

BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 121-131

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__121_0

© Bulletin de la S. M. F., 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 JUIN 1897.

PRÉSIDENTE DE M. PICARD.

Communications :

M. Lecornu : *Sur l'engrenage à fuseaux.*

M. Touche fait la Communication suivante :

**Calcul de la résistance de l'air à un disque,
pour la vitesse de 20 mètres par seconde.**

Nous nous proposons de nous appuyer sur les équations que nous avons établies précédemment (1), pour évaluer la résistance supportée par un disque se mouvant dans l'air, avec une vitesse de 20^m par seconde, la surface de ce disque étant de 1^{m²}.

Nous considérerons le cas de l'égalité constante des longueurs que nous avons désignées par ds_1 et ds'_1 , car nous avons observé que cette égalité conduit à des courbes orthogonales aux trajectoires, bien régulières, et convient au cas théorique où la masse fluide est complètement immobile à une distance suffisante du corps immergé, sans que ses différentes parties aient la moindre vitesse, les unes par rapport aux autres.

Nous avons trouvé que la courbe orthogonale aux trajectoires relatives à un disque a pour asymptote une ligne partant du centre du disque et inclinée de 56° sur sa surface. Le fluide ambiant reste immobile dans l'intérieur d'un cône, ayant son sommet au centre du disque, et il s'infléchit brusquement lorsqu'il est rencontré par la surface idéale de ce cône.

Le mouvement du disque se communique aux parties fluides, suivant les courbes orthogonales aux trajectoires, dans le cas où $\frac{v}{\xi}$ est très petit, en appelant v la vitesse du fluide suivant la trajectoire et ξ la vitesse de transmission du mouvement, ou autre-

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, Tomes XXI (1893), XXIII (1895), XXIV (1896), XXV (1897).

ment dit, la vitesse du son dans le fluide considéré. Les courbes trajectoires et les courbes orthogonales aux trajectoires appartiennent alors à une famille de Lamé. Mais, dans le cas où $\frac{v}{\xi}$ a une valeur appréciable, le mouvement se communique, suivant une courbe inclinée sur chaque courbe orthogonale qu'elle rencontre, de l'angle dont la tangente est $\frac{v}{\xi}$; car, tandis que le fluide se meut suivant la trajectoire avec la vitesse v , le mouvement se transmet suivant la courbe orthogonale à la trajectoire avec la vitesse ξ .

Dans le cas d'une vitesse très petite, nous avons trouvé, comme limite de la masse fluide déviée par le disque, une ligne inclinée de 56° sur la surface du disque. Si nous considérons la vitesse de 20^m , la limite sera inclinée sur cette surface de l'angle $56^\circ - \text{arc tang } \frac{20}{340}$, en considérant le fluide comme de l'air, pour lequel la vitesse du son est de 340^m . La vitesse du fluide, étant de 20^m au commencement de l'inflexion brusque, devient à la fin : $12^m, 1591$. La pression qui correspond à cette vitesse est $16^{ks}, 6216$ en considérant la densité de l'air à 0° et à $0^m, 75$, et en calculant la pression à l'aide de la première des équations générales du mouvement des fluides, transformées, simplifiées en y supposant le mouvement permanent et la densité constante, car jusqu'à la vitesse de 20^m par seconde, la densité peut être regardée comme constante.

A partir de l'inflexion brusque, les trajectoires fluides s'inclinent progressivement, jusqu'à ce qu'elles deviennent parallèles à la surface du disque, et si nous appelons α l'angle que la tangente à la trajectoire fait avec la surface du disque et β l'angle que le rayon vecteur partant du centre du disque et aboutissant à chacun des points considérés fait avec la même surface, les deux premières équations générales du mouvement des fluides transformées nous donnent, dans le cas de la densité constante, les deux relations

$$dp = \rho v_1^2 \text{ tang}(\alpha + \beta) dx,$$

$$v_1^2 - v_0^2 = \frac{2}{\rho} (p_0 - p_1),$$

dp étant l'accroissement de la pression, ρ la densité de la masse,

p_0 et p_1 les pressions correspondant aux vitesses v_0 et v_1 . Ces équations permettent de calculer, de proche en proche, les augmentations des pressions et les diminutions des vitesses.

Nous arrivons ainsi à la pression de $24^{\text{kg}}, 4459$ pour la résistance relative à la partie antérieure du disque. La vitesse du fluide le long du disque est de $5^{\text{m}}, 6731$. Si nous considérons le disque comme terminé, non pas par une petite surface cylindrique, mais par une surface conique de peu de hauteur, l'arête du tronc de cône étant inclinée sur la surface du disque de $73^{\circ} 31' 17''$, nous aurons une inflexion brusque du fluide, partant de l'intersection du tronc de cône avec la surface du disque; les vitesses près de l'arête du tronc de cône, après l'inflexion brusque, seront à celles près de la surface du disque, avant cette inflexion, dans le rapport représenté par l'inverse du sinus de $16^{\circ} 28' 43''$ (complément de $73^{\circ} 31' 17''$), et nous aurons ainsi la vitesse de 20^{m} près de l'arête du tronc de cône. Nous pouvons, du reste, ne considérer l'arête de ce tronc de cône que suivant une longueur négligeable par rapport au rayon du disque. Nous aurons donc toujours sensiblement $24^{\text{kg}}, 4459$ pour la résistance relative à la partie antérieure du disque. La formule que nous avons donnée pour calculer la contrepression à l'arrière, provenant d'une poupe fluide, se réduit alors à

$$P - P_1 = \frac{\rho}{2}$$

et donne $26^{\text{kg}}, 3674$ pour la contrepression. En ajoutant la pression et la contrepression, on obtient $50^{\text{kg}}, 8133$. En divisant par 400, carré de la vitesse, nous obtenons $0^{\text{kg}}, 127$. Ce chiffre est un peu inférieur à celui de $0^{\text{kg}}, 129$ que M. Ricour a trouvé, en opérant à l'aide de deux disques, de 1^{m^2} de surface, placés de chaque côté de l'abri du mécanicien, sur une locomotive lancée à une vitesse d'environ 20^{m} par seconde (1).

Nous ne croyons pas qu'il y ait lieu de considérer le frottement, pour la résistance provenant de la partie antérieure du disque. Selon nous, la considération du frottement est une conséquence

(1) *Notice sur les prix de revient de la traction et sur les économies réalisées par l'application de diverses modifications aux machines locomotives*, par M. RICOUR (*Annales des Ponts et Chaussées*, septembre 1885).

de la considération du temps que le mouvement met à se transmettre dans les corps, d'un point à un autre, et nous croirions faire double emploi si nous ajoutions la valeur d'un terme, dû au frottement, au résultat de calculs qui comprennent la vitesse du son. Il n'y a lieu de considérer le frottement que comme cause de la contrepression de l'arrière et nous l'avons fait en établissant la formule qui donne cette contrepression.

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une propriété caractéristique des hélicoïdes.

Les hélicoïdes appartiennent, comme on sait, à la classe des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation. De plus, les lignes tracées sur ces surfaces et le long desquelles chaque rayon principal conserve la même valeur coupent les lignes de courbure sous un angle constant. Ossian Bonnet s'est proposé (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLII, p. 110-111) de trouver toutes les surfaces qui jouissent de cette double propriété. Il démontre que, pour toute relation donnée entre les rayons de courbure principaux, il existe une surface répondant à la question (en fait, il y en a une double infinité); puis il écrit : *Cette surface est un hélicoïde à profil courbe*, et n'ajoute pas un mot.

L'affirmation est exacte, mais elle a besoin d'être justifiée. Je vais montrer que la preuve en est contenue dans mon *Mémoire Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation*, inséré au Tome XXI de ce *Bulletin*.

En effet, Ossian Bonnet a implicitement établi que les surfaces cherchées sont applicables sur des surfaces de révolution, lorsque, partant de leur élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = \frac{\varphi^2(k)}{k^2} du^2 + \frac{[\varphi(k) - k\varphi'(k)]^2}{\varphi'^2(k)} dv^2,$$

il a prouvé que k était une fonction du seul argument $u + mv$, où m est une constante. Dès lors les surfaces dont il s'agit étant applicables sur des surfaces de révolution et ayant leurs courbures principales fonctions l'une de l'autre, sont parmi celles que concerne mon travail. Or j'ai prouvé que ces surfaces sont nécessai-

rement des hélicoïdes, quand un certain angle τ est fonction du seul paramètre β , ainsi que les deux rayons principaux, l'élément linéaire étant mis sous la forme

$$(2) \quad ds^2 = W^2(\beta)(dx^2 + d\beta^2).$$

Cet angle τ est lié aux rotations du trièdre mobile par les relations

$$p = V_1(\beta) \cos \tau, \quad p_1 + q = 2V_1(\beta) \sin \tau,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{2p}{p_1 + q} = \cot \tau.$$

Mais si l'on représente par ϖ l'angle d'une des lignes de courbure de la surface avec la ligne coordonnée $\beta = \text{const.}$, on pourra remplacer dx et $d\beta$ respectivement par $\cos \varpi$ et $\sin \varpi$ dans l'équation différentielle des lignes de courbure

$$p(dx^2 - d\beta^2) + (p_1 + q) dx d\beta = 0,$$

ce qui donnera

$$\text{tang } 2\varpi = -\frac{2p}{p_1 + q} = -\cot \tau.$$

Donc, quand l'angle ϖ est fonction de ν seulement, la surface est un hélicoïde.

Cette conclusion semble tomber en défaut pour les surfaces à courbure totale constante parce qu'il n'est plus évident que, l'élément linéaire d'une telle surface étant mis sous la forme (2), ses deux rayons de courbure principaux soient fonctions de β . Mais il en est bien ainsi, comme nous allons le démontrer. En effet, l'élément linéaire (1) convient à une surface dont les rayons de courbure principaux ont respectivement pour expressions

$$R_1 = \varphi(k), \quad R_2 = \varphi(k) - k\varphi'(k).$$

Le produit $R_1 R_2$ sera constant si l'on prend $\varphi(k) = \sqrt{k^2 + a}$. vient alors

$$ds^2 = \frac{(k^2 + a) du^2 + a^2 dv^2}{k^2}.$$

Nous supposons en outre que k est une fonction de $u + mv = t$. Chassant u de l'expression ci-dessus, on trouve

$$ds^2 = \frac{m^2(k^2 + a) + a^2}{k^2} \left[dv^2 - \frac{2m(k^2 + a)dv dt}{m^2(k^2 + a) + a^2} + \frac{(k^2 + a)dt^2}{m^2(k^2 + a) + a^2} \right].$$

Faisons le changement de variable

$$\alpha = \nu - 2m \int \frac{(k^2 + a) dt}{m^2(k^2 + a) + a^2};$$

il viendra

$$ds^2 = \frac{m^2(k^2 + a) + a^2}{k^2} [dx^2 + F^2(t) dt^2].$$

Posant enfin $F(t) dt = d\beta$, on arrivera à la forme (2), et l'on voit que k sera une fonction de β ; il en sera de même de R_1 et de R_2 , ce qui complète la démonstration. En conséquence, toute surface dont les rayons principaux sont liés par une relation, et dont les lignes de courbure font avec chaque ligne d'égale courbure un angle constant tout le long de cette ligne, est un hélicoïde.

SÉANCE DU 16 JUIN 1897.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communication :

M. Bricard : *Sur certaines propriétés des cubiques circulaires.*

SÉANCE DU 7 JUILLET 1897.

PRÉSIDENTE DE M. BOCHE.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Fontené, présenté par MM. Laisant et Bricard.

Communications :

M. Raffy : *Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.*

M. Blutel : *Sur les polygones inscrits et circonscrits à deux cercles.*

M. Bricard : *Théorème sur les systèmes articulés.*

M. Cyparissos STÉPHANOS adresse la Note suivante :

Sur le temps solaire moyen.

1. On est habituellement disposé à croire que le temps solaire moyen actuellement adopté est aussi approché que possible du temps solaire vrai. Si cela était, il faudrait que la moyenne

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T E dt$$

des valeurs que prend l'équation du temps E dans l'espace d'une année tropique T fût nulle.

Pourtant il n'en est pas ainsi. Car si l'on calcule la valeur de I dans le cas le plus simple, c'est-à-dire sans tenir compte du déplacement des équinoxes et des variations de l'orbite elliptique de la Terre, on trouve

$$I = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc tang} \frac{k \sin 2\varpi}{1 - k \cos 2\varpi} \right),$$

en posant

$$k = - \left(\frac{e \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^2,$$

et désignant par e , ϖ et ω l'excentricité de l'orbite de la Terre, la longitude du périhélie et l'obliquité de l'écliptique (1).

Cette valeur de I n'étant pas nulle, le temps moyen le plus rapproché du temps solaire vrai, qu'on pourrait adopter, serait donné par un nouveau soleil fictif, décrivant l'équateur céleste avec une vitesse constante $\frac{2\omega}{T}$ et qui aurait, sur le soleil moyen actuellement admis, une avance constante en ascension droite égale à I.

2. Le calcul de la valeur précédente de I offrant quelque intérêt, je vais l'indiquer sommairement.

Je désignerai pour cela, comme d'habitude, par ν , L et \mathcal{R} l'anomalie vraie, la longitude vraie et l'ascension droite du Soleil; je

(1) Nous avons donné cette valeur de I dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (t. IV, p. 61), en réponse à une question posée par nous-même (*Ibid.*, t. III, p. 31).

poserai aussi

$$g = \operatorname{tang} \varpi, \quad h = \cos \omega, \quad x = \operatorname{tang} \nu.$$

Et d'abord on reconnaît sans peine que

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T (R - L) dt.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial h} &= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{tang} L \, d\nu}{(1+h^2 \operatorname{tang}^2 L)(1+e \cos \nu)^2} \\ &= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{tang} L}{1+h^2 \operatorname{tang}^2 L} \left[\frac{d\nu}{(1+e \cos \nu)^2} + \frac{d\nu}{(1-e \cos \nu)^2} \right] \\ &= (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial e} (eJ), \end{aligned}$$

en posant

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{tang} L \, d\nu}{(1+h^2 \operatorname{tang}^2 L)(1-e^2 \cos^2 \nu)},$$

soit

$$J = \int_0^\pi \frac{f \, dx}{f_1 f_2},$$

où

$$\begin{aligned} f &= (g+x)(1-gx), & f_1 &= (1-e^2) + x^2, \\ f_2 &= (1+g^2 h^2) + 2g(h^2-1)x + (g^2+h^2)x^2. \end{aligned}$$

3. Pour calculer maintenant la valeur de J, remarquons que si l'on représente par $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ trois polynômes du second degré

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a_0 + b_0 x + c_0 x^2, \\ \varphi_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2, \\ \varphi_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2, \end{aligned}$$

dont les deux derniers gardent une valeur positive quel que soit x , et que l'on désigne par $D_{01}, D_{02}, D_{11}, D_{12}, D_{22}$ les invariants

$$\begin{aligned} D_{01} &= 2a_0 c_1 - b_0 b_1 + 2c_0 a_1, & \dots, \\ D_{11} &= 4a_1 c_1 - b_1^2, & \dots, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0 \, dx}{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{2}{D_{12} + \sqrt{D_{11} D_{22}}} \left(\frac{D_{01}}{\sqrt{D_{11}}} + \frac{D_{02}}{\sqrt{D_{22}}} \right).$$

On a de la sorte

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f \, dx}{f_1 f_2} = \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{g}{A + 2Bh + Ch^2},$$

étant posé

$$A = 1 + g^2 - e^2 g^2, \quad B = (1 + g^2) \sqrt{1 - e^2}, \quad C = 1 + g^2 - e^2.$$

On déduit de là

$$\frac{\partial I}{\partial h} = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial e} (eJ) = g(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{e^3}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{1}{A + 2Bh + Ch^2} \right).$$

4. Pour passer, maintenant, de cette expression de $\frac{\partial I}{\partial h}$, à la valeur de I, on doit remarquer que l'on a

$$I = \int_1^h \frac{\partial I}{\partial h} dh = g(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{e^3}{\sqrt{1 - e^2}} \int_1^h \frac{dh}{A + 2Bh + Ch^2} \right),$$

parce que, pour $h = 1$, on a $I = 0$.

On achève aisément le calcul de I en observant que, dans le cas où le polynôme $A + 2Bh + Ch^2$ garde une valeur positive quel que soit h , on a

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{A + 2Bh + Ch^2} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \text{arc tang} \frac{(h_2 - h_1) \sqrt{AC - B^2}}{A + B(h_1 + h_2) + Ch_1 h_2}.$$

5. L'expression donnée de I peut être aussi vérifiée en partant des formules connues

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} - L &= -\text{tang}^2 \frac{1}{2} \omega \sin 2L + \frac{1}{2} \text{tang}^4 \frac{1}{2} \omega \sin 4L - \dots, \\ \text{arc tang} \frac{k \sin \alpha}{1 - k \cos \alpha} &= k \sin \alpha + \frac{k^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{k^3}{3} \sin 3\alpha + \dots, \end{aligned}$$

et en remarquant que l'on a, pour des valeurs positives de μ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 2\mu\nu d\nu}{1 - e^2 \cos^2 \nu} &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos 2\mu\nu d\nu}{1 - e^2 \cos^2 \nu} &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^{2\mu}. \end{aligned}$$

6. Remarquons enfin que le développement de I, ordonné suivant les puissances ascendantes de e , ne contient que des termes de degré pair et qu'en omettant les termes de degré supérieur au troisième, on a

$$I = -\frac{3e^2}{4} \text{tang}^2 \frac{1}{2} \omega \sin 2\omega + \dots$$

SÉANCE DU 21 JUILLET 1897.

PRÉSIDENTE DE M. PICARD.

Communications :

M. Lecornu : *Sur les engrenages à dents circulaires.*

M. Bricard : *Sur les systèmes de droites et de quadriques tangentes.*

M. Caronnet : *Sur la théorie du joint de Cardan.*

M. D'OCAGNE adresse la Note suivante :

Sur les paramètres de distribution du paraboloid hyperbolique.

M. Mannheim a énoncé, dans les *Nouvelles Annales* (3^e série, t. XXI, p. 340, QUESTION 1774), le théorème suivant :

Le produit des paramètres de distribution des plans tangents à un paraboloid hyperbolique, pour deux génératrices de même système et rectangulaires, est égal au carré de la plus courte distance de ces droites.

En cherchant à démontrer ce théorème, j'en ai obtenu la généralisation suivante :

Le produit des paramètres de distribution des plans tangents à un paraboloid hyperbolique, pour deux génératrices QUELCONQUES de même système, est égal au carré du quotient de la plus courte distance de ces droites par le sinus de leur angle.

Ce dernier théorème présente l'intérêt de permettre de déduire du paramètre de distribution d'une génératrice quelconque celui de toute génératrice du même système.

En voici la démonstration :

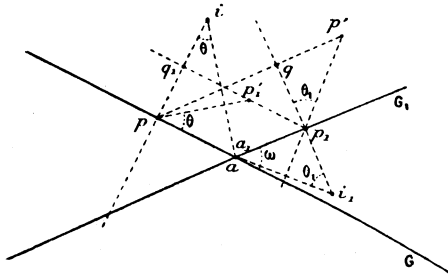
Soient G et G_1 deux génératrices quelconques de même système projetées sur le plan directeur de ce système pris pour plan horizontal. Leur plus courte distance aa_1 se projette suivant un point. Soient, en outre, p et p_1 les points centraux correspondants. Les plans centraux sont respectivement les plans verticaux passant par G et G_1 . Le plan tangent en a est défini par les génératrices G et ap_1 , en a_1 par les génératrices G_1 et $a_1 p$ (*fig. 1*).

Faisons une projection sur le plan vertical perpendiculaire en p à ap . Le point p_1 se projette, sur la perpendiculaire $p_1 q_1$, à la

trace pq_1 de ce plan vertical, au point p'_1 tel que $q_1p'_1 = \delta$, δ étant la plus courte distance de G et G_1 .

Dès lors, l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan

Fig. 1.



central en p est projeté en vraie grandeur en app'_1 . Abaissons du point a la perpendiculaire ai sur pp'_1 . Elle coupe pq_1 au point i , et ce point est le point représentatif de la distribution des plans tangents pour la génératrice G . En effet, d'une part, pi est la perpendiculaire élevée à G par le point central p ; de l'autre, l'angle pia , sous lequel on voit du point i le segment pa , est égal à l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan central. Par suite, le paramètre de distribution k de la génératrice G est égal à pi . On obtient de même le paramètre de distribution $p_1i_1 = k_1$ de G_1 .

Si maintenant nous appelons l et l_1 les segments ap et a_1p_1 , ω l'angle des génératrices G et G_1 , la similitude des triangles api et $pq_1p'_1$, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, nous donne

$$\frac{pi}{pa} = \frac{q_1p'_1}{q_1p},$$

ou

$$\frac{k}{l} = \frac{\delta}{l_1 \sin \omega};$$

d'où

$$k = \frac{\delta l}{l_1 \sin \omega}.$$

De même

$$k_1 = \frac{\delta l_1}{l \sin \omega}.$$

Faisant le produit, on a

$$kk_1 = \frac{\delta^2}{\sin^2 \omega}.$$