ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Démonstration d'un théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 256 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 304-305
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__304_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration d'un théorème d'analyse indéterminée énoncé à la pag. 256 du précédent volume ;

Par un ABONNÉ.

THÉORÈME. *Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros.*

Démonstration. Soit n un nombre entier quelconque, et soit converti la fraction $\frac{1}{n}$ en parties décimales; cette transformation conduira à une suite décimale périodique, laquelle pourra ensuite être convertie, suivant les principes connus, en une fraction ordinaire dont le dénominateur sera, en général, une suite de 9 suivis de plusieurs zéros; et cette nouvelle fraction devra être égale à la fraction irréductible $\frac{1}{n}$.

Or, lorsque deux fractions sont égales, et que l'une d'elle est irréductible, les deux termes de l'autre doivent être les produits des deux termes de celle-là par un même nombre entier; donc, en particulier, le dénominateur de la seconde fraction que nous venons de voir composé d'une suite de 9 suivis de plusieurs zéros, sera le produit de n par un nombre entier; d'où il résulte que n en sera un diviseur, comme l'annonce le théorème.

On voit par là que, pour que le théorème soit généralement vrai, il faut admettre 1.° que le nombre dont n est diviseur peut être simplement l'unité suivie de plusieurs zéros; 2.° que ce nombre peut être exprimé par une suite de 9 sans aucun zéro à sa droite. Le premier cas aura lieu lorsque n n'aura aucun facteur premier différent de 2 et 5; le seccond aura lieu lorsqu'au contraire n n'aura ni 2 ni 5 parmi ses facteurs premiers. Dans tous les autres cas, le nombre dont n sera diviseur aura à la fois des 9 et des zéros. On voit, au surplus, que, dans tous les cas, le nombre total des uns et des autres sera toujours inférieur à n.

Les mêmes considérations prouvent qu'en général, dans tout système de numération, il n'est aucun nombre entier qui n'ait, parmi ses multiples, un nombre exprimé par le plus grand chiffre du système, écrit plusieurs fois de suite, et suivi de plusieurs zéros; ce qui revient à dire que l'équation $a^x(a^y-1)=bz$ est toujours résoluble en nombres entiers, quels que soient les nombres entiers a et b (*).

Lyon, le 17 novembre 1829.

(*) A la pag. 185 du V.me volume du *Journal* de M. Crelle, on trouve une démonstration de ce théorème qui, bien qu'assez briève, est beaucoup moins élémentaire que celle qu'on vient de lire; mais, à la pag. 296 du même volume, on en trouve une autre démonstration directe fort simple, ainsi que celle d'un théorème plus général. *J. D. G.*