BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JANVIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

La Société procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Communications :

M. Fouret : *Sur certains complexes du second ordre qui jouent un rôle dans la théorie des moments d'inertie.*

M. Demoulin présente une observation sur le même sujet.

M. Émile Picard adresse la Note suivante :

Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes.

L'article très intéressant que M. Hurwitz vient de consacrer dans le dernier cahier des *Mathematische Annalen* aux transformations birationnelles des courbes en elles-mêmes me remet en mémoire une leçon que je fis sur ce sujet dans mon cours de 1889. Je m'étais simplement proposé de montrer comment on peut établir d'une manière immédiate ce théorème, énoncé, je crois, pour la première fois comme très probable par M. Klein, qu'il ne peut y avoir, pour $p > 1$, une infinité *discontinue* de transformations birationnelles d'une courbe en elle-même. Il suffit, pour cela, de suivre absolument la même marche que j'avais suivie pour établir une proposition analogue sur les surfaces algébriques dans mon Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Math.,* 1889); c'est cette démonstration que je voudrais rappeler ici rapidement.

On connaît le théorème de M. Schwarz, d'après lequel une courbe de genre supérieur à l'unité ne peut admettre une infinité de transformations birationnelles en elle-même *dépendant d'un paramètre arbitraire.* J'en ai donné (*loc. cit.,* Chap. III) une démonstration très simple, à l'aide de la considération des intégrales de première espèce.

C'est de ce théorème que peut se déduire immédiatement la proposition que nous avons en vue. Soit

$$f(x,y)=0$$

une courbe de genre p ($p>1$) et de degré m, admettant une infinité de transformations birationnelles en elle-même. Considérons p polynômes adjoints d'ordre $m-3$ linéairement indépendants

$$Q_1(x,y),\quad Q_2(x,y),\quad \ldots,\quad Q_p(x,y).$$

En désignant par (x,y) et (x',y') deux points correspondants dans une transformation, on aura nécessairement

$$\frac{Q_1(x,y)\,dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=A_1\frac{Q_1(x',y')\,dx'}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}+\ldots+A_p\frac{Q_p(x',y')\,dx'}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}},$$
$$\frac{Q_2(x,y)\,dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=B_1\frac{Q_1(x',y')\,dx'}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}+\ldots+B_p\frac{Q_p(x',y')\,dx'}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les A et les B étant des constantes. Il en résulte

$$\text{(1)}\qquad \frac{Q_1(x,y)}{Q_2(x,y)}=\frac{A_1Q_1(x',y')+\ldots+A_pQ_p(x',y')}{B_1Q_1(x',y')+\ldots+B_pQ_p(x',y')}.$$

La transformation birationnelle (x,y), (x',y') pourra donc être obtenue au moyen d'une équation de la forme (1), où les A et B sont des constantes convenables. Or, prenant *a priori* cette relation (1), on peut chercher à déterminer les constantes A et B de manière qu'elle détermine une transformation birationnelle entre les points (x,y), (x',y') de la courbe proposée. On obtiendra ainsi un certain nombre d'équations de conditions entre les A et les B; ou bien ces équations de conditions détermineront les A et les B, ou bien une ou plusieurs de ces lettres resteront arbitraires. Par conséquent, la transformation sera déterminée (c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un nombre limité de transformations), ou bien elle dépendra au moins d'un paramètre arbitraire. Mais, d'après le théorème de M. Schwarz, cette dernière circonstance ne peut se présenter, et la proposition se trouve par suite établie.

SÉANCE DU 18 JANVIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : MM. Buisson et Quintard, présentés par MM. Laisant et Élie Perrin; M. Hioux, présenté par MM. Laisant et Antomari.

Communications :

M. Demoulin : *Sur une classe particulière de courbes gauches.*

M. d'Ocagne fait une Communication *Sur les suites récurrentes.*

Il résout d'abord le problème suivant : *Le polynôme générateur d'une suite récurrente étant décomposé en un produit de facteurs, exprimer son terme général en fonction des termes des suites ayant ces facteurs pour polynômes générateurs.*

Il établit ensuite ce théorème : *Toute fonction algébrique entière des intégrales de plusieurs suites récurrentes est elle-même l'intégrale d'une suite récurrente;* et montre comment on peut former le polynôme générateur de cette suite.

A titre de corollaire, il établit cette proposition :

Les puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ *des nombres entiers, pris dans leur ordre naturel, forment une suite récurrente dont le polynôme générateur est* $(x-1)^{2\mu}$.

M. Humbert fait la Communication suivante :

Sur une propriété des cônes du second ordre.

Lemme. — *Toute courbe algébrique d'ordre pair* $2p$, *tracée* *sur un cône du second ordre, est l'intersection complète du cône et d'une surface d'ordre p.*

Ce lemme est une conséquence immédiate d'une propriété des quadriques établie par Halphen dans le Tome I (p. 19) de ce Bulletin; on en déduit, en passant, que *toute courbe d'ordre impair, $2p+1$, tracée sur un cône du second ordre, forme, avec une génératrice quelconque du cône, l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre $p+1$.*

Si l'on observe maintenant qu'une courbe quelconque du cône, comptée deux fois, forme une courbe d'ordre pair, on a, en vertu du lemme, le théorème suivant, qui n'a peut-être pas été remarqué :

Théorème. — *Le long de toute courbe algébrique tracée sur un cône du second ordre on peut circonscrire au cône une surface algébrique, ne coupant pas le cône en dehors de la courbe considérée.*

Cette dernière propriété, qui n'entraîne d'ailleurs pas les deux précédentes, est curieuse; elle n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles. Les quadriques générales, les cônes d'ordre supérieur à deux ne la possèdent pas. Dans un Mémoire qui doit paraître au Tome IX du *Journal de Mathématiques* nous montrerons qu'elle s'applique à la surface de Kummer, mais nous n'en connaissons pas d'autres exemples.

SÉANCE DU 1er FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Théorème sur le centre des moyennes distances.*

M. Fouret : *Sur le complexe tétraédral.*

M. Demoulin : *Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand.*

M. Humbert : *Évaluation de quelques aires sur le paraboloïde.*

M. Arnoux adresse une Note sur un appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs.

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Caldarera, présenté par MM. Jordan et Fouret; M. l'abbé Rivereau, présenté par MM. Appell et Kœnigs; M. Passerat, présenté par MM. de Presle et Lucien Lévy.

Communications :

M. Bioche : *Sur les séries alternées.*

M. Bioche : *Sur les courbes anharmoniques.*

M. Demoulin : *Définition géométrique des complexes quadratiques dont la surface de singularités se décompose en une quadrique et deux plans.*

M. Humbert : *Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique.*

M. Carvallo présente à la Société un *Traité de Mécanique* qu'il vient de publier et signale certaines démonstrations contenues dans cet Ouvrage.