ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Analyse algébrique. Note sur quelques expressions algébriques peu connues

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 352-366
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__352_1>

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Note sur quelques expressions algébriques peu connues ;

Par M. R. S.

1. DANS un mémoire sur l'intégration des équations linéaires, inséré à la pag. 269, du XI.me volume du présent recueil, M. Schmidten a fort judicieusement distingué la *résolution* des équations de l'*évaluation* des inconnues qu'elles renferment. Suivant ses principes, résoudre une équation à une seule inconnue, c'est lui faire subir une suite de tranformations permises, par l'effet desquelles l'inconnue se trouve seule dans son premier membre, tandis que son second membre se trouvera être une fonction de forme quelconque d'une ou de plusieurs quantités connues. Evaluer numériquement l'inconnue, c'est en outre exécuter, lorsque cela est possible, sur les quantités connues qui composent le second membre de l'équation résolue, et que nous supposons numériques, les opérations arithmétiques qui sont indiquées entre elles de manière à savoir, ou exactement ou du moins avec une approximation convenue à l'avance, quel est le nombre qui vérifie l'équation proposée.

2. Soient, par exemple, les deux équations

$$x^4-12x^2-64=0\ ,\qquad x^2-x-6=0\ ;$$

en les amenant à la forme

$$x=\sqrt{3+4\sqrt{-1}}+\sqrt{3-4\sqrt{-1}}\ ,\qquad x=1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\dotsb}}}}\ ,$$

elles se trouveront l'une et l'autre résolues; mais, ni dans l'une ni dans l'autre, l'évaluation de l'inconnue n'aura été effectuée; cette évaluation se présente même sous une apparente impossibilité, quant à la première; et quant à la seconde, elle semble exiger une infinité d'opérations.

3. Sous quelque forme que se présente l'inconnue, dans l'équation résolue, sa valeur numérique devra toujours être la même; mais les opérations arithmétiques à exécuter pour obtenir cette valeur pourront être variées d'un grand nombre de manières différentes; c'est-à-dire que la résolution de l'équation peut présenter l'inconnue sous un grand nombre de formes diverses. Ainsi, par exemple, l'équation

$$x^4-4ax^2-4b^2=0\ ,$$

donne ces deux formes de solutions

$$x=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}\ ,\quad x=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}\ ;$$

l'équation

$$x^2-ax-b=0\ ,$$

donne ces deux-ci:

$$x=a+\frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{a+\ldots\ldots}}},\qquad x=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2};$$

et l'équation

$$(1-a)x-2=0,$$

donne les deux suivantes:

$$x=1+a+a^2+a^3+\ldots\ldots,\qquad x=\frac{1}{1-a}.$$

4. On sait que, passé le quatrième degré, on ne peut, en général, présenter la solution d'une équation sous forme finie; que, dès le troisième degré, cette solution, indépendamment de sa complication, se trouve souvent impliquée d'imaginaires, lors même que la valeur de l'inconnue est réelle; et que même la forme finie de cette valeur, pour les quatre premiers degrés, est au fond plus apparente que réelle, puisque, toutes les fois que l'inconnue doit être incommensurable, on ne saurait en faire une évaluation rigoureuse qu'à l'aide d'un nombre infini d'opérations. C'est-à-dire qu'alors l'expression de l'inconnue ne se présente sous une forme finie qu'à la faveur de l'invention des radicaux qui, comme l'observe fort bien M. Schmidten, sont de véritables symboles de transcendantes; de telle sorte que Cos.a, par exemple, ne diffère pas essentiellement de $\sqrt{a}$, comme on le voit par ces deux expressions

$$\mathrm{Cos}.a=\frac{1}{1+\frac{1}{1.2-a^2+\frac{1.2a^2}{3.4-a^2+\frac{3.4a^2}{5.6-a^2+\frac{5.6a^2}{7.8-a^2+\ldots\ldots}}}}},$$

$$\sqrt{a}=k+\frac{a-k^2}{2k+\frac{a-k^2}{2k+\frac{a-k^2}{2k+\frac{a-k^2}{2k+\ldots\ldots}}}};$$

dans la dernière desquelles k est une indéterminée introduite pour rendre au besoin la formule convergente.

5. d'après ces remarques, lorsqu'on a à résoudre une équation, il est fort inutile de chercher à mettre l'expression de l'inconnue sous une forme qui souvent ne serait finie qu'en apparence, et que plus souvent encore on chercherait vainement à lui faire acquérir L'essentiel est seulement que, lorsque cette expression se compose d'une infinité de termes, et nous prenons ici le mot *terme* dans toute sa généralité, la loi en soit manifeste et aussi simple que la nature de l'équation peut le comporter; et surtout qu'en bornant l'expression à un nombre fini de termes on obtienne une valeur d'autant plus approchée que le nombre de ces termes sera plus grand. On devra donc, autant qu'il sera possible, introduire dans cette expression une ou plusieurs indéterminées, à l'aide desquelles on puisse la rendre aussi convergente qu'on le voudra; enfin le comble de la perfection serait que les expressions obtenues, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, fussent alternativement plus grandes est plus petites que la véritable, puisqu'alors on aurait ainsi, à chaque pas, une mesure exacte de l'approximation à laquelle on serait parvenu.

6. Eclaircissons ces préceptes par quelques exemples simples; soit d'abord proposée à résoudre l'équation

$$mx=a\ ,$$

on pourra l'écrire ainsi

$$(m+k-k)x=a\ ;$$

k étant une indéterminée. Cela donnera, en transposant,

$$(m+k)x=a+kx\ ,$$

d'où

$$x=\frac{a+kx}{m+k}\ ;$$

En mettant continuellement pour x, dans le second membre de cette dernière, sa valeur donnée par ce même second membre, on aura

$$x=\frac{a}{m}=\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\cfrac{a+k\ldots\ldots}{m+k}}{m+k}}{m+k}}{m+k}}{m+k}$$

formule au moyen de laquelle une division par m se trouve transformée en une infinité de divisions par $m+k$, et réciproquement.

7. Si l'on représente généralement par x_n la valeur approchée qu'on obtient pour x, en se bornant à n termes de cette expression, on trouvera successivement

$$x_1=\frac{a}{m+k}\,,\qquad x_2-x_1=\frac{ka}{(m+k)^2}\,;$$

$$x_2=\frac{(m+2k)a}{(m+k)^2}\,,\qquad x_3-x_2=\frac{k^2a}{(m+k)^3}\,;$$

$$x_3=\frac{(m^2+3mk+3k^2)a}{(m+k)^3}\,,\qquad x_4-x_3=\frac{k^3a}{(m+k)^4}\,,$$

$$x_3=\frac{(m^3+4m^2k+6mk^2+4k^3)a}{(m+k)^4}\,,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on voit que les différences consécutives forment une progression par quotiens dont la raison est $\frac{k}{m+k}$; ces différences iront donc en diminuant, et conséquemment ces valeurs successives, toutes moindres que la véritable, tendront sans cesse vers elles si l'on prend k positif; elles tendront aussi sans cesse vers elles si k est négatif, pourvu qu'il soit moindre que la moitié de m; mais alors les valeurs successives seront alternativement plus grandes et plus petites que cette véritable valeur qui se trouvera ainsi constamment comprise entre deux approximations consécutives quelconques.

8. Au moyen de ces formules, on pourra transformer une seule division par m en une suite de divisions par $m \pm k$ et conséquemment une division par un nombre quelconque en une suite de divisions par l'unité, suivie de plusieurs zéros, qui seront d'une exécution très-facile. Si l'on prend $k = \pm 1$, il viendra

$$x = \frac{a}{m} = \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \cfrac{a \pm \ldots\ldots}{m \pm 1}}{m \pm 1}}{m \pm 1}}{m \pm 1} \;;$$

si m est un nombre impair, la division par m se trouvera donc ramenée à une suite de divisions par un nombre pair, c'est-à-dire à une suite de divisions par deux et par un autre nombre pour lequel, s'il est impair, on pourra faire encore une semblable transformation, de manière à n'avoir jamais à exécuter des divisions par deux.

9. Soit, pour second exemple, à résoudre l'équation

$$x^m = a \;;$$

en multipliant ses deux membres par x^k, k étant une indéterminée, elle deviendra

$$x^{m+k} = ax^k \,,$$

d'où on tirera

$$x=\sqrt[m+k]{ax^k}\,.$$

En mettant continuellement pour x, dans le second membre de cette dernière, sa valeur donnée par ce même second membre, on aura

$$x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a\left(\sqrt[m+k]{a(\ldots\ldots)^k}\right)^k}\right)^k}\right)^k}\,.$$

10. Si l'on représente généralement par x_n la valeur approchée qu'on obtient pour x en se bornant à n termes de cette expression, on trouvera successivement

$$x_1=\sqrt[m+k]{a}\,,$$

$$x_2=\sqrt[(m+k)^2]{a^{m+2k}}\,,\qquad \frac{x_2}{x_1}=\sqrt[(m+k)^2]{a^k}\,,$$

$$x_3=\sqrt[(m+k)^3]{a^{m^2+3mk+3k^2}}\,,\qquad \frac{x_3}{x_2}=\sqrt[(m+k)^3]{a^{2k}}\,,$$

$$x_4=\sqrt[(m+k)^4]{a^{m^3+4m^2k+6mk^2+4k^3}}\,,\qquad \frac{x_4}{x_3}=\sqrt[(m+k)^4]{a^{3k}}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\qquad \ldots\ldots\ldots\,;$$

d'où l'on voit que les quotiens des termes consécutifs se déduisent les uns des autres en élevant constamment chacun d'eux à la puissance k, et en extrayant, de cette puissance, la racine du degré $m+k$; ces quotiens tendent donc sans cesse vers l'unité; les expressions successives, toujours moindres que les véritables, tendent donc sans cesse à devenir égales entre elles et à l'expression exacte de x.

11. Si, dans ces diverses formules, on suppose k négatif elles deviendront

$$x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m-k]{\dfrac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\dfrac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\dfrac{a}{\left(\sqrt[m-k]{\cdots\cdots\cdots}\right)^k}}\right)^k}}\right)^k}},$$

$$x_1=\sqrt[m-k]{a}, \qquad \frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^2]{a^k}},$$

$$x_2=\sqrt[(m-k)^2]{a^{m-2k}}, \qquad \frac{x_3}{x_2}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^3]{a^{2k}}},$$

$$x_3=\sqrt[(m-k)^3]{a^{m^2-3mk+3k^2}}, \qquad \frac{x_4}{x_3}=\frac{1}{\sqrt[(m-k)^4]{a^{3k}}};$$

$$x_4=\sqrt[(m-k)^4]{a^{m^3-4m^2k+6mk^2-4k^3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ici les quotiens des expressions conséctutives ne tendront sans cesse vers l'unité et en conséquence ces expressions ne tendront sans cesse à devenir égales entre elles et à la véritable valeur de x qu'autant que k sera moindre que la moitié de m ; mais alors les valeurs successives seront alternativement plus grandes et plus petites que cette véritable valeur qui se trouvera ainsi constamment comprise entre deux approximations consécutives quelconques.

12. Au moyen des formules des deux numéros précédens on pourra donc transformer l'extraction d'une seule racine du degré m, en une suite d'extraction de racines du degré $m\pm k$, et conséquemment on pourra transformer une seule extraction de racine de degré quelconque en une suite d'extractions de racines dont l'exposant soit une puissance de deux ; ce qui ramenera la question à une suite d'extractions de racines quarrées.

13. Si, dans ces mêmes formules, on suppose $k=1$, elles deviendront simplement

$$x=\sqrt[m]{k}=\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\sqrt[m+1]{a\ldots\ldots}}}},$$

$$x=\sqrt[m]{k}=\sqrt[m-1]{\cfrac{a}{\sqrt[m-1]{\cfrac{a}{\sqrt[m-1]{\cfrac{a}{\sqrt[m-1]{\ldots\ldots}}}}}}};$$

formules au moyen desquelles on pourra transformer une seule extraction de racine de degré impair en une suite d'extractions de racines de degrés pairs, c'est-à-dire en une suite d'extractions de racines quarrées et de racines d'un autre degré qui, s'il est impair, sera susceptible d'une semblable transformation.

14. Soit, en général, l'équation quelconque en x

$$Fx=0\,, \qquad (1)$$

on pourra, d'une infinité de manières différentes, lui faire prendre la forme

$$x=A+\mathrm{f}x\,; \qquad (2)$$

A étant une fonction des constantes de l'équation (1) et de tant d'autres constantes arbitraires qu'on voudra, lesquelles auront été introduites par la transformation, et pourront aussi se trouver, en tout ou en partie, sous le signe f.

15. En mettant successivement pour x, sous ce signe, sa valeur donnée par l'équation (2) elle-même, on aura

$$x=A+\mathrm{f}(A+\mathrm{f}(A+\mathrm{f}(A+\ldots\ldots))). \qquad (3)$$

16. Si prenant successivement

$$x_1=A\,,$$

$$x_2=A+\mathrm{f}A\,,$$

$$x_3=A+\mathrm{f}(A+\mathrm{f}A)\,,$$

$$x_4=A+\mathrm{f}(A+\mathrm{f}(A+\mathrm{f}A))\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on aperçoit que les différences consécutives de ces valeurs vont sans cesse en diminuant, soit d'elles-mêmes, soit par une détermination convenable des constantes arbitrairement introduites, on sera fondé à les considérer comme une suite de valeurs de plus en plus approchées de l'inconnue x. Si, de plus, ces différences sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles sera une limite de l'approximation à laquelle elle se trouvera correspondre.

16. Si, au lieu de mettre l'équation (1) sous la forme (2), on la mettait sous celle-ci

$$x=A\mathrm{f}x\ , \qquad (4)$$

on en déduirait

$$x=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\ldots\ldots)))\ , \qquad (5)$$

ce qui donnerait cette suite d'approximations

$$x_1=A\ ,$$
$$x_2=A\mathrm{f}A\ ,$$
$$x_3=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}A)\ ,$$
$$x_4=A\mathrm{f}(A\mathrm{f}(A\mathrm{f}A))\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

On pourrait aussi la mettre sous cette forme

$$x=A^{\mathrm{f}x}\ , \qquad (6)$$

d'où résulterait

$$x=a^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A\ldots\ldots)})})}\ , \qquad (7)$$

ce qui donnerait cette suite d'approximations

$$x_1=A$$
$$x_2=A^{\mathrm{f}A}$$
$$x_3=A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}A})}$$
$$x_4=A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}(A^{\mathrm{f}A})})}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

17. On pourrait aussi mettre l'équation (1) sous la forme

$$x=A+\mathrm{f}(B+\varphi x)\,, \qquad (8)$$

d'où résulterait

$$x=A+\mathrm{f}(B+\varphi(A+\mathrm{f}(B+\varphi(A+\ldots\ldots)))) \; ; \qquad (9)$$

fonction périodique à périodes de deux termes, et l'on voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour obtenir la valeur de x sous forme de fonction périodique ayant des périodes de tant de termes qu'on le désirerait.

18. Réciproquement, si un problème conduit à une équation en x de quelqu'une des formes (3), (5), (7), (9), on pourra d'abord mettre cette équation sous l'une des formes (2), (4), (6), (8), puis ensuite sous la forme (1), ce qui permettra souvent d'obtenir la valeur de x sous forme finie.

19. La sommation des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini se déduit bien simplement de ce qui précède; si, en effet, on a

$$x=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots\ldots\,,$$

on pourra d'abord écrire

$$x=a+q(a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots)\,,$$

puis,

$$x=a+qx\,, \qquad \text{ou} \qquad (1-q)x=a\,,$$

d'où

$$x=\frac{a}{1-q}\,.$$

20. D'après la remarque que nous avons faite (5), l'équation

$$x=a-a+a-a+a-a+\ldots\ldots,$$

ne pourrait servir à l'approximation de la valeur de x, puisqu'elle donne successivement les valeurs approchées a, 0, a, 0, a, 0, ... dont les différences sont constantes ; mais, sans recourir au subtile raisonnement de Leibnitz, on voit, sur-le-champ, que cette équation revient à

$$x=a-x\,, \qquad \text{d'où} \qquad x=\tfrac{1}{2}a\,.$$

Pareillement, si l'on avait

$$x=1-2+4-8+16-32+64-\ldots\ldots\ldots$$

qui donne les approximations successives

$$1\,,\quad -1\,,\quad +3\,,\quad -5\,,\quad +11\,,\quad -21\,,\ \ldots\ldots$$

dont les différences

$$-2\,,\quad +4\,,\quad -8\,,\quad +16\,,\quad -32$$

sont divergentes ; on trouverait, sur-le-champ, par nos méthodes,

$$x=1-2x\,, \qquad \text{d'où} \qquad x=\tfrac{1}{3}\,.$$

21. Si l'on avait

$$x=\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\cfrac{a}{\vdots}}}}}\,;$$

on trouverait les approximations périodiques et conséquemment illusoires

$$a\,,\quad 1\,,\quad a\,,\quad 1\,,\quad a\,,\quad 1\,,\,\ldots\ldots\,;$$

d'où, par l'application du raisonnement de Leibnitz, on serait tenté de conclure $x=\frac{1}{2}(a+1)$, tandis que, par nos procédés, il vient

$$x=\frac{a}{x}\,,\qquad \text{d'où}\qquad x=\sqrt{a}\,.$$

Si l'on avait

$$x=\cfrac{a}{\cfrac{a^2}{\cfrac{a^4}{\cfrac{a^8}{\cfrac{a^{16}}{\vdots}}}}}$$

il viendrait, par l'application des mêmes procédés,

$$x=\frac{a}{x^2}\,,\qquad \text{d'où}\qquad x=\sqrt[3]{a}\,.$$

20. Si l'on avait

$$x=a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}$$

on écrirait de suite

$$x=a^x\,;$$

équation de forme finie en x, mais qui ne peut donner la valeur de x en a que par les séries. Il en serait de même si l'on avait

$$x=a\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}\,(a\mathrm{Sin}\,(a\,\ldots\ldots)))) \ ;$$

car on en tirerait

$$x=a\mathrm{Sin}.x \ .$$

Il y aurait encore une multitude de choses à dire sur ce sujet; mais nous pourrons y revenir dans une autre occasion.