Bulletin de la S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 52-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__52_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 MARS 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société :

M. Pelletreau, présenté par MM. Laisant et Raffy; M. Combebiac, présenté par MM. Laisant et Courtin; M. Vassilief, présenté par MM. Laisant et Lecornu.

Communications :

M. Vicaire : *Observations sur le Traité de Mécanique de Kirchhoff.*

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Résumé d'un Mémoire sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (¹).

Un système *linéaire* de points cotés (α_i) est défini par les équations

$$(1) \qquad x = \frac{m_i\alpha_i + n_i}{r_i\alpha_i + s_i}, \qquad y = \frac{p_i\alpha_i + q_i}{r_i\alpha_i + s_i}.$$

Si $r_i = 0$, auquel cas ces équations se réduisent à

$$(1') \qquad x = m_i\alpha_i + n_i, \qquad y = p_i\alpha_i + q_i,$$

le système est dit *régulier*, parce que les points (α_i) forment alors une graduation régulière sur la droite qui les supporte.

L'alignement de trois points choisis dans les systèmes (α_1), (α_2), (α_3) s'exprime par une équation de la forme

$$(\mathrm{E}) \quad \mathrm{A}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \mathrm{B}_1\alpha_2\alpha_3 + \mathrm{B}_2\alpha_3\alpha_1 + \mathrm{B}_3\alpha_1\alpha_2 + \mathrm{C}_1\alpha_1 + \mathrm{C}_2\alpha_2 + \mathrm{C}_3\alpha_3 + \mathrm{D} = 0.$$

Réciproquement, à quelles conditions une équation de la forme (E) exprime-t-elle l'alignement de trois points pris dans trois systèmes linéaires *réels* (α_1), (α_2), (α_3)?

Ce problème est traité et discuté en détail dans la première Partie du Mémoire. La solution peut s'en résumer ainsi :

Si l'on pose

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 + \mathrm{B}_2\mathrm{C}_2 + \mathrm{B}_3\mathrm{C}_3 - \mathrm{AD},$$

$$\mathrm{E}_i = \mathrm{AC}_i - \mathrm{B}_j\mathrm{B}_k, \quad \mathrm{F}_i = \mathrm{F}_0 - 2\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i, \quad \mathrm{G}_i = \mathrm{B}_i\mathrm{D} - \mathrm{C}_j\mathrm{C}_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

et que l'on considère les trois équations

$$\varphi_i(\rho) = \mathrm{E}_i\rho^2 + \mathrm{F}_i\rho + \mathrm{G}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

on remarque : 1° que le binôme caractéristique

$$\mathrm{F}_i^2 - 4\mathrm{E}_i\mathrm{G}_i = \Delta$$

a la même valeur pour les trois équations, Δ étant le discriminant du premier membre de l'équation (E) rendu homogène, ce

(¹) *Acta mathematica*, t. XXI, p. 301.

qui implique que ces trois équations ont ensemble leurs deux racines réelles et inégales, égales ou imaginaires; 2° que les trois couples de racines peuvent être répartis en deux groupes (ρ') et (ρ'') définis par les égalités

$$\frac{d}{d\rho'_1}\varphi_1(\rho'_1) = \frac{d}{d\rho'_2}\varphi_2(\rho'_2) = \frac{d}{d\rho'_3}\varphi_3(\rho'_3)$$

et

$$\frac{d}{d\rho''_1}\varphi_1(\rho''_1) = \frac{d}{d\rho''_2}\varphi_2(\rho''_2) = \frac{d}{d\rho''_3}\varphi_3(\rho''_3).$$

Cela posé, les coefficients des équations (1) (pour $i = 1, 2, 3$) s'expriment en fonction des coefficients de (E) par des formules où les ρ' et ρ'' entrent linéairement. On en conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (E) *soit représentable par alignement entre des points pris dans trois systèmes linéaires est que le discriminant* Δ *soit supérieur ou égal à zéro.*

Si $\Delta > 0$, les droites portant les trois systèmes linéaires forment un triangle; si $\Delta = 0$, elles sont concourantes.

Une transformation homographique permet toujours de rendre un des trois systèmes linéaires réguliers, c'est-à-dire (pour $i = 1, 2$ ou 3) d'amener les équations (1) à la forme (1'). Cette transformation peut-elle être choisie de manière qu'un second système linéaire, voire même les trois deviennent réguliers? A cette question, résolue dans la seconde Partie du Mémoire, la réponse est :

Les trois systèmes peuvent être rendus réguliers à la fois lorsque A *étant nul, ou bien les quantités* E_1, E_2, E_3 *sont toutes trois différentes de zéro, ou bien deux de ces quantités sont nulles, la troisième et* Δ *étant ensemble ou nuls ou non nuls.*

Si, les trois quantités E_1, E_2, E_3 *étant nulles,* A *et* Δ *ne le sont pas, un seul des trois systèmes linéaires peut être rendu régulier.*

Dans tous les autres cas, on peut rendre réguliers simultanément deux des systèmes.

La principale difficulté algébrique du double problème ci-dessus tient à la considération des cas où une, deux ou trois [1]

---

[1] Si plus de trois de ces racines étaient infinies, elles le seraient toutes les

des racines ρ' et ρ'' deviennent infinies. On verra, dans le Mémoire ici résumé, comment la solution, dans ces divers cas, a pu être déduite de la solution générale, grâce à une méthode spéciale de passage à la limite.

M. Le Roux adresse la Communication suivante :

Sur l'intégrabilité des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Laplace.

Dans un précédent Mémoire [1] j'ai donné certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

pour que cette équation soit intégrable par la méthode de Laplace, dans le cas où a et b sont des fonctions rationnelles de x et y. On peut appliquer la même méthode à l'équation générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0. \tag{2}$$

Soient h et k les invariants de M. Darboux

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Supposons que ces deux fonctions admettent une ligne de pôles d'ordre $n+1$ représentée par une équation analytique $y = \theta(x)$.

En regardant h et k comme des fonctions de y, on pourra écrire

$$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{H_0\theta'(x)}{(y-\theta)^{n+1}} + \frac{H_1\theta'}{(y-\theta)^{n}} + \dots, \\ k &= \frac{K_0\theta'}{(y-\theta)^{n+1}} + \frac{K_1\theta'}{(y-\theta)^{n}} + \dots, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

H_i, K_i désignant des fonctions de x.

---

six, et le premier membre de (E) se décomposant en un produit de facteurs ne contenant chacun que l'un des paramètres, le problème n'existerait plus.

(1) *Annales de l'École Normale*, 1895.

Supposons d'abord $n > 1$. Les invariants h_1, h_2, ... de la suite de Laplace seront encore des expressions de la forme (3). Le premier coefficient de h_n sera égal à

$$H_0 + n(H_0 - K_0).$$

Pour que l'équation (2) soit intégrable par l'application répétée de la méthode de Laplace, il faut donc que $\frac{H_0}{H_0 - K_0}$ soit un nombre entier.

Supposons maintenant $n = 1$. Dans le calcul de h_1 par la formule

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y},$$

nous aurons à tenir compte du terme

$$\frac{2\theta'}{(y-\theta)^2}$$

provenant de la dérivée seconde de $\log h$. Nous trouvons ainsi, pour le premier coefficient de h_1,

$$2H_0 - K_0 + 2 = H_0 + (H_0 - K_0) + 2.$$

En général, le premier coefficient de h_n a pour valeur

$$H_0 + n(H_0 - K_0) + n(n+1).$$

Pour que l'équation soit intégrable, il faut donc qu'il existe un nombre entier n satisfaisant, quel que soit x, à l'équation

$$\frac{H_0}{n} - \frac{K_0}{n+1} + 1 = 0.$$

Les conditions que nous venons d'obtenir ne sont évidemment pas suffisantes, mais elles constituent des *caractères d'exclusion* d'une extrême simplicité.

SÉANCE DU 16 MARS 1898.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Borel : *Sur un théorème analogue au théorème de Goldbach.*

M. d'Ocagne communique une solution, donnée par M. le major Mac-Mahon, d'un problème de partition qu'il avait formulé à l'occasion de ses recherches sur la détermination de tous les types possibles d'abaques pour les équations à n variables.

M. Delannoy adresse une Note *Sur la probabilité des événements composés.*

M. Zaremba adresse une Communication *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$.

M. Beudon adresse une Note *Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*