

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

AMPÈRE

**Dynamique. Solution d'un problème de dynamique, suivie de considérations sur le problème général des forces centrales**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 20 (1829-1830), p. 37-58

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1829-1830\\_\\_20\\_\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__37_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**DYNAMIQUE.**

*Solution d'un problème de dynamique , suivie  
de considérations sur le problème général  
des forces centrales ;*

PAR M. AMPÈRE , de l'Académie royale des sciences , etc.

~~~~~

*Au Rédacteur des Annales ,*

MONSIEUR ,

A LA pag. 285 du tom. XIX de ces *Annales de mathématiques* qui rendent aux sciences , par les excellens articles que vous y faites paraître , un des plus grands services qui puissent leur être rendus , j'ai été surpris de rencontrer un mémoire relatif à un problème de dynamique dont la solution me paraît d'une inexactitude frappante. Il s'agit , dans ce mémoire , d'un tube rectiligne qui tourne , dans un plan vertical , autour d'un axe horizontal , tandis qu'une sphère pesante se meut dans l'intérieur de ce tube. Il est évident que l'auteur a négligé de faire entrer en considération l'effet de la force centrifuge à laquelle la sphère est nécessairement soumise en vertu du mouvement que le tube l'oblige de prendre autour du point fixe par lequel l'axe de ce tube passe constamment et qu'on doit considérer comme le centre de son mouvement. L'erreur de cette solution s'aperçoit immédiatement en remarquant que , suivant

*Tom. XX, n.º 2 , 1.ºr Août 1829*

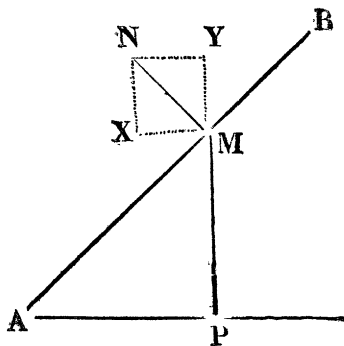
6

les idées de l'auteur, si la gravité était nulle, ainsi que la vitesse initiale, le centre de la sphère mobile devrait constamment parcourir la circonférence d'un cercle ayant pour centre le centre du mouvement, tandis qu'il est évident qu'alors cette sphère, en vertu de l'action de la force centrifuge, devrait s'éloigner sans cesse de ce point.

Comme les problèmes de ce genre sont du nombre de ceux que je traite chaque année, dans mes cours, j'ai pensé qu'il pourrait vous être agréable de faire connaître à vos lecteurs la solution directe que j'en donne depuis bien long-temps. Cette solution partant des équations générales de la dynamique, on n'a pas besoin de considérer, en particulier, l'effet de la force centrifuge, mais on le reconnaît ensuite dans les résultats qu'on obtient.

On trouve dans les œuvres de l'un des Bernouilli, de Jean, si ma mémoire ne me trompe pas, la solution de ce problème pour le cas où le tube se meut dans un plan horizontal, autour d'un axe vertical, et où, conséquemment, la pesanteur n'a aucune action, ce qui rentre dans l'hypothèse que je faisais plus haut; aussi la solution à laquelle je parviens devient-elle celle de Bernouilli quand on y suppose  $g=0$ , ce qui n'arrive pas pour celle qu'on a donnée dans votre XIX.<sup>me</sup> volume.

Voici présentement ma solution



Soit AB l'axe du tube, tournant dans le plan de la figure, supposé vertical, autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à ce plan, et passant par le point A. L'horizontale AP étant prise pour l'axe des  $x$  et le point A pour origine; si M est le point de AB où se trouve le centre de la sphère mobile à l'époque  $t$ , en abaissant de ce point la perpendiculaire AP sur l'axe des  $x$ , désignant par  $\alpha$  l'inclinaison du tube à l'origine des temps, par  $T$  la durée de sa révolution, par  $\theta$  l'angle variable que fait sa direction avec l'axe des  $x$ , et enfin par  $r$  la distance variable du centre de la sphère mobile au centre du mouvement, on aura

$$AP = x, \quad PM = y, \quad AM = r, \quad \text{Ang. PAM} = \alpha + 2\pi \frac{t}{T} = \theta,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

donc

$$dx = dr \cos \theta - r d\theta \sin \theta, \quad dy = dr \sin \theta + r d\theta \cos \theta,$$

d'où l'on déduit

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2; \quad (1)$$

formule connue, sur laquelle est fondée la rectification des spirales.

Maintenant, il y a deux forces qui agissent sur le point M, et non pas une seule, comme le suppose le mémoire cité. Ces deux forces sont la pesanteur et la pression exercées par le tube sur le mobile; pression par laquelle ce tube l'oblige de le suivre dans son mouvement. L'intensité de cette dernière force est inconnue, mais sa direction est donnée, puisqu'elle est nécessairement perpendiculaire à la direction du tube, représentée par celle de son axe AM. En nommant  $N$  cette pression inconnue comme le fait M. Poisson, pour un problème analogue, dans sa *Mécanique*, tom. I.<sup>er</sup>, n.<sup>o</sup> 250, pag. 373 et 374, il faudra égaler à  $\frac{d^2x}{dt^2}$  les forces paral-

## PROBLÈME

lèles à l'axe des  $x$  qui tendent à augmenter l'abscisse, moins celles qui tendent à les diminuer, et faire la même chose à l'égard de  $\frac{d^2y}{dt^2}$  pour les forces parallèles à l'axe des ordonnées.

Or, en considérant les choses comme elles le sont dans la figure, et en admettant que le mouvement de révolution du tube tend à augmenter l'angle  $\theta$ , on voit que la gravité  $g$ , dirigée suivant l'ordonnée, tend à la diminuer. Quant aux composantes

$$X = \frac{Ny}{r}, \quad Y = \frac{Nx}{r},$$

de  $N$ , parallèles aux axes, on voit que la première tend à diminuer l'abscisse du point  $M$ , tandis que l'autre tend à augmenter son ordonnée. En conséquence les deux équations du mouvement de ce point seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ny}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Nx}{r} - g,$$

entre lesquelles il faudra éliminer l'inconnue  $N$ , en prenant la somme de leurs produits respectifs par  $x$  et par  $y$ , ce qui donnera

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} = -gy = -gr \sin \theta; \quad (2)$$

on aura d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

d'où en différentiant deux fois consécutivement

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt},$$

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2.$$

En remplaçant, dans cette dernière équation,  $dx^2+dy^2$  par sa valeur (1) et réduisant, il viendra

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = r \frac{d^2r}{dt^2},$$

ce qui change l'équation (2) en

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \sin.\theta = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \sin. \left( \alpha + 2\omega \frac{t}{T} \right);$$

d'où l'on voit que l'équation (1) du mémoire cité est fautive par l'omission du terme  $r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  qui est précisément la force centrifuge qui aurait lieu sur une circonférence du rayon  $r$ , la vitesse angulaire de rotation étant, comme celle du tube, dans ce problème,  $\frac{d\theta}{dt}$ ; car la vitesse sur la circonférence étant alors  $r \frac{d\theta}{dt}$ , le carré de cette vitesse  $r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$ , divisée par le rayon  $r$ , donne précisément  $r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  pour la force centrifuge (\*).

Il ne serait peut-être pas facile de montrer, *à priori*, que c'est

(\*) Je reçois à l'instant une lettre de M. Th. Barrois, de Lille, qui contient des remarques toutes pareilles à celles de M. Ampère. M. Barrois pense que M. Poncelet a commis une inadvertance, à peu près pareille, dans le calcul de sa roue à aubes courbes, ce qui n'ôte rien d'ailleurs, ajoute-il, au mérite *pratique* de l'invention. Il est évident que la solution du problème traité à la pag. 359 du précédent volume est entachée d'une pareille erreur.

Afin de consoler l'auteur ou les auteurs, autant du moins que les torts d'autrui peuvent nous consoler des nôtres, je saisisrai cette occasion pour observer que le petit article que j'ai donné à la pag. 263 de mon XV.<sup>me</sup> volume, sur la stabilité de l'équilibre des corps flottans, quelque spécieux qu'en soient les raisonnemens, est complètement faux de tous points.

la force centrifuge, ainsi calculée, qu'il faut considérer comme la force accélératrice, agissant dans la direction du tube, qui doit être jointe à la composante  $-g\sin.\theta$  de la pesanteur, dans la même direction, pour avoir la valeur de  $\frac{d^2r}{dt^2}$  que nous venons d'obtenir; mais les calculs qui précèdent ne peuvent laisser aucun doute à cet égard, puisque la valeur de  $\frac{d^2r}{dt^2}$  a été déduite, par un calcul direct, de celles de  $\frac{d^2x}{dt^2}$  et de  $\frac{d^2y}{dt^2}$ . Si l'on supprime le terme dû à l'action de la pesanteur, dans cette valeur de  $\frac{d^2r}{dt^2}$ , en y faisant  $g=0$ , on a

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

équation qui revient à celle de Bernouilli. Je m'occuperai plus tard de son intégration; je me bornerai seulement ici à faire remarquer que, dans les précédens calculs, il n'est pas nécessaire de supposer que le mouvement du tube est uniforme, et d'admettre conséquemment qu'on ait

$$\theta = \alpha + 2\omega \frac{t}{T};$$

ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici; il suffit que le mouvement de rotation du tube, autour du point A, soit déterminé par une relation donnée entre  $t$  et  $\theta$ , telle que  $\theta=f(t)$ .

Si l'on veut connaître la pression  $N$  que le tube exerce sur la sphère, en fonction de la distance  $r$  et de l'angle  $\theta$ , on déduira d'abord des valeurs de  $x, y, dx, dy$ , obtenues plus haut, l'équation connue

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

d'où, en différentiant,

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} ; \quad (3)$$

on reprendra ensuite les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{N_y}{r} , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{N_x}{r} = g ;$$

en faisant la somme de leurs produits respectifs par  $-y$  et par  $+x$ , et en se rappelant que  $x^2 + y^2 = r^2$ , on aura

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = Nr - gx = Nr - gr \cos.\theta ;$$

comparant cette équation à l'équation (3) on en conclura

$$Nr - gr \cos.\theta = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} ,$$

et, par suite ,

$$N = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cos.\theta :$$

Cette pression du tube sur la sphère se compose de deux parties ; l'une, exprimée par  $g \cos.\theta$ , est l'effort qu'il doit exercer sur cette sphère pour faire équilibre à la composante de la pesanteur perpendiculaire au tube, tandis que sa composante  $g \sin.\theta$ , dans le sens du tube, tend à mouvoir cette sphère dans ce sens, sans exercer aucune pression ; et voilà pourquoi cette composante fait partie de la valeur de  $\frac{d^2r}{dt^2}$ . L'autre portion

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} ,$$

de la force  $N$ , est celle par laquelle le tube en pressant la sphère,



## PROBLÈME

augmente sa vitesse perpendiculairement à l'axe de ce tube, afin qu'elle le suive dans son mouvement de rotation,

Dans le cas où ce mouvement est uniforme, et où, par conséquent,

$$\theta = \alpha + 2\omega \frac{t}{T},$$

on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\omega}{T}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;$$

ainsi alors

$$N = \frac{4\omega}{T} \cdot \frac{dr}{dt} + g \cos.\theta;$$

et l'équation entre  $r$  et  $t$  est

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4\omega^2}{T^2} r = -g \sin.\theta,$$

équation linéaire du second ordre qui peut s'intégrer par les méthodes connues, mais son intégrale ne paraît pas susceptible d'une forme simple, et le calcul en serait trop long pour trouver place dans cette lettre.

Dans le cas de Bernouilli, où le tube se meut horizontalement autour d'un axe vertical, il faut supprimer le terme  $g \sin.\theta$ , et l'on a à intégrer l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4\omega^2}{T^2} r.$$

En multipliant ses deux membres par  $2dr$  et intégrant, il vient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{4\omega^2}{T^2} r^2 + C;$$

Si l'on désigne par  $V$  la vitesse initiale, répondant à la distance  $R$ , on aura

$$V^2 = \frac{4\omega^2}{T^2} R^2 + C ;$$

d'où, en retranchant, transposant et extrayant les racines,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{V^2 + \frac{4\omega^2}{T^2} (r^2 - R^2)} ;$$

c'est cette valeur qu'il faudrait substituer dans

$$N = \frac{4\omega}{T} \cdot \frac{dr}{dt} ,$$

pour avoir la valeur de la pression  $N$ , en fonction de la distance  $r$ .

On en tire

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{V^2 + \frac{4\omega^2}{T^2} (r^2 - R^2)}} ,$$

qu'il suffit d'intégrer de nouveau pour avoir l'équation entre  $t$  et  $r$ , dans laquelle substituant ensuite pour  $t$  sa valeur

$$t = \frac{T}{2\omega} (\theta - \alpha) ,$$

on aura l'équation polaire de la trajectoire décrite:

Supposons que la sphère soit liée au point  $A$  par un fil inextensible d'une longueur égale à  $R$ ; il est clair qu'alors son centre décrira uniformément une circonférence dont  $R$  sera le rayon et qui aura ce point  $A$  pour centre. Supposons qu'au moment où ce rayon  $R$  fait un angle  $\alpha$  avec l'axe des abscisses, le fil vienne subitement à se rompre; on se trouvera alors dans le cas particulier du problème qui nous occupe, où il n'y aurait pas de vitesse initiale; l'équation ci-dessus deviendra donc alors simplement

## PROBLÈME

$$dt = \frac{T}{2\pi} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R^2}},$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{T}{2\pi} \text{Log.}(r + \sqrt{r^2 - R^2}) + C.$$

Si l'on compte les temps de l'instant où le fil se rompt, on aura

$$0 = \frac{T}{2\pi} \text{Log.}R + C;$$

d'où, en retranchant,

$$t = \frac{T}{2\pi} \text{Log.} \frac{r + \sqrt{r^2 - R^2}}{R},$$

ce qui donne d'abord

$$r + \sqrt{r^2 - R^2} = R e^{2\pi \frac{T}{t}},$$

et ensuite

$$r - \sqrt{r^2 - R^2} = R e^{-2\pi \frac{T}{t}};$$

d'où, en ajoutant et divisant par 2,

$$r = \frac{R}{2} \left( e^{2\pi \frac{T}{t}} + e^{-2\pi \frac{T}{t}} \right);$$

Si l'on nomme  $s$  l'arc de la circonférence dont le rayon est  $R$  et le centre est  $A$ , compté depuis le point où le fil s'est rompu jusqu'à celui que détermine l'axe du canal, à l'époque  $t$ , on aura

$$s = 2\varpi \frac{t}{T} R, \quad \text{d'où} \quad 2\varpi \frac{t}{T} = \frac{s}{R};$$

en conséquence, on aura

$$r = \frac{R}{2} \left( e^{\frac{s}{R}} + e^{-\frac{s}{R}} \right);$$

et conséquemment, pour l'excès du rayon vecteur de la trajectoire sur le rayon du cercle

$$r - R = \frac{R}{2} \left( e^{\frac{s}{R}} + e^{-\frac{s}{R}} - 2 \right),$$

Or, on sait que, si l'on prend pour l'axe des  $x$  d'une chaînette uniformément pesante l'horizontale menée par le point le plus bas, et ce même point pour origine, on aura, pour l'équation de cette courbe,

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right),$$

$a$  étant le paramètre de la chaînette, c'est-à-dire, la longueur de son rayon de courbure au point le plus bas; en comparant donc cette valeur de  $y$  à celle de  $r - R$  on en conclura que la trajectoire décrite par le centre de la sphère mobile n'est autre chose que la courbe qu'on obtiendrait en décrivant d'abord une chaînette dont le paramètre serait égal au rayon  $R$ , en menant sa tangente au point le plus bas, enveloppant avec cette tangente le cercle dont le rayon est  $R$ , de telle sorte que ce point le plus bas répondît au lieu du centre de la sphère mobile à l'instant de la rupture du fil, et dirigeant enfin toutes ses ordonnées suivant les prolongemens des rayons de ce cercle.

On peut généraliser le problème de Bernoulli en supposant que l'axe du tube, au lieu de se mouvoir dans un plan horizontal, décrit une surface conique quelconque ; et j'ai fait, il y a longtemps, à ce sujet, une remarque qui ne me paraît pas dépourvue d'intérêt ; elle consiste en ce que si, faisant toujours abstraction de la pesanteur, on développe la surface conique sur un plan, et qu'on suppose que l'axe du tube décrive exactement sur ce plan, dans les mêmes intervalles de temps, les espaces angulaires qu'il aurait décrit sur la surface conique dont il s'agit ; en traçant sur ce même plan la trajectoire plane qu'y décrirait le centre de la sphère mobile, en vertu du mouvement du tube, il suffira de plier cette surface plane sur la surface conique, de manière que les situations correspondantes de l'axe du tube coïncident, pour obtenir la trajectoire qui devrait être décrite sur cette dernière surface, par le centre de la sphère.

Pour le démontrer, en conservant aux lettres  $r$  et  $\theta$  la même signification que dans les précédens calculs, où le tube était supposé se mouvoir dans un plan, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 ;$$

pour l'équation qui donne  $r$  en fonction de  $t$ , lorsque  $\theta$  est lui-même donné en fonction de  $t$ , par l'équation qui détermine le mouvement du tube. Il s'agit donc de démontrer qu'on a la même équation en  $r$  et  $t$  lorsque le tube se meut sur la surface conique ; or, c'est ce qu'il est bien facile de vérifier ; car d'abord  $r$  et  $\theta$  restant les mêmes lorsqu'on enveloppe le plan sur la surface conique, ainsi que l'arc décrit par le centre de la sphère, en représentant cet arc par  $s$ , on aura, sur le plan,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ;$$

et cette valeur restera la même sur la surface conique ; mais, en

nommant  $x, y, z$  les trois coordonnées du centre de la sphère, dans son mouvement sur cette surface, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ainsi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2; \quad (4)$$

mais, comme on fait abstraction de la pesanteur, la seule force qui agisse sur la sphère est la pression  $N$  du tube qui est perpendiculaire à la direction de son axe; les trois composantes de cette force sont donc respectivement égales à

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

et en posant

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = W;$$

les cosinus des trois angles que fait sa direction avec les axes sont

$$\frac{1}{W} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{W} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{W} \cdot \frac{d^2z}{dt^2};$$

les cosinus des trois angles que l'axe du tube forme avec les mêmes axes sont

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r};$$

et comme ces deux directions forment un angle droit; puisque la pression exercée par le tube est nécessairement perpendiculaire à son axe, la somme des produits des cosinus correspondans sera nulle; en sorte qu'on aura, en supprimant le facteur commun

$\frac{1}{Wr}$ , l'équation

## PROBLÈME

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} = 0 ; \quad (5)$$

mais

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

d'où l'on tire successivement

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = r \frac{dr}{dt} ;$$

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 ;$$

c'est-à-dire (4)

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 ,$$

ou , en réduisant ,

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} - r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 ;$$

donc finalement (5)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 ;$$

c'est-à-dire que l'équation qui détermine la courbe décrite par le centre de la sphère sur la surface conique est la même que celle qui détermine son mouvement sur le plan ; et , comme l'on suppose que l'on a la même relation donnée entre  $t$  et  $\theta$  dans les deux cas , la valeur de  $r$  sera aussi la même pour les mêmes valeurs de ces deux variables ; ce qui démontre que le développement de la courbe décrite sur la surface conique est identiquement le même que la courbe

décrite sur le plan ; bien entendu que la position et la vitesse initiale de la sphère dans le tube, d'après lesquelles doivent être déterminées les constantes introduites par l'intégration, seront les mêmes dans les deux cas.

Je crois devoir observer, en terminant cette lettre, que l'équation

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 ,$$

peut servir à obtenir directement, par une transformation très-simple, et en n'employant que le calcul différentiel, la solution d'un problème de mécanique qu'on résout ordinairement d'une manière plus compliquée et en employant le calcul intégral. Ce problème acquiert une grande importance en ce que c'est de sa solution qu'on déduit les trois lois de Képler ; il a pour objet de déterminer la direction et l'intensité de la force  $R$ , en vertu de laquelle un point mobile décrit une courbe plane donnée, de manière que les aires mesurées sur le plan de la courbe, autour d'un point fixe, situé dans ce plan, soient proportionnelles aux temps correspondans.

En prenant le point pour l'origine des coordonnées rectangulaires  $x$  et  $y$ , dans le plan des rayons vecteurs  $r$ , et nommant  $\theta$  l'angle que fait  $r$  avec l'axe des  $x$ , à l'époque  $t$ , le petit secteur décrit pendant l'instant  $dt$  a pour valeur  $\frac{1}{2}r^2d\theta$ , et, comme cette aire doit être proportionnelle au temps  $dt$ , on a  $r^2d\theta = Cdt$ . Or nous avons trouvé

$$r^2d\theta = xdy - ydx ,$$

ainsi

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c ,$$

et, en différentiant,



## PROBLÈME

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{y}{x};$$

Or, si l'on considère, comme on le fait ordinairement, la force  $R$  comme attractive, c'est-à-dire, comme tendant à diminuer les deux coordonnées, ses deux composantes seront

$$-\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y}{dt^2},$$

et leur rapport, que nous venons de trouver égal à  $\frac{y}{x}$ , exprimera conséquemment la tangente tabulaire de l'angle que fait la direction de cette force  $R$  avec l'axe des  $x$ ; or,  $\frac{y}{x}$  est aussi la tangente tabulaire de l'angle que fait le rayon vecteur avec le même axe, d'où il suit que la force  $R$  est dirigée suivant ce rayon vecteur.

On aura, d'après cela, pour les deux équations du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Rx}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ry}{r};$$

d'où, en prenant la somme de leurs produits respectifs par  $x$  et  $y$ , et observant que  $x^2 + y^2 = r^2$ ;

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} = -Rr;$$

or, nous avons trouvé ci-dessus

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} = r \frac{d^2r}{dt^2} - r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 ;$$

on aura donc, pour la valeur de la force  $R$ ,

$$R = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{d^2r}{dt^2} .$$

Cette valeur se compose de deux parties, dont la première  $r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  est, comme nous l'avons vu ci-dessus, la force qui devrait agir sur la sphère mobile pour faire équilibre à la force centrifuge qui a lieu dans le cercle dont le rayon est  $r$ , avec la vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$  du rayon vecteur; et la seconde  $-\frac{d^2r}{dt^2}$  est la force qui devrait agir sur la même sphère, dans le sens du même rayon lorsqu'on le suppose immobile, pour que son mouvement, le long de ce rayon, variât précisément comme il varie en même temps que le rayon change de position; résultat remarquable, parce qu'on ne voit point comment on pourrait prévoir à *priori* qu'il faut prendre, pour le premier terme de la valeur de  $R$ , la force centrifuge qui aurait lieu dans le cercle dont il vient d'être question.

Il est presque inutile de remarquer que si l'on trouve pour le second terme  $-\frac{d^2r}{dt^2}$ , et non pas seulement  $\frac{d^2r}{dt^2}$ , c'est qu'on a regardé comme positives les forces qui agissent pour porter la sphère  $M$  vers l'origine, et par conséquent pour diminuer la distance  $r$ .

M. Binet, inspecteur des études à l'école polytechnique, a donné, il y a long-temps, une expression de la force  $R$  qui ne contient pas  $dt$ , et donne sur-le-champ la valeur de cette force, d'après l'équation entre  $r$  et  $\theta$  de la trajectoire décrite; elle est bien préférable, pour la simplicité des calculs, à celle qu'on donne ordinairement; voici comment on peut la déduire immédiatement de celle que nous venons d'obtenir.

Nous avons vu qu'on avait  $r^2 d\theta = c dt$ , et qu'ainsi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} ;$$

on en conclut, en prenant  $\theta$  pour variable indépendante,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{c}{r^2} = -c \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} ;$$

et par suite

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \text{ ou } \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} \text{ ou } \frac{c}{r^2} \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{d\theta} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} ;$$

substituant ces valeurs de  $\frac{dr}{dt}$  et de  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  dans l'expression de  $R$ , elle deviendra,

$$R = r \cdot \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} ,$$

c'est-à-dire,

$$R = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right\} ;$$

c'est l'expression de  $R$  donnée par M. Binet.

Pour juger à quel point cette expression simplifie le calcul, dans chaque cas particulier, il suffit de l'appliquer à quelques exemples. Soit d'abord une ellipse dont  $a$  représente le demi-grand axe et  $e$  l'excentricité; on aura pour l'équation polaire de cette courbe

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\theta} ,$$

ainsi

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos. \theta}{a(1 - e^2)} ;$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{e \sin. \theta}{a(1 - e^2)} ;$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{e \cos. \theta}{a(1 - e^2)} ;$$

ce qui donnera , en substituant

$$R = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{1 + e \cos. \theta}{a(1 - e^2)} - \frac{e \cos. \theta}{a(1 - e^2)} \right\} = \frac{c^2}{a(1 - e^2)} - \frac{1}{r^2} ,$$

ou , en posant  $\frac{c^2}{a(1 - e^2)} = \mu$  ,

$$R = \frac{\mu}{r^2} ;$$

c'est là l'expression connue de la force accélératrice , dans le cas des planètes , d'après la seconde loi de Képler relative à l'ellipticité de leurs orbites ; d'où l'on voit que , pour différens points de l'orbite d'une même planète , cette force est inverse du quarré de la distance.

Il ne s'agit plus que de calculer la valeur de la constante

$$\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)} ,$$

comme le fait M. Poisson , dans sa *Mécanique* ( tom. 1.<sup>er</sup> , n.° 241 ) , pour en conclure , en partant de la troisième loi de Képler , comme il le fait dans cet article , que cette force est aussi en raison in-

verse du carré de la distance, considérée dans deux planètes différentes (\*).

Si j'ai mis quelque intérêt à n'employer que le calcul différentiel, dans la solution du précédent problème, c'est surtout parce qu'en considérant que ce sont les mouvemens considérés en eux-mêmes, indépendamment des forces qui les produisent, qui sont les données de l'observation; que c'est elle, par exemple, qui a appris à Galilée que, dans la chute verticale des corps pesans, les espaces parcourus sont comme les carrés des temps, ou, ce qui est la même chose, que la vitesse croît proportionnellement aux temps; que c'est de même l'observation qui a donné à Képler ses trois lois, il m'a semblé, d'après cela, qu'on devait traiter d'abord en mécanique, et considérer comme des problèmes directs ceux où le mouvement étant donné, on demande la valeur de la force accélératrice ou de la résultante de toutes celles qui agissent sur le corps qui présente ce mouvement, lorsqu'il y en a plusieurs; et que ces problèmes directs, comme, en géométrie, la détermination des tangentes, sous tangentes, normales, sous normales et rayons de courbure d'une courbe donnée, n'exigent que le calcul direct des fonctions dérivées ou calcul différentiel (\*\*), tandis que les problèmes inverses, tels qu'en géométrie la recherche des courbes planes ou à double courbure, d'après les propriétés de leurs tangentes, normales et rayons de courbure, et en mécanique la détermination des courbes décrites par les différens points des corps,

(\*) On peut aussi consulter la pag. 7, du VII.<sup>m</sup>e volume du présent recueil, où la proposition se trouve établie, à la fois, d'une manière fort simple, tant pour les orbites elliptiques que pour les orbites paraboliques et hyperboliques.

*J. D. G.*

(\*\*) C'est ainsi que nous en avons toujours usé nous-même, comme le prouve le mémoire cité dans la précédente note. C'est également ainsi qu'en ont usé MM. Poisson et Franœeur dans leurs *Traité*s de Mécanique.

*J. D. G.*

et du temps pendant lequel leur mouvement s'exécute, lorsqu'on suppose connues les forces qui agissent sur ces corps, ne peuvent se résoudre que par le calcul inverse des fonctions ou le calcul intégral.

Ce théorème que, dans le mouvement elliptique autour d'un foyer, la force centrale attractive est en raison inverse du carré de la distance, servant de base au vrai système du monde, et devant par conséquent trouver place dans tous les traités et tous les cours de physique où l'on veut exposer l'ensemble des lois de la nature, il convient de le mettre à la portée du plus grand nombre de ceux qui lisent ces traités ou qui suivent ces cours, et dont la plupart ne connaissent que la géométrie élémentaire; c'est pourquoi j'ai cherché à démontrer ce théorème par les élémens, d'une manière plus simple qu'il ne l'est dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, en évitant de supposer connues les diverses propriétés de l'ellipse sur lesquelles est fondée la démonstration que l'on trouve dans cet admirable ouvrage, d'où elle a passé dans un grand nombre de traités élémentaires.

La démonstration à laquelle je suis parvenu, et qui me paraît satisfaire à ces conditions, est l'objet d'un petit mémoire que j'ai l'honneur de vous adresser, Monsieur, et, comme je pense que vous voudrez bien donner place à la présente lettre dans vos *Annales de mathématiques*, je vous prie de vouloir bien y insérer aussi le mémoire dont il s'agit, comme pouvant lui servir de supplément.

La valeur générale de  $R$ , due à M. Binet, et que j'ai démontrée plus haut, conduit, par des calculs aussi simples que ceux dont j'ai tiré la valeur de la force centrale dans l'ellipse, à la détermination de cette force dans les courbes qui donnent d'autres lois simples. Il suffit pour cela de prendre les valeurs de  $\frac{1}{r}$  et de

$\frac{d^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{dt^2}$  dans l'équation polaire de chacune de ces courbes, et,

après en avoir fait la somme, d'en éliminer  $\theta$  au moyen de cette même équation polaire ; en multipliant ensuite le résultat de l'élimination par  $\frac{c}{r^2}$  on a la valeur de  $R$ . C'est ainsi qu'on trouve, par exemple, que, dans les spirales hyperboliques et logarithmiques, le point attirant étant au centre, l'attraction doit être en raison inverse du cube de la distance ; que, quand un mobile décrit une circonférence de cercle, par l'attraction d'un point fixe situé sur sa circonférence, la force attractive est en raison inverse de la cinquième puissance de la distance ; que, dans ce dernier cas, les durées des révolutions sont comme les cubes des diamètres des circonférences décrites, et ainsi du reste. Bien que ces théorèmes soient connus depuis long-temps (\*), je n'étais pourtant d'abord proposé de montrer, dans cette lettre, avec quelle simplicité ils se déduisent immédiatement de la valeur générale de  $R$ , afin qu'on pût mieux apprécier les avantages de la forme que M. Binet a donné à cette valeur, mais j'ai pensé ensuite que cette lettre n'était déjà que trop longue, et que d'ailleurs les calculs sont si faciles que les lecteurs pourront les exécuter sans peine, pour si peu qu'ils y attachent d'intérêt.

Agréez, etc.

---

(\*) Voy., entr'autres, les additions de Clairaut à la traduction de Newton, par la marquise du Chastelet.