ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BOBILLIER
LENTHÉRIC

Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 87 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 34-36
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__34_1>

Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 87 du précédent volume ;

Par MM. BOBILLIER et LENTHÉRIC.

PROBLÈME. *Quel est le lieu des centres communs de gravité de tous les systèmes de rayons vecteurs d'une même ellipse ?*

Solution. Si l'on représente respectivement par a, b, c le demi-grand axe, le demi-petit axe et l'excentricité de la courbe, en prenant son grand axe pour l'axe des x et son petit axe pour celui des y, son équation sera

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ , \qquad (1)$$

et l'on aura

$$a^2=b^2+c^2\ . \qquad (2)$$

Si l'on représente respectivement par r et r' les rayons vecteurs du point (x,y) qui répondent aux deux foyers, on trouvera aisément

$$r=a-\frac{cx}{a}\ , \qquad r'=a+\frac{cx}{a}\ ;$$

les coordonnées des centres de gravité respectifs de ces deux droites, c'est-à-dire, de leurs milieux, seront d'ailleurs

$$\frac{x+c}{2},\ \frac{y}{2}\,; \qquad\qquad \frac{x-c}{2},\ \frac{y}{2}\,;$$

on aura donc, en prenant tour à tour l'axe des x et celui des y pour axes des momens, et en désignant par (x', y') le centre commun de gravité de ces deux rayons vecteurs

$$\left(a-\frac{cx}{a}\right)\frac{x+c}{2}+\left(a+\frac{cx}{a}\right)\frac{x-c}{2}=2ax'\,;$$

$$\left(a-\frac{cx}{a}\right)\frac{y}{2}+\left(a+\frac{cx}{a}\right)\frac{y}{2}=2ay'\,;$$

ou, en développant et réduisant,

$$ax-\frac{cx^2}{a}=2ax'\,, \qquad ay=2ay'\,;$$

d'où on tirera

$$x=\frac{2a^2x'}{a^2-c^2}=\frac{2a^2x'}{b^2}\,, \qquad y=2y'\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura, pour l'équation du lieu cherché.

$$\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2x'^2+\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2y'^2=\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2\,; \qquad (3)$$

ce lieu est donc une autre ellipse, concentrique à la première, ayant ses axes dans les mêmes directions que les siens ; cette ellipse est semblable à l'autre, mais elle est tournée en sens inverse, et ses dimensions sont moitié moindres.

Si l'on veut résoudre le problème analogue pour l'hyperbole, il suffira de changer b en $b\sqrt{-1}$, ce qui conduira aux mêmes conclusions, si ce n'est que l'hyperbole, lieu des centres de gravité, ne pourra être dite semblable à la proposée, puisque les axes proportionnels ne seront point de même dénomination. Il faudra d'ailleurs admetire que la pesanteur agit de bas en haut sur l'un des deux rayons vecteurs.