ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PAUL MARTINELLI

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 224 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__59_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la pag. 224 du précédent volume ;

Par M. Paul Martinelli, cadet au corps royal des Pontonniers, à Modène.

Problème I. A quelle courbe sont tangentes toutes les droites tracées sur le plan d'un polygone donné, de telle sorte qu'en abaissant des perpendiculaires sur chacune de ces droites des sommets du polygone, la somme algébrique des perpendiculaires, relatives à chacune de ces droites, soit égale à une longueur constante donnée ?

Solution. Rapportons le polygone donné à deux axes rectangulaires, et soient alors ses sommets (α,β), (α',β'), (α'',β''), ... Soit (x',y') un des points de la courbe cherchée ; soit $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=p$; l'équation de la tangente à cette courbe en ce point sera

$$y-y'=p(x-x')\ ; \qquad (1)$$

les longueurs des perpendiculaires abaissées sur cette droite des sommets du polygone donné, auront pour expression

$$\frac{\beta-y'-p(\alpha-x')}{\sqrt{1+p^2}}\,,$$

$$\frac{\beta'-y'-p(\alpha'-x')}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\frac{\beta''-y'-p(\alpha''-x')}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en désignant donc par L la longueur donnée, à laquelle doit être égale la somme algébrique de ces perpendiculaires, et par n le nombre des sommets du polygone, on aura

$$\frac{\Sigma(\beta)-ny'-p[\Sigma(\alpha)-nx']}{\sqrt{1+p^2}}=L\,,$$

ou bien

$$\Sigma(\beta)-ny'-p[\Sigma(\alpha)-nx']=L\sqrt{1+p^2}\;; \qquad (2)$$

équation dans laquelle p peut être considéré comme un paramètre variable.

En la différentiant par rapport à p seulement, il viendra

$$[\Sigma(\alpha)-nx']\sqrt{1+p^2}+Lp=0\;;$$

d'où on tirera

$$p=\pm\frac{\Sigma(\alpha)-nx'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2}}\,,$$

et, par suite

$$\sqrt{1+p^2}=\mp\frac{L}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2}}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), il viendra, en transposant et chassant le dénominateur,

$$[\Sigma(\beta)-ny']\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']}=\pm\{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2\}\ ;$$

ou bien

$$[\Sigma(\beta)-ny']=\pm\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2}\ ;$$

d'où, en quarrant, supprimant les accens et transposant,

$$\left\{x-\frac{\Sigma(\alpha)}{n}\right\}^2+\left\{y-\frac{\Sigma(\beta)}{n}\right\}^2=\left(\frac{L}{n}\right)^2,$$

équation de la courbe cherchée, que l'on voit être un cercle ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone donné et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la longueur donnée.

Ce résultat pouvait être d'ailleurs facilement prévu. Si, en effet, on suppose des masses égales à l'unité, situées aux sommets du polygone dont il s'agit, la somme des momens de ces masses, par rapport à une droite quelconque située sur le plan de ce polygone, laquelle se réduira à la somme algébrique des perpendiculaires abaissées sur cette droite de ses divers sommets, devra être égale à n fois la perpendiculaire abaissée du centre commun de gravité de ces masses sur la même droite; si donc l'on veut que la somme des premières perpendiculaires soit constante, il faudra que la dernière le soit également; ce qui ne pourra arriver que pour des tangentes à un cercle, ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la somme des perpendiculaires dont il s'agit.

PROBLÈME II. A quelle surface sont tangens tous les plans sur lesquels abaissant des perpendiculaires de tous les sommets d'un polyèdre donné, la somme algébrique des perpendiculaires relatives à chaque plan est égale à une longueur constante donnée ?

Solution. Soit rapporté le polyèdre donné à trois axes rectangulaires, et soient alors ses sommets (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$, ... Soit (x',y',z') un des points de la surface cherchée;

soient $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}z'}=p$, $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}z'}=q$; l'équation du plan tangent à cette surface en ce point sera

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y') \; ; \qquad (1)$$

les longueurs des perpendiculaires abaissées sur ce plan des sommets du polyèdre donné auront pour expression

$$\frac{\gamma-z'-p(\alpha-x')-q(\beta-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\frac{\gamma'-z'-p(\alpha'-x')-q(\beta'-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\frac{\gamma''-z'-p(\alpha''-x')-q(\beta''-y')}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

en désignant donc par L la longueur donnée, à laquelle doit être égale la somme algébrique de ces perpendiculaires, et par n le nombre des sommets du polyèdre, on aura

$$\frac{\Sigma(\gamma)-nz'-p[\Sigma(\alpha)-nx']-q[\Sigma(\beta)-ny']}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=L,$$

ou bien

$$\Sigma(\gamma)-nz'-p[\Sigma(\alpha)-nx']-q[\Sigma(\beta)-ny']=L\sqrt{1+p^2+q^2} \; ; \qquad (2)$$

équation dans laquelle p et q peuvent être considérés comme deux paramètres variables.

En la différentiant, tour à tour, par rapport à chacun de ces deux paramètres seulement, il viendra

$$[\Sigma(\alpha)-nx']\sqrt{1+p^2+q^2}+Lp=0 \; ,$$

$$[\Sigma(\beta)-ny']\sqrt{1+p^2+q^2}+Lq=0 \; ;$$

équations d'où on tirera

$$p=\pm\frac{\Sigma(\alpha)-nx'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}};$$

$$q=\pm\frac{\Sigma(\beta)-ny'}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\mp\frac{L}{\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), elle deviendra, en transposant et chassant le dénominateur,

$$[\Sigma(\gamma)-nz']\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2}=\pm\{L-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2\};$$

ou bien

$$\Sigma(\gamma)-nz'=\pm\sqrt{L^2-[\Sigma(\alpha)-nx']^2-[\Sigma(\beta)-ny']^2};$$

d'où, en quarrant, supprimant les accens et transposant,

$$\left\{x-\frac{\Sigma(\alpha)}{n}\right\}^2+\left\{y-\frac{\Sigma(\beta)}{n}\right\}^2+\left\{z-\frac{\Sigma(\gamma)}{n}\right\}^2=\left(\frac{L}{n}\right)^2;$$

équation de la surface cherchée, que l'on voit être une sphère ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polygone donné et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la longueur donnée.

C'est encore là un résultat qui aurait pu être facilement prévu à l'avance. Si, en effet, on suppose des masses égales à l'unité situées à tous les sommets du polyèdre, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de ces sommets, sur un plan quelconque, ne sera autre chose que la somme des momens de ces masses par rapport à ce plan, et devra conséquemment être égale à n fois la perpendiculaire abaissée sur le même plan de leur centre commun de gravité, centre des moyennes distances de ces sommets; si donc on veut que la somme des premières perpendiculaires soit constante, il faudra que la dernière le soit aussi; propriété qui ne saurait appartenir qu'aux plans tangens à une sphère, ayant son centre au centre des moyennes distances des sommets du polyèdre et son rayon égal à la $n.^{ieme}$ partie de la somme des perpendiculaires dont il s'agit.

A l'aide de ces considérations on apercevra, sur-le-champ, la vérité des deux théorèmes suivans, dont ceux qui viennent d'être démontrés ne sont que des cas particuliers :

I. La courbe à laquelle sont tangentes toutes les droites sur chacune desquelles abaissant des perpendiculaires de tous les sommets (α,β), (α',β'), (α'',β''), ... d'un polygone donné, la somme algébrique des produits respectifs de ces perpendiculaires, par des multiplicateurs m, m', m'' ....., est égale au produit d'une longueur donnée R par un multiplicateur donné $M=\Sigma(m)$, est une circonférence dont le centre a pour ses coordonnées $\frac{\Sigma(m\alpha)}{\Sigma(m)}$ et $\frac{\Sigma(m\beta)}{\Sigma(m)}$, et dont le rayon est R.

II. La surface à laquelle sont tangens tous les plans sur chacun desquels abaissant des perpendiculaires de tous les sommets (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$, ... d'un polyèdre donné, la somme algébrique des produits respectifs de ces perpendiculaires, par des multiplicateurs m, m', m'' ......, est égale au produit d'une longueur donnée R par un multiplicateur donné $M=\Sigma(m)$, est une sphère dont le centre a pour ses coordonnées $\frac{\Sigma(m\alpha)}{\Sigma(m)}$, $\frac{\Sigma(m\beta)}{\Sigma(m)}$, $\frac{\Sigma(m\gamma)}{\Sigma(m)}$, et dont le rayon est R.