SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 193-211

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__193_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMMUNICATIONS ET CONFÉRENCES

FAITES AU COURS DE L'ANNÉE 1943

S'adresser, pour ce qui concerne le *Bulletin*,
à M. H. CARTAN, 95, boulevard Jourdan, Paris (14e),
et pour ce qui concerne l'administration de la Société,
à M. THIBERGE, 4, square Lagarde, Paris (5e).

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

BUREAU ET CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ POUR 1943.

Président	MM.	GAMBIER.
Vice-Présidents		DARMOIS. CHAPELON. BOULIGAND. A. CHÂTELET.
Secrétaires		H. CARTAN. THIBERGE.
Vice-Secrétaires		BRARD. EYRAUD.
Trésorier	Mme	DUBREIL.
Archiviste	MM.	DARGENTON.
Autres Membres du Conseil...........		DELSARTE. DUBOURDIEU. FAVARD. GIBRAT. GOT. HENNEQUIN. JANET. LE CORBEILLER LEDOUX. MÉTRAL. MILLOUX. MYARD. PLATRIER. VAULOT.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 21 JANVIER 1943.

Assemblée générale.

PRÉSIDENCE DE M. PLATRIER.

La Société, réunie en Assemblée générale, adopte à l'unanimité les quatre résolutions suivantes :

I. Approbation des comptes de l'exercice 1942 ;
II. Prorogation du Conseil élu le 14 janvier 1942 et élection d'un nouveau Bureau par le Conseil pour 1943 ;
III. Élévation à 100 francs de la cotisation annuelle, exception faite en faveur des boursiers de recherches pour qui la cotisation est fixée à 50 francs ;
IV. Délégation au Conseil pour tout ce qui concerne le budget de 1943, en recettes et dépenses.

Élections :

M. Bleuzen, ingénieur du Génie Maritime, présentée par MM. Barrillon et Brard; M. Belgodère, présenté par MM. Bouligand et Gérardin, sont élus à l'unanimité.

M. P. Robert fait une conférence sur les « cycliques et cyclides ».

SÉANCE DU 10 FÉVRIER 1943.

PRÉSIDENCE DE M. GAMBIER.

Élection :

M. Jean, ingénieur en chef des Industries Navales, présenté par MM. Dugas et Platrier, est élu à l'unanimité

M. R. Dugas fait une conférence sur « le principe de moindre action dans les diverses mécaniques ».

SÉANCE DU 17 MARS 1943.

PRÉSIDENCE DE M. BOULIGAND.

Élections :

M. Luc Gauthier, agrégé-préparateur à l'École Normale, présenté par MM. Élie Cartan et Bouligand; M. Gustave Choquet, boursier de recherches, présenté par MM. Bouligand et Apéry; M. Marcel Sédille, ingénieur, présenté par MM. Got et Myard, sont élus à l'unanimité.

M. Apéry fait une conférence sur « la géométrie algébrique ».

SÉANCE DU 15 AVRIL 1943.

PRÉSIDENCE DE M. GAMBIER.

Élections :

M. Victor Thébault, présenté par MM. Élie Cartan et Thiberge; M. Jean Courbon, ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté par MM. Dargenton et Thiberge; M. Stahl, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, présenté par MM. Dargenton et Thiberge, sont élus à l'unanimité.

M. Gambier fait une conférence sur « la parataxie ».

SÉANCE DU 19 MAI 1943.

PRÉSIDENCE DE M. ALBERT CHÂTELET.

M. Platrier fait une conférence sur « le rattachement de la résistance des matériaux à la théorie de l'Élasticité ».

M. Platrier prononce l'éloge funèbre de M. Émile Jouguet, mécanicien et thermodynamicien, historien et philosophe; M. le Président associe la Société à cet émouvant éloge.

SÉANCE DU 9 JUIN 1943.

PRÉSIDENCE DE M. BOULIGAND.

M. Gustave Choquet fait une conférence sur « les méthodes topologiques en représentation conforme ».

M. A. Châtelet prononce l'éloge funèbre de M. Auric, ancien président de la Société.

SÉANCE DU 12 NOVEMBRE 1943.

PRÉSIDENCE DE M. GAMBIER.

Élections :

M. Anglade, professeur au lycée de Béziers, présenté par MM. Gambier et Henri Cartan ; M. Hocquenghem, professeur au lycée Saint-Louis, présenté par MM. Gambier et Henri Cartan ; M. Benneton, professeur au lycée Carnot, présenté par MM. Albert Châtelet et Henri Cartan; M. Koszul, élève à l'École Normale, présenté par MM. Albert Châtelet et Henri Cartan ; M. Aupetit, ingénieur des Industries navales, présenté par MM. Brard et Got; M. Hendlé, ingénieur général du Génie Maritime, présenté par MM. Brard et Got, sont élus à l'unanimité.

M. Brard fait une conférence sur « l'étude des solutions forcées d'une équation différentielle non linéaire ».

SÉANCE DU 10 DÉCEMBRE 1943.

PRÉSIDENCE DE M. GAMBIER.

Élection :

M. Léonce Lesieur, professeur au lycée de Poitiers, présenté par MM. Labrousse et Thiberge, est élu à l'unanimité.

M. François Châtelet fait une conférence sur « une application de la théorie du corps des classes ».

CONFÉRENCE

DU 21 JANVIER 1943.

CYCLIQUES ET CYCLIDES;

PAR M. PAUL ROBERT.

1. Une *cyclique* F_0 est la courbe d'intersection d'une sphère S_0 et d'une quadrique $\mathcal{L}_0$: il est loisible de choisir $\mathcal{L}_0$ dans le faisceau linéaire ponctuel de quadriques dont F_0 est la biquadratique de base; parmi ces quadriques il y a quatre cônes dont les sommets s_1, s_2, s_3, s_4 sont deux à deux conjugués relativement à S_0 : K_{i0} dénote le cône de sommet s_i passant ainsi par F_0.

S_0 étant considérée comme quadrique réglée (à génératrices isotropes) les coordonnées homogènes d'un point de S_0 sont des formes linéaires en $(uv, u, v, 1)$; u et v étant les paramètres des génératrices passant par ce point dans les deux systèmes : pour que ce point appartienne à F_0, u et v doivent satisfaire à une relation doublement quadratique en u et v, traduction de l'équation ponctuelle de $\mathcal{L}_0$. Inversement une telle relation est caractéristique d'une cyclique.

Il en résulte que les inversions changent F_0 en des cycliques. Par extension il y a des cycliques *planes*, inverses de F_0 quand le pôle est sur S_0 et définies, en coordonnées symétriques $x+iy=u$, $x-iy=v$, par une équation doublement quadratique en u et v.

La notion de cyclique est ainsi *anallagmatique*. Les courbes planes suivantes sont des cas particuliers de cycliques : quartiques bicirculaires, cubiques circulaires, coniques.

Dans le cas général, F_0 est inchangée par quatre inversions dont les sphères S_i directrices ont comme centres les points s_i et sont orthogonales à S_0. Rappelons que les cinq sphères S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 sont deux à deux orthogonales et que le produit des cinq inversions (S_i) qu'elles déterminent est l'opération identique. Ces inversions sont génératrices d'un groupe fini d'ordre 16, dont toutes les opérations sont permutables.

2. L'enveloppe des cônes isotropes dont les sommets a sont sur F_0 est aussi le lieu des droites isotropes issues de a dans le plan normal à F_0 en a, et l'enveloppe des deux plans tangents à F_0 en a qui sont isotropes : c'est une surface réglée D développable ou *développable isotrope* de F_0.

A une génératrice isotrope de D correspond son homologue dans l'inversion (S_i), qui est aussi génératrice de D et coupe la première sur la sphère S_i; le point de rencontre de ces deux génératrices associées par l'inversion (S_i) a comme lieu une ligne double de la surface D dite *focale* de F_0. Pour $i = 0$ on retrouve F_0 elle-même : pour $i = 1, 2, 3, 4$ on a les focales F_1, F_2, F_3, F_4. On sait qu'un foyer d'une courbe ou d'une surface est défini comme sommet d'un cône isotrope bitangent à la courbe ou à la surface. Il n'y a pas d'autres foyers pour F_0, au sens de cette définition, que les points des focales définies précédemment : ceci résulte du fait que le cône isotrope ayant pour sommet un tel point f coupe la sphère S_0 suivant un cercle bitangent à F_0, dont le plan est par suite tangent à l'un des cônes K_{i0} le long de la droite unissant les points de contact; ces points sont donc échangés par l'inversion (S_i) et f appartient à F_i.

La focale F_i est le lieu des sommets des cônes isotropes (ou *foyers* au sens de Cayley) des cercles d'intersection par S_0 des plans tangents à K_{i0}. Le lieu des axes de ces cercles est le cône de sommet s_0 (centre de S_0) et supplémentaire du cône K_{i0} : F_i est l'intersection de la sphère S_i avec ce cône K_{0i}, c'est donc une cyclique.

Chaque focale F_i pouvant servir à définir la développable isotrope D tout comme on l'a définie à partir de F_0, chacune des cycliques $F_k (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ est focale des autres cycliques $F_l (l \neq k)$.

Par exemple, et ceci sera utilisé dans la suite, les cônes isotropes ayant comme sommets des points de F_0 coupent la sphère S_1 selon des cercles bitangents à F_1 en deux points de cette cyclique échangés par l'inversion (S_0); les plans de ces cercles sont tangents au cône K_{01}. Les axes de ces cercles ont comme lieu le cône K_{10} supplémentaire du cône K_{01} et de sommet s_1.

3. **Problème de Moutard.** — Moutard s'est posé le problème de la surface C enveloppe des sphères (P) orthogonales à une sphère fixe S_0 (*sphère directrice*), le lieu $\mathcal{L}_0$ de leurs centres P étant une quadrique donnée non développable (*déférente*). Notre but est l'étude de la surface C qu'il a appelé *cyclide*, en langage de géométrie moderne, c'est-à-dire sans calculs apparents. La cyclique F_0 intersection de la sphère S_0 et de la déférente $\mathcal{L}_0$ joue *a priori* un rôle

important dans cette étude, car les *sphères-points* (P) ont pour centres les points de F_0 : la développable D est ainsi circonscrite à la cyclide C. Les focales F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont lieux de sommets de cônes isotropes bitangents à C; elles peuvent s'appeler des focales (ordinaires) de la cyclide C.

Une transformation de contact fondamentale associe aux points de l'espace P les sphères (P) de centres P orthogonales à S_0; celles de ces sphères correspondant aux points P d'un plan T forment un réseau de sphères orthogonales au plan T et à la sphère S_0, donc orthogonales au faisceau de sphères passant par le cercle U d'intersection de T et de S_0, lequel contient les cônes isotropes ou sphères points de centres M, M' passant par U : *Les sphères* (P) *dont les centres appartiennent au plan* P *sont donc les sphères passant par les points du couple* (M, M') *qui sont les foyers de Cayley du cercle* U. M et M' sont caractérisés par le fait qu'ils s'échangent à la fois dans la symétrie de plan T, et dans l'inversion S_0. Le couple (M, M') sera dit associé au plan T.

Si P décrit une droite G de l'espace, les sphères (P) forment un faisceau linéaire dont le plan radical est perpendiculaire à G et passe par le centre s_0 de S_0; autrement dit ce sont les sphères passant par un cercle Γ_G ne dépendant que de G. Γ_G est caractérisé par son *axe* qui est G et par le fait que Γ_G est orthogonal à S_0. Deux points de Γ_G inverses dans l'inversion (S_0) sont des points (M, M') tels que le plan médiateur du segment MM' contient la droite G : (M, M') sont les points constituant le couple associé à ce plan médiateur T. Inversement à tout plan T passant par G sont associés deux points (M, M') appartenant au cercle Γ_G. En résumé, par la transformation considérée correspondent aux éléments 1 des éléments 2 comme l'indique le Tableau suivant :

1 — point P	2 — sphère (P)
1 — plan T	2 — couple de points (M, M')
1 — droite G	2 — cercle Γ_G

et à deux éléments 1 *unis* correspondent deux éléments 2 *unis* : sont dits unis un point (ou une droite) contenus dans un plan et ce même plan; sont dits unis une sphère (ou un cercle) auxquels appartient un couple (MM') et ce même couple.

Revenons à la quadrique ($\mathcal{L}_0$) lieu des points P primitivement considérés : par P passent sur ($\mathcal{L}_0$) deux génératrices G, G' de systèmes différents, auxquels correspondent les deux cercles Γ_G, $\Gamma_{G'}$

situés sur (P); au plan tangent T à $\mathcal{L}_0$ en P correspond un couple de points (M, M') communs aux cercles cosphériques Γ_G, $\Gamma_{G'}$.

Γ_G a pour foyers de Cayley les points (a, b) de rencontre de G avec S_0, dont le lieu est la cyclique F_0; $\Gamma_{G'}$ a de même pour foyers ($a'b'$) sur F_0. M et M' sont les foyers de Cayley du cercle U commun à la sphère S_0 et au plan T, et U passe par les quatre points a, b, a' b'.

Les points de contact de (P) avec son enveloppe C sont (M, M') : inversement le lieu de M et M' quand P varie sur $\mathcal{L}_0$ est une surface C doublement cerclée, lieu des cercles Γ_G et $\Gamma_{G'}$ quand G ou G' varie sur $\mathcal{L}_0$; et le plan tangent en M, par exemple, à C est le plan tangent à la sphère (P) en ce point. *La cyclide* C, *au point de vue ponctuel est donc le lieu des sommets des cônes isotropes passant par les cercles* U *que les plans tangents* T *à la déférente* $\mathcal{L}_0$ *déterminent par intersection avec la sphère directrice* S_0. Ce résultat est dû à Laguerre.

Les droites MP, M'P sont les normales en M, M' à la cyclide C.

4. Considérons maintenant, outre S_0, une autre sphère directrice S_i, par exemple S_1. Les cônes isotropes de sommets M, M' ont comme intersections (à distance finie) avec S_1 ou « traces » sur S_1, les cercles respectifs U_1, V_1. U_1 et V_1 s'échangent dans l'inversion (S_0) qui échange M et M' et conserve la sphère S_1.

Soient de même α, β, α', β', les traces sur S_1 des cônes isotropes dont les sommets respectifs sont a, b, a', b'.

La droite Ma est génératrice isotrope commune aux cônes isotropes de sommets M et a; ils ont selon cette droite même plan tangent isotrope. Ma coupe donc la sphère S_1 en un point λ du cercle U_1 qui appartient aussi au cercle α, et il y a contact en λ entre ces cercles U_1 et α.

Appelons ainsi λ, μ, λ', μ' les points de rencontre des isotropes Ma, Mb, Ma', Mb'; avec le cercle U_1 : ce dernier est tangent aux cercles α, β, α', β', sur la sphère S_1, aux points respectifs λ, μ, λ', μ'. On verrait de même que le cercle V_1 est aussi tangent aux cercles α, β, α', β', aux points transformés de λ, μ, λ', μ' dans l'inversion (S_0).

La cyclique focale F_1 de F_0, située sur la sphère S_1, ayant F_0 comme focale, est bitangente aux cercles α, β, α', β'.

Il y a plus : considérons tous les cônes du second ordre de sommet s_1 passant par les quatre génératrices s_1a, s_1b, s_1a', s_1b'. Ils coupent la sphère S_0 suivant des cycliques, dont F_0 fait partie, et qui passent par huit points fixes : a, b, a', b' et leurs inverses dans l'inversion (S_1).

Toutes ces cycliques ont chacune une cyclique focale située sur la sphère S_1 et toutes ces cycliques focales, dont F_1 fait partie, sont *bitangentes* à quatre cercles fixes tracés sur S_1 : α, β, α', β'.

Parmi les cônes du second ordre considérés, de sommet s_1, il y a le cône K_{10} et aussi le cône χ_{10} de directrice U, U passant par a, b, a', b'. La cyclique d'intersection de χ_{10} avec S_0 est formée de deux cercles, U, et son inverse V dans l'inversion (S_1). Cette *cyclique décomposée* a une développable isotrope également décomposée formée de quatre cônes isotropes : les deux cônes isotropes M et M passant par U et les deux cônes isotropes passant par V qui sont les inverses des précédents dans (S_1). Notre cyclique décomposée a une cyclique focale décomposée située sur S_1, constituée par les cercles U_1 et V_1, inchangés par l'inversion (S_1), et échangés par l'inversion (S_0).

D'après les remarques (1) sur deux cycliques focales telles que F_0 et F_1, les cônes circonscrits à ces courbes respectives et de sommets respectifs s_1 et s_0 sont supplémentaires : le cône χ_{10} est donc supplémentaire du cône χ_{01} de sommet s_0 contenant les deux cercles U_1, V_1. Ainsi le *cône* χ_{10} *de sommet* s_1 *et de base* U *est supplémentaire du cône* χ_{01} *de sommet* s_0 *et de base* U_1.

Cette propriété peut s'établir directement, à partir des seules hypothèses suivantes : les sphères S_0 et S_1 sont orthogonales et coupées par un même cône isotrope M selon les cercles U et U_1, comme il est aisé de le prouver.

5. Appelons T_1 le plan du cercle U_1 et soit P_1 le point de rencontre de la normale MP en M à la cyclide (C) avec ce plan T_1. Les points λ, μ, λ', μ' sont les projections coniques des points a, b, a', b' sur le plan T_1, M étant le centre de projection. Comme, dans le plan T, ab $a'b'$ se coupent en P, les droites $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, dans le plan T_1, se coupent en P_1.

Les cônes du second ordre K_{10} et χ_{10} ayant quatre génératrices communes s_1a, s_1b, s_1a', s_1b', la droite s_1P, commune aux plans s_1ab, $s_1a'b'$, a même plan polaire Π par rapport à ces deux cônes.

Appelons f_α, f'_α les deux points de contact du cercle α avec F_1, alignés avec s_0, puisque échangés par (S_0); définissons de même f_β, f'_β points de contact du cercle β avec F_1, $f_{\alpha'}$, $f'_{\alpha'}$, points de contact du cercle α' avec F_1, $f_{\beta'}$, $f'_{\beta'}$ points de contact du cercle β' avec F_1; tous ces couples de points sont formés de points alignés avec s_0. Les droites $s_0f_\alpha f'_\alpha$, $s_0f_\beta f'_{\beta'}$, $s_0f_{\alpha'}f'_{\alpha'}$ sont génératrices du cône K_{01}. Les droites $s_0\lambda$, $s_0\mu$, $s_0\lambda'$, $s_0\mu'$ sont de leur côté, génératrices du cône χ_{01}.

A ces génératrices des cônes K_{01} et χ_{01} correspondent des plans respectivement perpendiculaires passant par s_1 qui sont tangents aux cônes supplémentaires des précédents, savoir K_{10} et χ_{10}. Précisons : aux droites $s_0 f_\alpha f'_\alpha$, $s_0 f_\beta f'_\beta$ correspondent les plans tangents à K_{10} selon $s_1 a$, $s_1 b$, qui se coupent suivant une droite du plan Π : aux droites $s_0 f_{\alpha'} f'_{\alpha'}$, $s_0 f_{\beta'} f'_{\beta'}$ correspondent les plans tangents à K_{10} selon $s_1 a'$, $s_1 b'$ qui se coupent suivant une droite du plan Π; aux droites $s_0 \lambda$ et $s_0 \mu$ correspondent les plans tangents à χ_{10} selon $s_1 a$, $s_1 b$ qui se coupent suivant une droite du plan Π; aux droites $s_0 \lambda'$ et $s_0 \mu'$ correspondent des plans tangents à χ_{10} selon $s_1 a'$, $s_1 b'$ qui se coupent suivant une droite du plan Π.

Les éléments correspondants dans cette corrélation étant perpendiculaires, aux quatre droites précédentes du plan Π correspondent quatre plans concourants suivant une même droite : donc les plans $s_0 f_\alpha f'_\alpha f_\beta f'_\beta$, $s_0 f_{\alpha'} f'_{\alpha'} f_{\beta'} f'_{\beta'}$, $s_0 \lambda \mu$, $s_0 \lambda' \mu'$ ont une droite commune.

Le point P_1 défini au début de 5 est commun aux deux derniers de ces quatre plans, il est donc situé dans les deux autres (il est distinct de s_0). *Ainsi le point* P_1 *est situé dans les plans* $f_\alpha f'_\alpha f_\beta f'_\beta$ et $f_{\alpha'} f'_{\alpha'} f_{\beta'} f'_{\beta'}$.

6. Étudions maintenant le lieu du point P_1 quand P varie sur la quadrique $\mathcal{L}_0$; les résultats obtenus vaudront aussi pour le point analogue P'_1 d'intersection de la normale $M'P$ en M' à la cyclide C avec le plan T'_1 du cercle V_1. Supposons, en première analyse, que P varie sur une génératrice ab de la quadrique $\mathcal{L}_0$; les points a, b sont fixes, donc les cercles α et β sont fixes. La droite $\lambda\mu$ rencontre la droite fixe ab en un point σ qui est d'égale puissance par rapport à la sphère point M et aux sphères S_0, S_1, car σ est dans les plans T et T_1, plans radicaux de la sphère point M avec ces sphères respectives S_0, S_1. σ est l'intersection de ab avec le plan radical de S_0, S_1, c'est donc un point fixe.

La droite $\lambda\mu$ engendre un cône Λ de sommet σ et de directrice α, qui contient aussi β. Le point P_1 est la trace de $\lambda\mu$ sur le plan $f_\alpha f'_\alpha f_\beta f'_\beta$ qui est fixe, chacun des points f_α, f'_α, f_β, f'_β étant fixe; P_1 décrit donc la conique H de section du cône Λ par ce plan fixe. Il en est de même du point P'_1.

Cette conique H, passe par les quatre points f_α, f'_α, f_β, f'_β, qui sont communs au cône Λ et à la cyclique F_1 et déterminent le plan de H. H étant ainsi quadrisécante à F_1, une des quadriques du faisceau linéaire ponctuel dont F_1 est biquadratique de base contient la conique H : elle est déterminée par la condition de contenir un point quelconque de H et, dès lors ayant cinq points communs avec la conique H, la contient toute entière. Soit $\mathcal{L}_1$ cette quadrique, dont la définition ne fait intervenir que la génératrice ab de $\mathcal{L}_0$.

A deux génératrices ab, $a'b'$ de systemes différents sur $\mathcal{L}_0$, lesquelles se coupent en un point P, correspondent ainsi deux coniques H et H′, qui ont en commun les points P_1 et P'_1 que l'on a définis plus haut à partir du point P de $\mathcal{L}_0$. Il semble qu'à ab et $a'b'$ doivent correspondre deux quadriques telles que $\mathcal{L}_1$, contenant la première F_1 et les points $P_1P'_1$, la seconde F_1 et les points P_1, P'_1 : ces deux quadriques sont confondues car elles passent toutes deux par P_1 et appartiennent au faisceau linéaire ponctuel de base F_1.

Quand l'une des génératrices ab, $a'b'$ varie, l'autre restant fixe, cette quadrique $\mathcal{L}_1$ ne varie pas. Dès lors, elle est indépendante du choix de ab ou de $a'b'$, elle reste ainsi invariable. On a ainsi établi que le *lieu des points* P_1 *et* P'_1 *est une quadrique* $\mathcal{L}_1$ *passant par la cyclique* F_1.

Le plan tangent au point quelconque P_1 de $\mathcal{L}_1$ est déterminé par les tangentes en ce point aux coniques H et H′. Or la tangente à H est dans le plan tangent en P_1 au cône Λ qui n'est autre que le plan T_1 du cercle U_1, car U_1 est tangent aux cercles α et β en λ et μ, le plan des tangentes à α et β aux points respectifs λ, μ est donc T_1. On verrait de même que la tangente à H′ en P_1 est aussi dans le plan T_1. Le plan *tangent à la quadrique* $\mathcal{L}_1$ *en* P_1 *est donc le plan* T_1.

La cyclide C peut être considérée comme lieu d'un foyer du cercle U_1 de section de la sphère S_1 par un plan tangent quelconque T_1 à la quadrique $\mathcal{L}_1$: c'est la définition de Laguerre d'une cyclide de sphère directrice S_1 et de déférente $\mathcal{L}_1$.

En résumé la cyclide C est susceptible de quatre générations analogues à sa génération primitive à l'aide de la sphère S_0 et de la quadrique déférente $\mathcal{L}_0$. Au total il existe cinq sphères directrices $S_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ et cinq déférentes $\mathcal{L}_i$ correspondantes. C'est le résultat célèbre établi par Moutard.

7. Le cône Λ que nous avons considéré est circonscrit à la quadrique $\mathcal{L}_1$ le long de la conique H. Considérons un plan isotrope quelconque tangent à la quadrique $\mathcal{L}_0$, on l'obtient comme un des plans isotropes passant par une génératrice quelconque ab de $\mathcal{L}_0$.

Ce plan est donc tangent aux cônes isotropes de sommets a et b, donc tangent aussi à leurs « traces » α et β sur la sphère S_1 : il passe d'ailleurs par le sommet σ du cône Λ ; c'est donc un plan tangent au cône Λ. Comme Λ est le cône circonscrit à $\mathcal{L}_1$ de sommet σ, notre plan isotrope est tangent à la quadrique $\mathcal{L}_1$. Ainsi tout plan isotrope tangent à l'une des déférentes est tangent aux quatre autres. Autrement dit :

Les *cinq déférentes sont des quadriques homofocales.*

Les plans isotropes tangents à ces quadriques enveloppent une développable Δ qui est circonscrite à la cyclide C, mais selon l'ombilicale, qu'elle admet comme ligne double.

En effet le seul cas où le point quelconque M de C est rejeté à l'infini est celui où le cercle U, dont M est foyer, est tangent à l'ombilicale, c'est-à-dire où le plan T est isotrope. Le point P reste généralement, dans ces conditions, à distance finie. Le plan tangent à la sphère (P) en M, qui, par continuité, est encore plan tangent à C en M passe par la tangente à l'ombilicale en M et par le centre P de la sphère (P), c'est donc le plan T devenu isotrope, ce qui établit le résultat annoncé.

Les focales des quadriques homofocales $\mathcal{L}_i$ sont donc des focales *singulières* de la cyclide C, dont l'ombilicale est ligne double. Les plans tangents à C en un point de cette ligne sont les deux plans isotropes passant par ce point et tangents à la quadrique $\mathcal{L}_0$.

COMMUNICATION

FAITE A LA SECTION DE CLERMONT-FERRAND LE 21 JANVIER 1943.

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE LA SPHÈRE S^n.

PAR M. JACQUES LABOUREUR.

Soit S^n la sphère à n dimensions de centre O et de rayon 1 dans l'espace R^{n+1}. Considérons le groupe G_n de tous les automorphismes de cette sphère conservant l'orientation, et le sous-groupe Ω_{n+1} constitué par les rotations de S^n, c'est-à-dire le groupe orthogonal connexe à $n+1$ variables. Alors que la topologie de Ω_{n+1} est assez bien connue, on ne sait presque rien sur celle de G_n, dans le cas où $n \geq 2$. Nous nous proposons, dans cet exposé, d'étudier les relations entre ces deux groupes.

1. Fibration d'un groupe topologique (¹). — *a*. Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe, $B = G/H$ l'espace homogène correspondant et p la projection canonique de G sur B. Soit $x_0 \in B$ la projection de l'unité e de G. Pour que la décomposition de G en classes suivant H soit une fibration, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : (α) Il existe dans B un voisinage V de x_0 admettant dans G une *section* (ou système continu de représentants) relativement à la projection p; c'est-à-dire il existe une application continue s de V dans G telle que $p \circ s$ soit l'application identique de V. Si cette condition est remplie, on peut définir dans G une structure d'espace fibré correspondant au groupe structural ${}_tH$ (groupe des translations à gauche de H), de symbole $G(B, H, {}_tH, \ldots)$.

(¹) Pour les définitions et notations relatives à la Topologie générale et aux groupes topologiques, *voir* [1]; pour les espaces fibrés, *voir* [2], [3], [4]. (Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie donnée en Appendice.)

b. Soit K un autre sous-groupe de G, permutable avec H, et tel que G soit produit (pas forcément direct) de H et K

$$G = HK = KH.$$

Soit L l'intersection de H et K. Il existe une application canonique, biunivoque et continue, de K/L sur G/H. Pour que ce soit un homéomorphisme, il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit vérifiée (1) : 1° K est ouvert dans G; 2° G/H est séparé, c'est-à-dire H est fermé, et K/L est compact. En supposant ceci réalisé, on voit facilement que si la décomposition de K suivant L est une fibration, il en est de même de la décomposition de G suivant H.

c. Appliquons ce qui précède au groupe G_n. Soit G_n^0 le groupe d'isotropie de $x_0 \in S^n$ (sous-groupe de G_n laissant fixe x_0). On voit facilement que G_n^0 est fermé dans G_n et que G_n est le produit de G_n^0 et Ω_{n+1}

$$G_n = G_n^0 \Omega_{n+1} = \Omega_{n+1} G_n^0. \tag{A}$$

La condition 2° ci-dessus est vérifiée et nous pouvons énoncer : *Le groupe* G_n *est fibré par* G_n^0 *sur* S^n.

2. Rétraction de G_n^0 sur G_{n-1}. — *a.* Soit E un espace topologique, F un sous-espace de E. On dit que F est ***rétracte de déformation*** de E s'il existe une application continue g du produit topologique $E \times [0, 1]$ sur E telle que :

1° $g(x, 1) = x$ quel que soit $x \in E$;
2° $g(x, 0) \in F$ quel que soit $x \in E$;
3° $g(x, t) = x$ si $x \in F$, quel que soit $t (0 \leqq t \leqq 1)$ (2).

On dit que E est ***contractile*** sur F si l'application identique de E est homotope à une application de E *sur* F, c'est-à-dire si l'on impose seulement à g les conditions 1° et 2°. On a, dans ce cas, le lemme de Kneser [5] : E *et* F *ont même nombre de composantes continûment connexes* (3) *et toute composante de* E *contient une composante de* F *et une seule. Si* E *est continûment connexe*, F *l'est*

---

(1) [1], Chap. I, § 9, prop. 2 et § 10, coroll. 2 du Th. 1.

(2) On remplace d'habitude 3° par la condition plus faible : $g(x, 0) = x$ si $x \in F$.

(3) On appelle composante continûment connexe de E l'ensemble des points de E qui peuvent être joints à l'un d'eux par une courbe continue (image continue du segment [0, 1]).

aussi, et leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. On peut ajouter la remarque que, dans ce cas, les groupes d'homotopie de tous ordres de E et F sont isomorphes.

b. Les points de la boule B^n intérieure à S^{n-1} peuvent être représentés biunivoquement par les couples (r, x) $(0 \leqq r \leqq 1,\ x \in S^{n-1})$, à condition d'identifier tous les points $(0, x)$. Soit Γ_n le groupe des automorphismes de B^n conservant l'orientation. Γ_n contient le sous-groupe Γ'_n des automorphismes « radiaux » de B^n définis par $(r, x) \rightarrow (r, \alpha(x))$, où $x \rightarrow \alpha(x)$ est un automorphisme de S^{n-1}, et Γ'_n est évidemment isomorphe à G_{n-1}. On a le théorème d'Alexander [5], [6] : *Γ'_n est rétracte de déformation de Γ_n.* En effet, tout $\varphi_1 \in \Gamma_n$ définit un automorphisme de S^{n-1}, donc un automorphisme radial φ_0 bien déterminé. Soit h_t l'homothétie de centre O et de rapport t. La fonction

$$\begin{aligned} g(\varphi_1, t) &= \varphi_0 && \text{pour } r \geqq t \\ &= h_t \varphi_1 h_t^{-1} && \text{pour } r \leqq t \end{aligned}$$

définit la rétraction de Γ_n sur Γ'_n. On remarquera que $g(\varphi_1, t)$ définit un homomorphisme de Γ_n dans lui-même, c'est-à-dire que

$$g(\varphi_1 . \psi_1, t) = g(\varphi_1, t) . g(\psi_1, t).$$

c. Soit j une application de B^n sur S^n telle que S^{n-1} soit appliqué sur x_0 et que l'intérieur de B^n soit appliqué topologiquement sur $S^n - \{x_0\}$. La correspondance qui à tout $\varphi \in \Gamma_n$ associe $f = j \circ \varphi \circ \overset{-1}{j} \in G^0_n$ est un isomorphisme. On peut alors transposer la rétraction d'Alexander de Γ_n sur Γ'_n aux images topologiques G^0_n et G_{n-1}, et énoncer le

Théorème I. — *Il existe une rétraction de déformation homomorphe de G^0_n sur un sous-groupe isomorphe à G_{n-1}.*

Pour simplifier, nous considérerons, dans tout ce qui suit, G_{n-1} comme un sous-groupe de G^0_n.

d. Du lemme de Kneser, de la rétraction précédente et de la relation (A), on déduit par récurrence le

Théorème II. — *Le groupe G_n est continûment connexe.*

Ce théorème, qui semble nouveau pour $n > 2$, est d'ailleurs une conséquence du théorème III ci-dessous. On peut en donner une application à la théorie des nœuds. Étant donnée une subdivision simpliciale de S^3, un nœud est une image topologique simpliciale d'une circonférence dans S^3, et deux nœuds sont équivalents s'ils sont homologues dans un homéomorphisme de tout l'espace conservant l'orientation. Il résulte du théorème II que deux nœuds équivalents sont homologues dans une *isotopie* de tout l'espace ([1]).

3. Fibration associée au produit direct de deux sous-groupes d'un groupe topologique. — Reprenons les notations du n° **1**, et soit $D = H \times K$ le produit *direct* de H et K. A tout élément (a, b) de D, faisons correspondre l'élément $q(a, b) = a.b = \tau$ de G. q est une application continue de D sur G. Soit $\Delta = \overset{-1}{q}(e)$ l'image inverse de e; on voit aisément que Δ est l'ensemble des éléments (l, l^{-1}), où $l \in L$. Δ est homéomorphe à L, et l'on peut y définir une structure de groupe image de celle de L, mais il est à remarquer que, muni de cette structure, Δ n'est pas un sous-groupe de D. Les classes d'équivalence définies dans D par l'application q, c'est-à-dire les images inverses $\Delta_\tau = \overset{-1}{q}(\tau)$ des éléments $\tau \in G$, sont toutes homéomorphes. De façon précise, à tout point (a_0, b_0) de Δ_τ correspond un homéomorphisme bien déterminé $h_{\tau,0}$ de Δ_τ sur Δ, et si $h_{\tau,1}$ est un autre homéomorphisme de Δ_τ sur Δ, correspondant au point (a_1, b_1) de Δ_τ, on voit que $h_{\tau,1} h_{\tau,0}^{-1}$ est un automorphisme de Δ, défini par

$$\varphi_\lambda(l, l^{-1}) = (\lambda . l, l^{-1} . \lambda^{-1}),$$

où $\lambda = a_1^{-1} a_0 = b_1 b_0^{-1} \in L$. L'ensemble de ces automorphismes φ_λ forme un groupe S isomorphe à L. Pour que D soit un espace fibré (de base G, de fibre Δ, de groupe structural S), il faut encore qu'il soit localement un produit topologique. Cette condition n'est pas toujours vérifiée, mais elle l'est en particulier si l'on se place dans les conditions du n° **1**, *b*, à savoir si K/L et G/H sont homéomorphes et si la décomposition de K suivant L est une fibration. Dans ce cas, D admet une fibration qui n'est pas triviale, en ce sens qu'elle ne correspond pas à une décomposition de D suivant un sous-groupe.

Remarquons que si G n'est pas abélien, on obtient une deuxième structure fibrée, en définissant la projection de D sur G par $q'(a, b) = b.a$.

4. Rétraction de G_n sur Ω_{n+1}. — *a*. En appliquant les résultats du n° 1, *c*, on voit que $D_n = G_n^0 \times \Omega_{n+1}$ est fibré sur G_n par une

([1]) Ceci constitue une réponse à une question de Seifert-Threlfall (*Lehrbuch der Topologie*, p. 323, Note 39).

fibre Δ homéomorphe à Ω_n. On peut alors démontrer par récurrence le

THÉORÈME III. — *Il existe une rétraction de déformation r_t de G_n sur Ω_{n+1} vérifiant la condition suivante :*

(C) *Si τ, $\tau' \in G_n$, $\tau^{-1}\tau' \in \Omega_{n+1}$, alors*

$$r_t^{-1}(\tau).r_t(\tau') = \tau^{-1}\tau'$$

quel que soit t.

Ce théorème est évidemment vrai pour $n = 0$, car $G_0 = \Omega_1 = \{e\}$. Supposons-le vrai pour $n - 1$, et démontrons-le pour n. Tout d'abord, on remarque que la condition (C) est vérifiée pour la rétraction d'Alexander de G_n^0 sur G_{n-1}, puisque celle-ci est homéomorphe. Avec les hypothèses faites, il existe donc une rétraction de déformation de G_n^0 sur Ω_n, vérifiant (C). On en déduit qu'il existe une rétraction de déformation de $D_n = G_n^0 \times \Omega_{n+1}$ sur $\Omega_n \times \Omega_{n+1}$, et que les fibres restent conservées pendant la rétraction, ce qui permet, en composant avec la projection q, d'en déduire une rétraction de $G_n^0.\Omega_{n+1} = G_n$ sur $\Omega_n.\Omega_{n+1} = \Omega_{n+1}$. Enfin on vérifie immédiatement que cette rétraction satisfait encore à la condition (C).

Remarque. — En utilisant la fibration associée à la projection q', on montrerait de même l'existence d'une rétraction de déformation s_t de G_n sur Ω_{n+1}, satisfaisant à (C') : si $\tau'\tau^{-1} \in \Omega_{n+1}$, alors

$$s_t(\tau').s_t^{-1}(\tau) = \tau'\tau^{-1}$$

quel que soit t.

b. Relativement à l'espace homogène $E_n = G_n/\Omega_{n+1}$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME IV. — *L'espace G_n est isomorphe au produit topologique $E_n \times \Omega_{n+1}$.*

Pour cela, il suffit de montrer que E_n admet une section dans G_n relativement à la décomposition de G_n en classes suivant Ω_{n+1}. A tout $\tau \in G_n$ faisons correspondre son image $r(\tau) \in \Omega_{n+1}$ par la rétraction $r = r_0$, et posons $\sigma(\tau) = \tau.r^{-1}(\tau)$. On vérifie que : 1° si $\tau^{-1}\tau' \in \Omega_{n+1}$, alors $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$, d'après (C); 2° quel que soit $\tau \in G_n$, on a $\sigma^{-1}(\tau)\tau \in \Omega_{n+1}$. Il en résulte que σ définit bien une section de E_n dans G_n.

COROLLAIRE I. — *L'espace E_n est contractile en un point.*

Corollaire II. — *Tous les groupes d'homotopie de* E_n *sont nuls.*

Corollaire III. — *Tout espace fibré par une sphère* S^n, *l'espace de base étant un complexe, admet des structures plus précises correspondant aû groupe structural* Ω_{n+1}, *et toutes ces structures sont de même classe.*

Ce dernier corollaire résulte du corollaire II et d'un résultat de M. Ehresmann [4]. Il explique et justifie le rôle joué par le groupe orthogonal dans la théorie des espaces fibrés par des sphères.

Bibliographie.

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I, II, III (*Act. Sc. et Ind.* Paris, 1940-1942).

[2] Ch. Ehresmann et J. Feldbau, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 945-948).

[3] Ch. Ehresmann, *Espaces fibrés associés* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 762-764).

[4] Ch. Ehresmann, *Espaces fibrés de structures comparables* (*C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 144-147).

[5] H. Kneser, *Die Deformationssätze der einfachzusammenhängenden Flächen* (*Math. Zeitschr.*, 25, 1926, p. 362-372).

[6] J. W. Alexander, *On the deformation of an n-cell* (*Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A.*, 9, 1923, p. 406-407).