ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analyse transcendante. Des maxima et minima, dans les fonctions d'une ou de plusieurs variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 317-345
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__317_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Des Maxima *et* Minima (*), *dans les fonctions d'une ou de plusieurs variables ;*

Par M. GERGONNE.

DANS l'exposé que nous avons présenté, à la pag. 213 du présent volume, des principes de *calcul différentiel*, on trouve uniquement, comme on a pu le voir, 1.° la définition d'une nouvelle opération de calcul ; 2.° les règles pratiques de cette opération, sur toutes les fonctions connues, rigoureusement déduites de sa définition ; 3.° enfin, l'institution de quelques symboles généraux, propres à exprimer le résultat auquel on parvient, lorsqu'on exécute cette même opération, une ou plusieurs fois, sur des fonctions d'une ou de plusieurs variables, dont on suppose la forme tout à fait indéterminée.

Quand bien même ces procédés et ces symboles ne seraient susceptibles d'aucune application, tout ce que nous en avons dit n'en

(*) Il y a déjà long-temps que M. Lacroix s'est affranchi de la pédantesque coutume de parler latin en français ; et les mots *maximum* et *minimum* sont, en effet, d'un usage assez ancien et assez fréquent, dans notre langue, pour mériter des lettres de naturalisation. Mais je n'ai pas, comme M. Lacroix, l'honneur d'appartenir à l'Académie royale des sciences et aux hautes écoles de la capitale ; et, si j'écrivais, comme lui, *des maximums*, *des minimums*, beaucoup de gens pourraient en inférer que je n'ai point fait *mes classes*, ce qui me porterait un notable préjudice dans leur esprit.

demeurerait pas moins de la plus exacte vérité, et on ne pourrait, au plus, leur objecter que leur inutilité. Il ne nous reste donc plus maintenant qu'à montrer, par des applications variées, combien il s'en faut que ce reproche puisse leur être appliqué; et c'est là ce que nous nous proposons de faire dans l'article que l'on va lire et dans plusieurs autres qui le suivront.

Nous choisirons, pour première application, une classe de questions qui, bien qu'elles se présentent fréquemment à résoudre en géométrie et en mécanique, n'en sont pas moins, au fond, du simple domaine de l'analyse : ce sont les questions de *maxima* et de *minima*, dans les fonctions explicites ou implicites d'une ou de plusieurs variables, indépendantes les unes des autres ou liées entre elles par des relations plus ou moins nombreuses. La théorie qui les concerne se trouve exposée dans tous les traités de calcul différentiel; mais, outre qu'elle n'y est peut-être pas présentée d'une manière assez large, assez lumineuse et assez complète, il est, sur ce sujet, quelques points de doctrine qui paraissent avoir échappé jusqu'ici à l'attention des analystes, et que nous aurons soin de signaler, chemin faisant, de manière à offrir encore quelque chose de neuf, sur un sujet qu'on pourrait croire épuisé.

I. Considérons, en premier lieu, une fonction

$$X=\mathrm{f}(x)\ ,$$

de la seule variable x, et supposons qu'on donne à cette variable toutes les valeurs réelles comprises entre l'infini négatif et l'infini positif; il pourra d'abord se faire que, pour toutes ces valeurs, la fonction X soit constamment imaginaire ou constamment réelle; mais souvent aussi elle sera réelle, pour certaines séries de valeurs, et imaginaires pour toutes les autres.

Soient $x_{\prime}$, x' deux limites entre lesquelles les valeurs de x rendent constamment X réelle; il pourra se faire que, de la première à la seconde limite, X prenne des valeurs réelles constamment croissantes ou constamment décroissantes; mais il pourra se faire aussi que, x marchant d'une limite à l'autre, X prenne des valeurs tantôt croissantes et tantôt décroissantes. Alors si, après avoir d'abord crû, cette fonction vient ensuite à décroître, il y aura une certaine valeur de x qui l'aura rendue *plus grande* qu'elle ne l'était pour les valeurs qui précédaient et suivaient immédiatement celle-là; et l'on dira de cette valeur de x qu'elle rend X *maximum*. Si, au contraire, après avoir décru, cette fonction vient ensuite à croître, il y aura une certaine valeur de x qui l'aura rendue *plus petite* qu'elle ne l'était pour les valeurs qui précédaient et suivaient immédiatement celle-là; et l'on dira de cette valeur de x qu'elle rend X *minimum*. On conçoit d'ailleurs que, pour des valeurs de x comprises entre les limites $x_{,}$, x', la fonction X pourra souvent présenter plusieurs *maxima* et *minima*, les uns plus grands et les autres plus petits; sans pourtant que jamais deux *maxima* ni deux *minima* puissent se succéder l'un à l'autre consécutivement. La question que nous nous proposons ici est d'assigner, pour toute fonction donnée, toutes les valeurs et les seules valeurs de x auxquelles ces *maxima* et ces *minima* doivent répondre.

Soient $a_{,}$, a, a' trois valeurs de x, constamment croissantes ou décroissantes qui, substituées dans X, lui fassent prendre les trois valeurs $A_{,}$, A, A'; si toutes les valeurs de x comprises entre $a_{,}$ et a rendent X moindre que A, et qu'il en soit de même pour toutes ses valeurs comprises entre a et a', il sera vrai de dire que la valeur a de x rend X *maximum*, dans le sens que nous l'entendons ici. A l'inverse, si toutes les valeurs de x comprises entre $a_{,}$ et a rendent X *plus grande* que A, et qu'il en soit de même pour toutes ses valeurs comprises entre a et a', il sera vrai de dire que la valeur a de x rend X *minimum*.

On voit donc qu'une valeur de x n'en serait pas moins réputée répondre à un *maximum* de la fonction X, quand bien même une autre valeur de x rendrait cette fonction *plus grande*; et qu'elle n'en serait pas moins réputée appartenir à un *minimum* de cette même fonction X, quand bien même une autre valeur de x rendrait cette fonction *plus petite ;* et c'est là un point qu'il ne faut jamais perdre de vue dans la théorie qui nous occupe. L'essentiel est seulement pour un *maximum*, que les valeurs qui le précéderont et le suivront *immédiatement* soient, les unes et les autres, *moindres* que la sienne, et, pour un *minimum*, que les valeurs qui le précéderont et le suivront *immédiatement* soient, les unes et les autres, *plus grandes* que la sienne (*).

Ces choses ainsi entendues, soit i une grandeur indéterminée, homogène avec x, et susceptible de toutes les valeurs possibles, entre l'infini négatif et l'infini positif. Si l'on suppose que x se change en $x+i$, X ou $f(x)$ deviendra $f(x+i)$. Alors la valeur de x qui répondra à un *maximum* de X devra être déterminée par cette condition qu'on puisse toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour que, pour toutes ses valeurs, jusqu'à $i=0$, on ait constamment, quel que soit son signe,

$$f(x+i)<f(x)\ , \qquad \text{ou} \qquad f(x+i)-f(x)<0\ ;$$

tandis qu'au contraire la valeur de x qui répondra à un *minimum* de X devra être déterminée, sous les mêmes restrictions, par la condition

$$f(x+i)>f(x)\ , \qquad \text{ou} \qquad f(x+i)-f(x)>0\ .$$

En développant donc, comme à la pag. 252, par la série de Taylor, nous pourrons réunir les deux conditions ainsi qu'il suit :

(*) Tout cela devient manifeste, en considérant X comme l'ordonnée d'une courbe sinueuse, dont x est l'abscisse.

$$X\left\{\begin{matrix} \textit{maximum} \\ \textit{minimum} \end{matrix}\right\} \text{si l'on a } \frac{dX}{dx}\,\frac{i}{1}+\frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\ldots \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 0 \,. \quad (1)$$

Or, comme on peut toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total de ce développement que du signe de son premier terme qu'on peut rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i; il s'ensuit que, si $\frac{dX}{dx}$ n'est pas nul de lui-même, ce développement ne pourra être ni constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ni constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro, et quel que soit le signe de cet accroissement. La condition également *nécessaire*, pour le *maximum* et pour le *minimum* de la fonction X, est donc qu'on ait, tout au moins,

$$\frac{dX}{dx}=0\,; \qquad (2)$$

mais nous allons bientôt voir que cette condition n'est pas toujours *suffisante*; c'est-à-dire, qu'il ne peut y avoir *maximum* ou *minimum* que pour des valeurs de x tirées de cette équation; mais que, parmi les valeurs qu'elle donne pour x, on peut fort bien en rencontrer qui n'appartiennent ni à un *maximum* ni à un *minimum*.

Supposons qu'une valeur de x tirée de l'équation (2) ne rende pas nul le coefficient différentiel $\frac{d^2X}{dx^2}$; pour cette valeur de x, les conditions (1) se réduiront à ce qui suit:

$$X\left\{\begin{matrix} \textit{maximum} \\ \textit{minimum} \end{matrix}\right\} \text{si l'on a } \frac{d^2X}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3X}{dx^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 0 \,.$$

Or, comme on peut toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total de ce développement que du signe de son premier terme qu'on ne peut plus ici rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce signe total sera ou constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ou constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i jusqu'à zéro, et quel que soit le signe de cet accroissement; cette valeur de x répondra donc, en effet, à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendra $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$ *négatif* ou *positif*; on peut donc écrire

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=0\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,.$$

Mais si une valeur de x, tirée de l'équation (2), rendait nul le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$, sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}$, les conditions (1), pour cette valeur de x, se reduisant à

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4}\,\frac{i^4}{1.2.3.4}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0\,;$$

ces conditions ne pourraient plus être satisfaites; car, comme on pourrait toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe de tout le développement que du signe de son premier terme que l'on peut ici rendre à volonté positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce développement ne pourrait plus être ni constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ni constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro, et quel que fût le signe de cet accroissement; cette valeur de x ne répondrait donc alors ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction X.

Supposons qu'une valeur de x, tirée de l'équation (2), rende nuls non seulement le coefficient différentiel $\frac{d^2X}{dx^2}$, mais encore le coefficient différentiel $\frac{d^3X}{dx^3}$, sans néanmoins rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^4X}{dx^4}$; alors, pour cette valeur de x, les conditions (1) se réduisant à

$$X\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}\text{ si l'on a }\frac{d^4X}{dx^4}\,\frac{i^4}{1.2.3.4}+\frac{d^5X}{dx^5}\,\frac{i^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\}0;$$

comme on pourrait toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour ne faire dépendre le signe total du développement que du signe de son premier terme qu'on ne saurait ici rendre, à volonté, positif ou négatif, en variant le signe de i, il s'ensuit que ce développement serait ou constamment *négatif*, comme l'exige le *maximum*, ou constamment *positif*, comme l'exige le *minimum*, pour toutes les valeurs de i, jusqu'à zéro ; et, quel que fût le signe de cet accroissement, cette valeur de x répondrait donc alors, en effet, à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendrait $\frac{d^4X}{dx^4}$ *négatif* ou *positif*.

Il n'est pas pas besoin d'aller plus loin pour voir qu'en général, si une valeur de x tirée de l'équation $\frac{dX}{dx}=0$ rend nuls, à la fois, tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2X}{dx^2},\quad \frac{d^3X}{dx^3},\quad \frac{d^4X}{dx^4},\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{d^{2n-1}X}{dx^{2n-1}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n}X}{dx^{2n}}$, cette valeur de x répondra nécessairement à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction X, suivant qu'elle rendra ce dernier coefficient différentiel *négatif* ou *positif*; mais que, si cette même valeur de x rend nuls, à la fois, tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2X}{dx^2},\quad \frac{d^3X}{dx^3},\quad \frac{d^4X}{dx^4},\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{d^{2n}X}{dx^{2n}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n+1}X}{dx^{2n+1}}$, elle ne répondra dès lors ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction X.

De tout cela résulte la règle générale que voici :

Si l'on égale à zéro le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction quelconque d'une seule variable, il en résultera, pour cette variable, une ou plusieurs valeurs, parmi lesquelles seulement pourront se trouver celles qui rendront la fonction proposée maximum *ou* minimum.

Pour distinguer celles de ces valeurs qui jouissent de cette propriété de celles qui n'en jouissent pas, on les substituera, tour à tour, à la place de la variable, dans les coefficiens différentiels des ordres supérieurs de la fonction, jusqu'à ce qu'on en rencontre un que leur substitution ne fasse pas évanouir.

Si ce coefficient différentiel est d'un ordre impair, *la valeur substituée ne répondra ni à un* maximum *ni à un* minimum *de la fonction proposée.*

Si, au contraire, le premier coefficient différentiel que la substitution d'une valeur de la variable ne fait pas évanouir est d'un ordre pair, *cette valeur répondra à un* maximum *ou à un* minimum *de la fonction, suivant qu'elle rendra ce coefficient différentiel* négatif *ou* positif.

On obtiendra ensuite la valeur maximum *ou* minimum *de la fonction, en substituant dans la fonction cette même valeur de la variable* (*).

(*) Nous sommes loin de donner cette règle comme tout à fait complète, puisqu'elle n'embrasse pas le cas où une valeur substituée rendrait quelque

Soit, par exemple,

$$X=6x^7-70x^6+336x^5-861x^4+1274x^3-1092x^2+504x-27\ ;$$

cela donnera

$$\frac{dX}{dx}=42(x^6-10x^5+40x^4-82x^3+91x^2-52x+12)=42(x-1)^3(x-2)^2(x-3)\ ,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=84(3x^5-25x^4+80x^3-123x^2+91x-26)=84(x-1)^2(x-2)(3x^2-13x+13)\ ,$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=84(15x^4-100x^3+240x^2-246x+91)=84(x-1)(15x^3-85x^2+155x-91)\ ,$$

$$\frac{d^4X}{dx^4}=168(30x^3-150x^2+240x-123)\ ;$$

les valeurs de x qui peuvent rendre X *maximum* ou *minimum* sont donc données par l'équation

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)=0\ ;$$

d'où l'on tire

$$x=1\ ,\quad x=2\ ,\quad x=3\ ;$$

le premier coefficient différentiel que la valeur $x=1$ ne fait pas évanouir est celui du quatrième ordre, qu'elle rend égal à -504; d'où il suit que cette valeur répond à un *maximum* qui est $X=+70$; le premier coefficient différentiel que la valeur $x=2$ ne

---

coefficient différentiel infini ou indéterminé; mais on doit remarquer que nous avons beaucoup moins en vue d'écrire un traité, *ex professo*, sur la matière, que de faire comprendre l'utilité des notations différentielles. Ceux de nos lecteurs qui désireront de plus amples développemens sur ce sujet pourront consulter le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix (Tom. 1.er, pag. 365).

fait pas évanouir est celui du troisième ordre ; d'où il suit que cette valeur de x ne répond ni à un *maximum* ni à un *minimum* ; enfin le premier coefficient différentiel que la valeur $x=3$ ne fait pas évanouir est celui du second ordre qu'elle rend égal à $+326$; d'où il suit que cette valeur répond à un *minimum* qui est $X=+54$.

II. Nous n'avons autant insisté sur ce qui concerne les fonctions d'une seule variable que pour avoir d'autant moins à dire sur celles qui en renferment plusieurs ; on va voir, en effet, que ce qui les concerne peut facilement être ramené à ce que nous avons dit de celles-là.

Soit d'abord

$$S=\mathrm{f}(x,y)\ ,$$

une fonction quelconque de deux variables, absolument indépendantes l'une de l'autre. Si l'on prend, pour ces deux variables, divers systèmes de valeurs, la fonction S pourra devenir plus grande pour les unes et moindre pour les autres (*) ; et l'on pourra encore ici désirer de savoir quels sont, parmi ces systèmes de valeurs, en nombre infini, ceux qui sont propres à rendre la fonction S non pas la plus grande ou la moindre possible, mais plus grande ou moindre que ne la rendraient tous les systèmes de valeurs consécutifs avec chacun de ceux-là.

Pour y parvenir, remarquons que nous conserverons à x et y toute leur indépendance, si nous concevons qu'il existe deux équations entre ces deux variables et une troisième variable s, pourvu que nous supposions ces deux équations de forme tout à fait indéterminée ; car la relation que nous en déduirions, entre x et y par l'élimination de s, serait indéterminée comme elles ; et c'est

(*) Ceci devient manifeste, en considérant S comme l'ordonnée d'une surface ondulée, dont x et y seraient les deux abscisses.

dire, en d'autres termes, de deux variables qu'elles sont indépendantes l'une de l'autre, que de dire qu'il existe entre elles une relation qu'on peut supposer quelconque.

Au moyen de cette fiction, S sera, par l'intermédiaire de x et y, fonction, comme elles, de la seule variable s; et, si nous assignons les valeurs de s qui conviennent aux *maxima* et aux *minima* de S, il sera facile d'en conclure les systèmes de valeurs de x et de y qui conviennent à ces mêmes *maxima* et *minima*.

Nous voilà donc ramenés à la considération des fonctions d'une seule variable; et nous pourrons dire, comme ci-dessus, que les seules valeurs de s qui puissent rendre S *maximum* ou *minimum* doivent être données par l'équation $\frac{dS}{ds}=0$; que, si une valeur de s tirée de cette équation rend nuls tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{ds^2}, \quad \frac{d^3S}{ds^3}, \quad \frac{d^4S}{ds^4}, \ldots\ldots\ldots \frac{d^{2n}S}{ds^{2n}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n+1}S}{ds^{2n+1}}$, cette valeur n'appartiendra ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction S; mais que, si cette valeur rend nuls tous les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{ds^2}, \quad \frac{d^3S}{ds^3}, \quad \frac{d^4S}{ds^4}, \ldots\ldots\ldots \frac{d^{2n-1}S}{ds^{2n-1}},$$

sans rendre nul le coefficient différentiel $\frac{d^{2n}S}{ds^{2n}}$, elle répondra à un *maximum* ou à un *minimum* de S, suivant qu'elle rendra ce dernier coefficient différentiel *négatif* ou *positif*.

Or, en représentant simplement par δ, comme nous en sommes convenus à la pag. 278, les différentielles ou variations relatives à s, et en remarquant que S n'est fonction de cette dernière variable que par l'intermédiaire de x et y, nous aurons, comme à l'endroit cité,

$$\frac{dS}{ds}=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y\ ;$$

or, puisque les relations de x et y avec s sont indéterminées, les variations δx et δy doivent être absolument indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on ne pourra avoir $\frac{dS}{ds}=0$, qu'autant qu'on aura séparément

$$\frac{dS}{dx}=0\ ,\quad \frac{dS}{dy}=0\ ; \tag{3}$$

telles sont donc, dans tous les cas, les deux équations qui donneront les seuls systèmes de valeurs de x et y parmi lesquels devront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*, si toutefois elle est susceptible de devenir l'un ou l'autre.

En ayant égard aux équations (3), on trouve simplement

$$\frac{d^2S}{ds^2}=\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2+2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y+\frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2\ ;$$

d'où l'on voit, à cause de l'indétermination et de l'indépendance de δx et δy, que $\frac{d^2S}{ds^2}$ ne pourra être nul pour un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), qu'autant que ce système de valeurs rendra nuls, à la fois, les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2}\ ,\quad \frac{d^2S}{dxdy}\ ,\quad \frac{d^2S}{dy^2}\ .$$

Si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), ne rend pas, à la fois, ces trois coefficiens nuls, il pourra y avoir un *maximum* ou un *minimum* de la fonction S, répondant à ce système, mais il faudra pour cela que la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ ou

$$\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2+2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y+\frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2, \qquad (4)$$

conserve constamment le même signe quelles que soient les variations δx et δy, et il y aura *maximum* ou *minimum* suivant que ce signe invariable sera *négatif* ou *positif*.

Cette condition sera infailliblement remplie, quels que soient δx et δy, si la fonction (4) n'est décomposable qu'en facteurs imaginaires du premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}<0\,; \qquad (5)$$

ce qui exige évidemment que les deux coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2},\quad \frac{d^2S}{dy^2},$$

soient de même signe; et, comme leur signe commun sera aussi évidemment le signe invariable de la fonction (4), il s'ensuit qu'il y aura *maximum* ou *minimum* suivant qu'ils seront tous deux *négatifs* ou tous deux *positifs*.

Euler n'avait indiqué que la nécessité d'avoir ces deux coefficiens différentiels de même signe, et c'est Lagrange qui a signalé le premier la condition (5). Mais on verra tout à l'heure que, si l'un n'exigeait pas assez, l'autre a exigé un peu trop.

En ayant égard aux équations (3), et en supposant nuls les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2},\quad \frac{d^2S}{dxdy},\quad \frac{d^2S}{dy^2},$$

on trouve

$$\frac{d^3S}{ds^3}=\frac{d^3S}{dx^3}\delta x^3+3\frac{d^3S}{dx^2dy}\delta x^2\delta y+3\frac{d^3S}{dxdy^2}\delta x\delta y^2+\frac{d^3S}{dy^3}\delta y^3,$$

d'où l'on voit, à cause de l'indétermination et de l'indépendance des variations δx et δy, que, si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), ne rend pas nuls à la fois les quatre coefficiens différentiels

$$\frac{d^3S}{dx^3}, \quad \frac{d^3S}{dx^2dy}, \quad \frac{d^3S}{dxdy^2}, \quad \frac{d^3S}{dy^3},$$

le coefficient différentiel $\frac{d^3S}{ds^3}$ ne pourra devenir nul quels que soient δx et δy; et conséquemment ce système de valeurs ne répondra ni à un *maximum* ni à un *minimum* de la fonction S.

Mais si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), rend ces quatre coefficiens différentiels nuls, comme ceux qui les précèdent, on trouvera alors

$$\frac{d^4S}{ds^4}=\frac{d^4S}{dx^4}\delta x^4+4\frac{d^4S}{dx^3dy}\delta x^3\delta y+6\frac{d^4S}{dx^2dy^2}\delta x^2\delta y^2+4\frac{d^4S}{dxdy^3}\delta x\delta y^3+\frac{d^4S}{dy^4}\delta y^4,$$

et il pourra y avoir, pour ce système de valeur, *maximum* ou *minimum* de la fonction S; mais il faudra, pour cela, que la fonction $\frac{d^4S}{ds^4}$ ou

$$\frac{d^4S}{dx^4}\delta x^4+4\frac{d^4S}{dx^3dy}\delta x^3\delta y+6\frac{d^4S}{dx^2dy^2}\delta x^2\delta y^2+4\frac{d^4S}{dxdy^3}\delta x\delta y^3+\frac{d^4S}{dy^4}\delta y^4, \quad (6)$$

conserve constamment le même signe quelles que soient les variations δx et δy; et il y aura *maximum* ou *minimum* suivant que ce signe invariable sera *négatif* ou *positif*.

Cette condition sera infailliblement remplie, quels que soient δx et δy, si les facteurs du premier degré de la fonction (6) sont tous quatre imaginaires; mais c'est là une circonstance que l'on ne sait point encore exprimer généralement d'une manière simple et symétrique, et sur laquelle nous pourrons revenir dans une autre occasion.

Si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3) rendait nuls, à la fois, les cinq coefficiens différentiels du quatrième ordre

$$\frac{d^4S}{dx^4}, \quad \frac{d^4S}{dx^3dy}, \quad \frac{d^4S}{dx^2dy^2}, \quad \frac{d^4S}{dxdy^3}, \quad \frac{d^4S}{dy^4},$$

ainsi que tous ceux des ordres inférieurs, sans rendre nuls, à la fois, tous ceux du cinquième ordre, alors $\frac{d^5S}{ds^5}$ ne pourrait devenir nul, pour ce même système de valeur, quels que fussent δx et δy; de sorte qu'il ne répondrait à ce système de valeurs ni *maximum* ni *minimum* de la fonction S.

Nous venons de présenter les conditions de *maxima* et de *minima* des fonctions de deux variables, telles qu'on les rencontre dans tous les traités sur la matière; mais nous allons voir que ces conditions exigent souvent trop, et qu'on n'a point fait, jusqu'ici, une analyse assez soigneuse de tous les cas qui peuvent s'offrir.

Supposons d'abord qu'en vertu de la substitution de l'un des systèmes de valeurs, tirés des équations (3), on ait

$$\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2} = 0\,; \qquad (7)$$

tout ce qu'on en devra conclure, c'est que $\frac{d^2S}{ds^2}$ est de la forme

$$M(P\delta x + Q\delta y)^2,$$

et que conséquemment quelque valeur qu'on donne à δx et δy, $\frac{d^2S}{ds^2}$ ne prendra jamais un signe différent de celui de M.

Mais si l'on prend δx et δy de telle sorte que l'on ait $P\delta x + Q\delta y = 0$; comme, en général, en vertu de cette hypothèse, $\frac{d^3S}{ds^3}$ ne deviendra pas identiquement nul, il s'ensuit qu'alors il n'y aura, généralement parlant, ni *maximum* ni *minimum*, ce qui est conforme aux théories connues.

Il pourrait se faire cependant que $\frac{d^3S}{ds^3}$ contient le facteur $P\delta x+Q\delta y$; et si d'ailleurs $\frac{d^4S}{ds^4}$ gardait invariablement le même signe que M, quels que pussent être δx et δy, on voit qu'alors, soit qu'on supposât $P\delta x+Q\delta y=0$, soit qu'on donnât à δx et δy des valeurs qui ne vérifiassent pas cette condition, le premier coefficient différentiel que la substitution ne ferait pas disparaître serait toujours un coefficient différentiel d'un ordre pair, conservant constamment le signe de M; il y aurait donc *maximum* ou *minimum*, bien que la condition (5) ne fût pas satisfaite, suivant que ce signe serait *négatif* ou *positif*.

Les mêmes considérations prouvent que, si un système de valeurs de x et y, tirées des équations (3), rend identiquement nuls $\frac{d^2S}{ds^2}$ et $\frac{d^3S}{ds^3}$, sans rendre identiquement nul $\frac{d^4S}{ds^4}$; il ne sera pas indispensable, pour le *maximum* ou le *minimum*, que les facteurs du premier degré de cette fonction soient tous quatre imaginaires. Si, par exemple, cette fonction a deux facteurs réels égaux et deux facteurs imaginaires, que l'un de ces facteurs égaux se trouve dans $\frac{d^5S}{ds^5}$, sans se trouver dans $\frac{d^6S}{ds^6}$, et si enfin cette dernière fonction conserve constamment le signe de $\frac{d^4S}{ds^4}$, quels que soient δx et δy, il y aura *maximum* ou *minimum*, suivant que ce signe commun sera *négatif* ou *positif*. Il en irait encore de même si, $\frac{d^4S}{ds^4}$ ayant deux couples de facteurs réels égaux, l'un des facteurs de l'un ou l'autre couple se trouvait dans $\frac{d^5S}{ds^5}$, sans se trouver dans $\frac{d^6S}{ds^6}$. On sent d'ailleurs ce qu'il y aurait à dire si l'on voulait étendre ces considérations aux coefficiens différentiels des ordres plus élevés.

Il peut souvent arriver que les équations (3) admettent un facteur commun, fonction de x et y; et, si l'on admet un système de valeurs de ces variables qui rende ce facteur nul, ce qu'on pourra faire d'une infinité de manière différentes, on se trouvera précisément dans le cas dont il vient d'être question. Si, en effet, on a

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=FT\,,\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=FU\,,$$

et qu'on prenne x et y de manière à vérifier l'équation

$$F=0\,,$$

on aura, en ayant égard à cette condition

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}=U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,,$$

et conséquemment

$$2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,;$$

il en résultera

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}s^2}=T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\delta x^2+\left(T\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)\delta x\delta y+U\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\delta y^2\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}s^2}=(T\delta x+U\delta y)\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\delta x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\delta y\right)\,;$$

mais les équations ci-dessus donnent

$$\frac{dF}{dx}=\frac{1}{U}\,\frac{d^2S}{dxdy}\;,\qquad \frac{dF}{dy}=\frac{1}{T}\,\frac{d^2S}{dxdy}\;;$$

d'où résulte, en substituant

$$\frac{d^2S}{ds^2}=(T\delta x+U\delta y)\left(\frac{\delta x}{U}+\frac{\delta y}{T}\right)\frac{d^2S}{dxdy}=\frac{1}{TU}\,\frac{d^2S}{dxdy}(T\delta x+U\delta y)^2\;;$$

la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ aura donc deux facteurs égaux du premier degré, et conséquemment la condition (7) se trouvera remplie. Il est clair d'ailleurs que le facteur $T\delta x+U\delta y$ devra se trouver dans $\frac{d^3S}{ds^3}$; mais à la première puissance seulement.

Comme ici, pour tous les systèmes de valeurs de x et y déduits de l'équation $F=0$, on aura toujours la même valeur pour S; on voit que, si l'on exigeait, pour le *maximum* de S, que les valeurs consécutives fussent *toutes plus petites*, et pour son *minimum* qu'elles fussent *toutes plus grandes*, il n'y aurait proprement alors ni *maximum* ni *minimum*; mais si l'on exige seulement, pour le *maximum* de S, qu'*aucune* valeur consécutive ne soit *plus grande*, et pour son *minimum* qu'*aucune* d'elles ne soit *plus petite*, il y aura vraiment *maximum* ou *minimum*. Tout dépendra donc de l'idée, fort arbitraire d'ailleurs, qu'on voudra attacher à ces deux mots.

Ce cas singulier a été signalé, pour la première fois, par M. F. F. Français (*Annales*, tom. III, pag. 32) qui a ainsi prouvé le premier que la condition (5) n'était pas toujours nécessaire; mais on voit que cet habile professeur n'avait aperçu qu'un côté de la question (*).

(*) Le cas signalé par M. Français est celui où la surface dont S est l'ordonnée est touchée dans toute l'étendue d'une ligne droite ou courbe par un plan parallèle à celui des xy.

III. D'après ce qui précède, il nous restera peu de choses à dire sur les *maxima* et *minima* des fonctions de plus de deux variables. Soit, par exemple, S une fonction des trois variables x, y, z; si l'on conçoit trois équations arbitraires entre ces variables et une quatrième variable s; par l'intermédiaire de ces équations, S ne sera plus fonction que de la seule variable s; et, pour que cette fonction soit *maximum* ou *minimum*, il faudra d'abord, tout au moins, qu'on ait

$$\frac{dS}{ds}=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\,,$$

quelles que soient les variations δx, δy, δz; ce qui exigera qu'on ait, à la fois,

$$\frac{dS}{dx}=0\,,\qquad \frac{dS}{dy}=0\,,\qquad \frac{dS}{dz}=0\,; \qquad (8)$$

telles seront donc les équations qui donneront les systèmes de valeurs de x, y, z, parmi lesquels seulement pourront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*, si toutefois elle est susceptible de le devenir.

Si un système de valeurs de x, y, z, déduit de ces équations, ne rend pas identiquement nulle, quels que soient δx, δy, δz, la fonction

$$\frac{d^2S}{ds^2}=\frac{d^2S}{dx^2}\delta x^2+\frac{d^2S}{dy^2}\delta y^2+\frac{d^2S}{dz^2}\delta z^2+2\frac{d^2S}{dydz}\delta y\delta z+2\frac{d^2S}{dzdx}\delta z\delta x+2\frac{d^2S}{dxdy}\delta x\delta y\,,$$

il faudra que cette fonction conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de ces variations, ce qui arrivera immanquablement, si elle se résout en deux facteurs imaginaires du premier degré. Il est aisé de s'assurer que cela exige que les trois coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2},\quad \frac{d^2S}{dy^2},\quad \frac{d^2S}{dz^2},$$

aient un même signe, contraire à celui de la fonction

$$\frac{d^2S}{dx^2}\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2+\frac{d^2S}{dy^2}\left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2}-2\,\frac{d^2S}{dydz}\,\frac{d^2S}{dzdx}\,\frac{d^2S}{dxdy},$$

et qu'en outre on ait une quelconque des trois conditions

$$\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2-\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2}<0,\quad \left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2-\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{d^2S}{dx^2}<0,\quad \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2}<0.$$

Il y aura d'ailleurs *maximum* ou *minimum* suivant que les coefficiens différentiels

$$\frac{d^2S}{dx^2},\quad \frac{d^2S}{dy^2},\quad \frac{d^2S}{dz^2},$$

seront tous trois *négatifs* ou tous trois *positifs*.

Ce cas est sujet, au surplus, à une exception analogue à celle que nous avons signalée à l'égard des fonctions de deux variables. Si l'on a, à la fois, pour un système de valeurs de x, y, z,

$$\left(\frac{d^2S}{dydz}\right)^2=\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{d^2S}{dz^2},\quad \left(\frac{d^2S}{dzdx}\right)^2=\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{d^2S}{dx^2},\quad \left(\frac{d^2S}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{d^2S}{dy^2},$$

la fonction $\frac{d^2S}{ds^2}$ renfermera le quarré d'une fonction du premier degré; or, si la racine de ce quarré se trouve facteur dans $\frac{d^3S}{ds^3}$, sans l'être dans $\frac{d^4S}{ds^4}$, et qu'en outre cette dernière fonction, pour toutes les valeurs des variations δx, δy, δz, conserve constamment le même signe que $\frac{d^2S}{ds^2}$, il y aura, pour ce système de valeurs, *maximum* ou *minimum*, suivant que ce signe sera *négatif* ou *positif*.

On voit que, dans tous les cas, et quel que soit le nombre des variables, les systèmes de valeurs de ces variables propres à rendre la fonction *maximum* ou *minimum* seront toujours donnés par les équations qu'on obtiendra en égalant séparément à zéro les coefficiens différentiels partiels de la fonction, pris tour à tour par rapport à toutes ces variables; mais qu'il pourra bien se faire que certains systèmes de valeurs, déduits de ces mêmes équations, ne rendent la fonction ni *maximum* ni *minimum*.

IV. Dans tout ce qui précède nous avons constamment supposé que les variables, dont se composait la fonction S, étaient absolument indépendantes les unes des autres; examinons présentement de quelle manière on devrait se conduire, si toutes ou partie de ces variables se trouvaient liées entre elles par des équations.

Supposons d'abord que S soit seulement fonction de deux variables liées entre elles par une équation telle que

$$\varphi(x,y)=V=0\ , \qquad (9)$$

et qu'on demande, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, qui vérifient cette dernière équation, ceux qui rendent la fonction S *maximum* ou *minimum*.

Le moyen qui s'offre le premier à la pensée, pour résoudre cette question, consiste à tirer de l'équation (9) la valeur de l'une des variables, en fonction de l'autre, de y, par exemple, en fonction de x, pour la substituer dans S qui, dès lors, ne sera plus fonction que de cette dernière variable. La question se trouvera ainsi ramenée à celle que nous avons traitée (I), et, lorsqu'on aura déterminé la valeur de x qui rend S *maximum* ou *minimum*, la substitution de cette valeur, dans l'équation (9), fera connaître la valeur correspondante de y.

Mais, outre que l'équation (9) peut souvent être très-difficile ou même impossible à résoudre, par rapport à l'une ou à l'autre des deux variables qu'elle renferme, ce procédé manquerait tout à fait d'élégance et de symétrie, il vaudra donc beaucoup mieux lui substituer le suivant :

Si l'on conçoit une équation arbitraire entre x, y et une troisième variable s ; à l'aide de cette équation et de l'équation (9), x et y, et conséquemment S, seront des fonctions de la seule variable s, et conséquemment la condition commune au *maximum* et au *minimum* de S sera, comme ci-dessus (II),

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y=0\,; \qquad (10)$$

mais ici δx et δy ne seront plus indépendans ; car, en différentiant l'équation (9) par rapport à s, on aura

$$\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y=0\,; \qquad (11)$$

éliminant donc, entre ces deux équations, une quelconque des deux variations δx et δy, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$\frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dy}=0\,; \qquad (12)$$

équation qui, combinée avec (9), fera connaître les divers systèmes de valeurs de x et y parmi lesquels seulement pourront se trouver ceux qui rendront S *maximum* ou *minimum*.

V. Soit présentement S une fonction de trois variables x, y, z, liées entre elles par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = V = 0 ; \qquad (13)$$

et supposons qu'il soit question de déterminer, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, de ces trois variables, qui vérifient l'équation (13), quels sont ceux qui rendent la fonction S *maximum* ou *minimum*.

En tirant de l'équation (13) la valeur de l'une des trois variables, de z, par exemple, en fonction des deux autres x, y, pour la substituer dans S, on ramènerait évidemment la question au cas des fonctions de deux variables indépendantes, que nous avons déjà traité (II); mais, pour les mêmes raisons que ci-dessus, il vaudra mieux procéder comme il suit.

Supposons que, outre l'équation (13), il existe deux autres équations, tout à fait arbitraires, entre les trois variables x, y, z et une quatrième variable s; au moyen de ces trois équations x, y, z, ainsi que S, se trouveront simplement fonctions de cette dernière variable; de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera, comme ci-dessus (III),

$$\frac{dS}{dx}\delta x + \frac{dS}{dy}\delta y + \frac{dS}{dz}\delta z = 0 ; \qquad (14)$$

mais ici les variations δx, δy, δz ne sont pas absolument indépendantes, car l'équation (13) donne

$$\frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z = 0 ; \qquad (15)$$

éliminant une quelconque des trois variations, δz par exemple, entre ces deux équations, on aura

$$\left(\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dx} - \frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dz}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dy} - \frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dz}\right)\delta y = 0 ;$$

equation qui doit évidemment laisser indéterminé le rapport entre δx et δy, et qui se résout conséquemment en ces deux-ci :

$$\frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dS}{dz}=0\,, \qquad \frac{dV}{dz}\,\frac{dS}{dy}-\frac{dV}{dy}\,\frac{dS}{dz}=0\,;$$

ou, plus symétriquement,

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dV}{dx}}=\frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dV}{dy}}=\frac{\frac{dS}{dz}}{\frac{dV}{dz}}\,; \qquad (16)$$

équations qui, combinées avec l'équation (13), feront connaître les systèmes de valeurs de x, y, z parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui rendront S *maximum* ou *minimum*.

VI. S étant toujours fonction des trois variables x, y, z; si ces variables sont liées entre elles par les deux équations

$$\varphi(x,y,z)=V=0\,, \qquad \varphi'(x,y,z)=V'=0\,, \qquad (17)$$

pour suivre toujours la même marche que ci-dessus, au lieu de tirer des équations (17) les valeurs de deux des variables, y et z par exemple, en fonction de la troisième x, pour les substituer dans S qui deviendrait ainsi une simple fonction de x; on supposera une équation arbitraire entre x, y, z et une quatrième variable s; au moyen de cette équation et des équations (17), x, y, z, ainsi que S, se trouveront simplement fonctions de cette dernière variable ; de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera (III)

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\,;$$

les variations δx, δy, δz étant liées entre elles par les deux relations

$$\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dz}\delta z=0\,,$$

$$\frac{dV'}{dx}\delta x+\frac{dV'}{dy}\delta y+\frac{dV'}{dz}\delta z=0\,;$$

éliminant, entre ces trois équations, deux quelconques des trois variations δx, δy, δz, la troisième disparaîtra d'elle-même, et l'on aura

$$\left(\frac{dV}{dy}\,\frac{dV'}{dz}-\frac{dV}{dz}\,\frac{dV'}{dy}\right)\frac{dS}{dx}+\left(\frac{dV}{dz}\,\frac{dV'}{dx}-\frac{dV}{dx}\,\frac{dV'}{dz}\right)\frac{dS}{dy}$$
$$+\left(\frac{dV}{dx}\,\frac{dV'}{dy}-\frac{dV}{dy}\,\frac{dV'}{dx}\right)\frac{dS}{dz}=0\,;\quad(18)$$

équation qui, combinée avec les équations (17), fera connaître les systèmes de valeurs de x, y, z parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*.

VII. Généralement, s'il s'agit de rendre *maximum* ou *minimum* une fonction S d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, \ldots\ldots$, liées entre elles par un nombre quelconque d'équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0$, ...; on égalera séparément à zéro les variations tant de S que de V, V', V'', ..., prises par rapport à toutes les variables $x, y, z, \ldots\ldots$, considérées comme fonctions d'une nouvelle variable s; on éliminera, entre les équations résultantes, autant des variations δx, δy, δz, ... qu'il se pourra; égalant alors séparément à zéro, dans l'équation finale, les coefficiens des variations restantes, il en résultera des équations en $x, y, z, \ldots$ qui, jointes aux équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0$, ..., se trouveront précisément en nombre égal à celui de ces variables; et ce sera parmi les systèmes de valeurs de ces mêmes variables, déduits de ces équations, que pourront se trouver ceux qui rendront la fonction S *maximum* ou *minimum*.

A ce procédé on pourra, au surplus, substituer le suivant qui n'en diffère que par la forme : à la variation de S, on ajoutera les produits respectifs des variations de V, V', V'', ... par des multiplicateurs λ, λ', λ'', ...; on égalera séparément à zéro, dans la somme, les coefficiens de δx, δy, δz, ...; et on éliminera ensuite les multiplicateurs λ, λ', λ'', ..., entre les équations résultantes.

VIII. Toutes les fonctions dont il a été question ci-dessus étaient des fonctions *explicites*; mais soit donnée, entre deux variables x et y, une équation

$$S=0\ ;$$

au moyen de cette équation, chacune des deux variables sera une fonction *implicite* de l'autre; et l'on pourra se proposer de déterminer cette dernière de manière à rendre la première *maximum* ou *minimum*.

Supposons, par exemple, qu'il soit question de déterminer x de manière à rendre y *maximum* ou *minimum*; la première pensée qui s'offrirait, pour résoudre cette question, serait de résoudre l'équation proposée par rapport à y qui deviendrait ainsi une fonction explicite de x, ce qui ramenerait la question à celle que nous avons déjà traitée (I); mais comme la proposée pourrait être difficile ou même impossible à résoudre, par rapport à y, il sera beaucoup plus convenable d'opérer de la manière suivante :

En considérant y comme fonction de la variable indépendante x, la proposée donne (pag. 277)

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

or, la condition commune au *maximum* et au *minimum* de y est $\frac{dy}{dx}$; on aura donc, dans ce cas,

$$\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

équation de laquelle éliminant y, au moyen de la proposée, on aura l'équation en x qui donnera les valeurs de cette variable parmi lesquelles seulement pourront se trouver celles qui rendront y *maximum* ou *minimum*.

Il est aisé de conclure de là que si, au contraire, il s'agissait d'assigner les valeurs de y qui rendent x *maximum* ou *minimum*, on y parviendrait en éliminant x entre les deux équations

$$S=0\ , \qquad \frac{dS}{dy}=0\ .$$

IX. Supposons, en second lieu, que l'équation $S=0$ contienne trois variables x, y, z, et qu'il soit question d'assigner, parmi les systèmes de valeurs, en nombre infini, qu'on peut prendre pour x et y, ceux qui rendent z *maximum* ou *minimum*. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, au lieu de résoudre l'équation par rapport à z, ce qui ramenerait la question au cas des fonctions explicites de deux variables (II), on remarquera que la proposée, en y considérant z comme fonction de x et y, donne (pag. 279) les deux différentielles partielles.

$$\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ , \qquad \frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\ ;$$

or, les conditions communes au *maximum* et au *minimum* de z sont $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$; on devra donc avoir, dans ce cas,

$$\frac{dS}{dx}=o\,,\qquad \frac{dS}{dy}=o\;;$$

en éliminant donc z de chacune de ces équations, au moyen de la proposée, on obtiendra entre x et y deux équations qui donneront les seuls systèmes de valeurs de ces variables parmi lesquels devront se trouver ceux qui rendront la fonction z *maximum* ou *minimum*.

Il est aisé de conclure de là qu'en éliminant y entre les trois équations

$$S=o\,,\qquad \frac{dS}{dz}=o\,,\qquad \frac{dS}{dx}=o\,,$$

les deux équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de z et x parmi lesquels doivent se trouver ceux qui conviennent aux *maxima* et *minima* de y ; et qu'en éliminant x entre ces trois-ci :

$$S=o\,,\qquad \frac{dS}{dy}=o\,,\qquad \frac{dS}{dz}=o\,,$$

les deux équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de y et z qui conviennent aux *maxima* et *minima* de x.

X. En général, quelque nombre de variables que renferme l'équation $S=o$; en éliminant une quelconque de ces variables entre elle et ses dérivées, prises tour à tour par rapport à toutes les autres, les équations résultantes donneront les systèmes de valeurs de ces dernières parmi lesquels seulement devront se trouver ceux qui pourront rendre la première *maximum* ou *minimum*.

XI. Soient encore, entre les trois variables x, y, z, les deux équations

$$S=o\,,\qquad S'=o\,,$$

au moyen desquelles deux quelconques de ces variables sont fonctions l'une de l'autre ; et supposons que, par exemple, il soit question de déterminer x de manière à rendre y *maximum* ou *minimum*. Pour suivre toujours la même marche, au lieu d'éliminer z entre ces deux équations, ce qui ramenerait la question à l'une des précédentes (VIII) ; on remarquera qu'au moyen de ces deux équations y et z étant des fonctions de x ; on doit avoir (pag. 281)

$$\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dS'}{dx}+\frac{dS'}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS'}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0;$$

or, la condition commune au *maximum* et au *minimum* de y est $\frac{dy}{dx}=0$, au moyen de laquelle ces deux équations se réduisent à

$$\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0, \qquad \frac{dS'}{dx}+\frac{dS'}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0;$$

entre lesquelles éliminant $\frac{dz}{dx}$, il viendra

$$\frac{dS}{dx}\,\frac{dS'}{dz}-\frac{dS}{dz}\,\frac{dS'}{dx}=0;$$

d'où éliminant y et z, au moyen des deux proposées, l'équation résultante donnera les valeurs de x qui conviennent aux *maxima* et aux *minima* de y.

Ce qui précède nous paraît plus que suffisant pour montrer de quelle manière on devra se conduire dans tous les cas qui pourront se présenter.