$\hat{T} = \sum_{|k|=-n-s} \frac{i^{|k|}}{k!} m_k(a) T_k$$

est homogène de degré $-n-s$, et C^∞ en dehors de 0. Enfin toute distribution homogène de degré $-n-s$, portée par l'origine, est nulle si s n'est pas entier positif, ou de la forme $R(\frac{\partial}{\partial x}) \delta$ où R est un polynôme homogène de degré s si $-n-s$ est entier ≥ 0 . La proposition (3.22) en résulte aussitôt.

La proposition (3.22) se généralise aisément en une proposition décrivant la transformée de Fourier partielle en ξ d'une fonction $a(x, \xi) \in C^\infty$ sur $X \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogène en ξ , si X est une variété.

Soit maintenant X un ouvert de \mathbb{R}^n , et $A \sim a(x, D)$ un opd. régulier sur X . Soit $a \sim \sum a_{m-k}$ le développement asymptotique de a , où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$ en ξ . Soit enfin, pour $k \geq -m-n$, $b_k(x, z)$ la transformée de Fourier inverse en z de la distribution $\text{pf. } a_{-m-k}(x, \xi)$. C'est donc une distribution de la forme

$$b_k(x, z) = \text{pf } b'_k(x, z) + \sum_{|\alpha|=-n-k} c'_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(z) \quad \text{si } k \leq -n$$

$$b_k(x, z) = \text{pf } b'_k(x, z) \quad \text{si } k \text{ est entier, } -n < k < 0$$

$$b_k(x, z) = b'_k(x, z) + \sum_{|\alpha|=k} c'_\alpha(x) z^\alpha \text{Log}|z| \quad \text{si } k \geq 0$$

où $b'_k(x, z)$ est C^∞ sur $X \times (R^n - \{0\})$, homogène de degré k en z et les c'_α , c''_α sont des fonctions C^∞ sur X .

En outre si $T(x, y)$ est le noyau de A , pour tout entier N la distribution

$$T(x, y) - \sum_{k \leq N} b'_k(x, x-y)$$

est une fonction de classe C^N sur $X \times X$ (en effet b'_k est de classe C^N si $k > N$, et de toute façon la différence ci-dessus est de classe $C^{N'}$ où N' tend vers $+\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$).