ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analyse transcendante. Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 213-284

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__213_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel ;

Par M. GERGONNE.

LES noms d'*analyse infinitésimale*, de *haute analyse*, d'*analyse transcendante* donnés indistinctement au calcul différentiel, en ont fait une sorte d'épouvantail et semblent signaler cette branche d'analyse comme une science à part, et tout à fait inaccessible aux capacités ordinaires ; et c'est apparemment pour cela qu'elle est généralement beaucoup moins cultivée qu'elle ne mériterait de l'être ; et les méthodes d'exposition qui en ont été tentées dans ces derniers temps, méthodes très-savantes et très-rigoureuses, si l'on veut, ne paraissent guère de nature à rendre ce genre de calcul beaucoup plus attrayant pour les élèves des écoles où il est enseigné ; aussi n'ont-ils rien de plus pressé, pour la plupart, que d'oublier, le plus tôt qu'ils le peuvent, ce qu'ils ont été contraints d'en apprendre.

Je me propose ici de tenter de faire descendre cette branche d'analyse des hautes régions où l'on semble avoir voulu la reléguer, et de l'abaisser, de plein pied, s'il est possible, avec l'analyse ordinaire, de manière à n'en être plus qu'une continuation. Peut-être, en parcourant cet essai, quelques jeunes-gens, à qui les principes du calcul différentiel ont coûté beaucoup de peine à acquérir, seront-ils fort surpris que ce soit une chose si simple et si facile ; peut-être alors seront-ils tentés de reprendre, avec une ardeur nouvelle, une étude qui leur avait semblé jusqu'ici environnée de tant d'épines, et qu'ils étaient sur le point d'abandonner sans retour.

Il y a principalement à considérer, dans le calcul différentiel, des méthodes particulières de calcul, et l'application de ces méthodes à la solution des problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique; c'est surtout sur ces applications que porteront les simplifications que je me propose de tenter.

J'ignore s'il existe quelques fonctions qui ne soient pas développables en une suite finie ou illimitée de monomes; s'il en existe de telles, il n'en sera nullement question ici. Je supposerai le lecteur assez avancé dans l'analyse ordinaire pour savoir que toute fonction algébrique est susceptible d'un tel développement, et pour connaître la forme du développement des principales fonctions transcendantes, telle qu'on la trouve dans une multitude de traités élémentaires auxquels il me suffit de renvoyer.

INTRODUCTION.

Soit un polynome formé d'un nombre fini ou illimité de termes, dans chacun desquels la variable x soit affectée d'un coefficient et d'un exposant constans quelconques, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, rationnels ou radicaux, réels ou imaginaires. Si l'on forme un autre polynome, d'un pareil nombre de termes, dont chacun des termes soit déduit de son correspondant dans le premier, en multipliant celui-ci par l'exposant de x, et en diminuant ensuite cet exposant d'une unité, le nouveau polynome, ainsi obtenu, sera ce que l'on appelle, dans l'analyse élémentaire, la *fonction dérivée* du premier qui en sera dit à l'inverse la *fonction primitive*.

Soit, par exemple, la fonction primitive proposée

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots$$

sa fonction dérivée sera

$$\alpha A x^{\alpha-1}+\beta B x^{\beta-1}+\gamma C x^{\gamma-1}+\ldots\ldots$$

Ces sortes de fonctions se représentant sans cesse dans l'analyse et dans ses applications, soit à la géométrie, soit à la mécanique, on est fondé à présumer qu'elles doivent y jouer un rôle assez important; et l'on se trouve ainsi naturellement invité à en étudier la nature et les propriétés.

La notion que nous venons de donner ici des fonctions dérivées semblerait, au premier abord, n'être applicable qu'aux fonctions composées d'une suite de monomes, telles que celle que nous avons prise pour exemple; mais on ne doit pas perdre de vue que toutes les fonctions connues sont réductibles à cette forme, et qu'ainsi développées, rien n'est plus facile alors que d'en former les fonctions dérivées. A la vérité, ces dérivées, comme leur fonction primitive elle-même, après son développement, se trouveront le plus souvent composées d'une infinité de termes; mais le plus souvent aussi ces termes, en nombre infini, seront le développement connu d'une fonction finie de x, laquelle pourra ainsi être considérée comme la dérivée de la fonction primitive proposée.

Eclaircissons ceci par un exemple simple: soit la fonction primitive $(a+bx)^m$ dont on demande la fonction dérivée; en la développant en série, par la formule du binome, on trouve

$$a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}bx+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2x^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3x^3+\ldots\ldots;$$

développement qui, excepté le cas où m est un nombre entier positif, se compose d'une infinité de termes, et dont la fonction dérivée est

$$ma^{m-1}b+m.\frac{m-1}{1}a^{m-2}b^2x+m.\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}a^{m-3}b^3x^2+\ldots\ldots$$

qui peut être encore écrite comme il suit:

$$mb\left(a^{m-1}+\frac{m-1}{1}a^{m-2}bx+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}a^{m-3}b^2x^2+\ldots\ldots\right),$$

ou bien encore, de cette manière,

$$mb(a+bx)^{m-1};$$

de sorte que cette fonction finie est la dérivée de la fonction finie $(a+bx)^m$. Nous dirons donc que deux fonctions finies, de forme quelconque, sont dérivées l'une de l'autre, lorsque, développées l'une et l'autre en une suite de monomes, le développement de l'une sera la fonction dérivée du développement de l'autre. Nous verrons bientôt, au surplus, qu'il est très-aisé d'obtenir, sous forme finie, la dérivée d'une fonction finie donnée, sans qu'il soit besoin de recourir à leur développement.

On voit qu'ici deux problèmes, exactement inverses l'un de l'autre, se présentent à résoudre : 1.° Une fonction étant donnée, comme fonction primitive, on peut se proposer d'en assigner la fonction dérivée ; 2.° une fonction étant donnée, comme dérivée d'une fonction primitive inconnue, on peut se proposer d'assigner cette fonction primitive. L'art de résoudre le premier de ces deux problèmes constitue proprement le *calcul différentiel* qu'on pourrait aussi appeler le calcul des dérivations ; la résolution de l'autre est l'objet du *calcul intégral.* Il ne sera principalement question ici que de la première de ces deux branches de calcul.

Pour indiquer la dérivée d'une fonction quelconque de la variable x, nous ferons précéder cette fonction de la caractéristique d, initiale du mot dérivée, en n'interposant aucun signe entre cette caractéristique et la fonction, lorsque cette fonction sera représentée par une seule lettre, ou bien lorsqu'elle sera un polynome entre parenthèses, sans exposant total, ou encore lorsqu'elle sera fractionnaire ou radical, sans aucun facteur au-devant du signe. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{d}X\,,\quad \mathrm{d}(a+bx)\,,\quad \mathrm{d}\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,,\quad \mathrm{d}\sqrt{a^2+x^2}\,,$$

indiqueront les dérivées respectives des fonctions

$$X\,,\quad a+bx\,,\quad \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,,\quad \sqrt{a^2+x^2}\,;$$

dans tous les autres cas nous ferons suivre la caractéristique d d'un point destiné à rappeler que cette caractéristique porte sur l'ensemble des facteurs qui la suivent. Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{d}.x^m\,,\quad \mathrm{d}.(a+x)^m\,,\quad \mathrm{d}.(a+x)(b+x)\,,\quad \mathrm{d}.ax^m\sqrt{b^2+x^2}\,,$$

indiqueront les dérivées respectives des fonctions

$$x^m\,,\quad (a+x)^m\,,\quad (a+x)(b+x)\,,\quad ax^m\sqrt{b^2+x^2}\,.$$

On voit, d'après ces conventions, que $\mathrm{d}.x^m$ n'est pas la même chose que $\mathrm{d}x^m$ qu'on emploie comme abrégé de $(\mathrm{d}x)^m$, pareillement $\mathrm{d}.(a+x)(b+x)$ diffère de $\mathrm{d}(a+x)(b+x)$ en ce que la première de ces expressions est la dérivée du produit $(a+x)(b+x)$, tandis que la seconde est le produit de la dérivée de $a+x$ par le facteur $b+x$. Au surplus, pour éviter toute équivoque, il vaut mieux écrire cette dernière expression comme il suit : $(b+x)\mathrm{d}(a+x)$ (*).

On voit d'après ces conventions que, si l'on pose

(*) Nous croirions superflu de faire remarquer que la caractéristique d, tout comme le signe radical, est un symbole d'opération et non de quantité, et ne doit pas conséquemment être prise pour un facteur, si nous ne voyons que, dans le *Commentaire* du R. P. PAULIAN sur les *Infiniment petits* du marquis de L'HOPITAL (pag. 263), le bon jésuite s'y est mépris.

$$X = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots,$$

on aura

$$\mathrm{d}X = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots$$

Si a est une constante quelconque et qu'on ait $X = a$, on pourra écrire

$$X = ax^{0} ;$$

d'où, en appliquant le principe de dérivation,

$$\mathrm{d}X = 0ax^{0-1} = \frac{0a}{x} = 0 .$$

Ainsi, *la dérivée d'une quantité constante est nulle.*

Il suit de là que, si une fonction de x, développée en une suite de monomes, renferme un terme indépendant de x, ce terme n'aura point de correspondant dans la dérivée de cette fonction. Il en résulte aussi que, si deux fonctions de x ne diffèrent l'une de l'autre que par un terme indépendant de x, leurs dérivées seront rigoureusement égales. Ainsi, en général, X et X' étant deux fonctions de x, si l'on a

$$X - X' = a ;$$

a étant une constante quelconque, on aura

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}X' ;$$

d'où l'on voit qu'*une infinité de fonctions primitives différentes peuvent avoir toutes la même fonction dérivée.*

Il suit de là que, tandis que le problème général que le calcul différentiel a pour objet de résoudre est un problème absolument déterminé, susceptible d'une solution unique, celui que se propose le calcul intégral est, au contraire, un problème tout à fait indéterminé, susceptible d'une infinité de solutions différentes; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la fonction primitive d'une dérivée proposée ne saurait être *complète* qu'autant qu'elle contient une *constante* tout à fait *arbitraire*, introduite dans cette fonction primitive, de telle sorte que la dérivation la fasse disparaître; constante que l'on détermine ensuite, comme le signe d'un radical, d'après les conditions particulières de la question dont on s'occupe.

D'après le principe général de dérivation, on a

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^1=1x^{1-1}=1x^0=1.1=1\ ,$$

c'est-à-dire que *la dérivée de la variable est égale à l'unité;* et, comme l'unité ne divise pas, il s'ensuit que, si X est une fonction quelconque de x, au lieu d'écrire simplement, pour sa dérivée $\mathrm{d}X$, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$. Cette remarque peut, au premier abord, sembler puérile; ce qui va suivre en fera juger autrement.

Représentons généralement par S une fonction des deux variables x et y, et supposons, par exemple, qu'on ait,

$$S=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F\ ;$$

on pourra indifféremment se proposer d'assigner la dérivée de cette fonction, soit par rapport à la variable x, soit par rapport à la variable y; d'où l'on voit qu'ici l'expression $\mathrm{d}S$ serait tout à fait équivoque; mais, de même qu'en prenant la dérivée par rapport à x, on a $\mathrm{d}x=1$, on aura aussi, en la prenant par rapport à y, $\mathrm{d}y=1$. En conséquence on peut convenir de représenter par $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ la dérivée de S, prise uniquement par rapport à la variable x, et par $\frac{dS}{dy}$ la dérivée de la même fonction prise uniquement par rapport à la variable y ; et de la sorte toute équivoque disparaît (*).

En prenant la dérivée de S, par rapport à x seulement, tous les termes sans x que renferme cette fonction doivent disparaître, comme disparaissent les termes constans dans les dérivées des fonctions de la seule variable x ; et il doit en être de même des termes sans y, dans la dérivée de la même fonction, prise par rapport à y seulement. On trouve ainsi :

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Cy+D) , \qquad \frac{dS}{dy}=2(By+Cx+E) .$$

Ces valeurs de $\frac{dS}{dx}$ et de $\frac{dS}{dy}$ sont dites les *dérivées partielles* de la fonction S, relatives à x et à y, respectivement.

Pareillement, si S est une fonction des trois variables x, y, z, et qu'on ait, par exemple,

$$S=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L ,$$

on pourra se proposer d'en prendre la dérivée, soit par rapport à x, soit par rapport à y, soit par rapport à z ; en dénotant respectivement ces dérivées partielles par $\frac{dS}{dx}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dz}$, et observant que tous les termes qui ne renferment pas la variable, par rapport à laquelle on prend la dérivée partielle, doivent disparaître, on trouvera

(*) Depuis une trentaine d'années, la coutume s'est à peu près généralement introduite d'énoncer le symbole $\frac{dS}{dx}$ en disant : dS sur dx ; mais il nous paraît beaucoup plus classique, et il n'est pas beaucoup plus long de dire, comme autrefois : dS divisé par dx ; car, pour énoncer ab, on ne dit pas : a à côté de b ; tout comme, pour énoncer a^m, on ne dit pas : m à droite et un peu au-dessus de a.

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Ez+Fy+G)\ ,$$

$$\frac{dS}{dy}=2(By+Fx+Dz+H)\ ,$$

$$\frac{dS}{dz}=2(Cz+Dy+Ex+K)\ .$$

On voit donc qu'en prenant la dérivée partielle d'une fonction de tant de variables qu'on voudra, relative à l'une d'entre elles, non seulement les termes constans, mais encore tous ceux qui ne renferment point cette variable doivent disparaître; d'où il suit que cette dérivée partielle demeurerait encore la même, si les termes que la dérivation a fait disparaître avaient été autres que ce qu'ils étaient réellement. Si donc on donne, comme dérivée partielle d'une fonction primitive inconnue, une fonction de plusieurs variables; comme, dans la dérivation de laquelle cette fonction donnée est supposée provenir, des termes affectés seulement des variables auxquelles cette dérivée n'est point relative, *auront pu* disparaître, la fonction primitive cherchée *devra*, pour être *complète*, renfermer une *fonction arbitraire* de toutes ces variables, tellement combinée avec la variable à laquelle la dérivée partielle donnée se rapporte, que cette fonction arbitraire disparaisse par l'effet de la dérivation. Les fonctions arbitraires, ainsi introduites, se déterminent, comme les constantes arbitraires, d'après les circonstances particulières de la question dont on s'occupe.

La dérivée d'une fonction d'une seule variable, tout comme les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, étant elles-mêmes, en général, des fonctions de ces variables, on peut se demander d'en déterminer les dérivées, puis les dérivées de ces dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient ainsi ce qu'on appelle les *dérivées successives* de la fonction proposée; et ces dérivées se distinguent les unes des autres par les dénominations de *premières*, *secondes*, *troisièmes*, ... *dérivées*. Nous ferons connaître plus loin les notations par lesquelles on les désigne.

On voit, par ce qui précède, que la recherche des dérivées partielles successives des fonctions de plusieurs variables, ne saurait éprouver de difficulté, dès qu'on sait déterminer les dérivées successives des fonctions d'une seule variable; et que cette dernière détermination se réduit finalement à savoir assigner la première dérivée de ces sortes de fonctions. C'est donc sur ce dernier problème que toute notre attention doit d'abord se concentrer.

SECTION PREMIÈRE.

Des fonctions d'une seule variable.

Cette section comprendra deux paragraphes. Dans le premier, nous nous occuperons exclusivement de la recherche des premières dérivées; dans le second, nous examinerons les propriétés des dérivées successives.

§. I.

Premières dérivées des fonctions d'une seule variable.

Dans tout ce qui va suivre nous représenterons constamment par X, X', X'', X''', ... des fonctions quelconques, algébriques ou transcendantes de la seule variable x, et nous représenterons simplement leurs dérivées respectives par $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}X'$, $\mathrm{d}X''$, $\mathrm{d}X'''$.... attendu que, dans le cas particulier qui nous occupe, le dénominateur $\mathrm{d}x$ est tout à fait superflu.

Soient d'abord les deux fonctions X et X' développées sous cette forme

$$X=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots,$$

$$X' = A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots ,$$

d'où

$$X + X' = \left\{ \begin{array}{l} \quad Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots\ldots \\ + A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

on en conclura

$$\mathrm{d}X = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}X' = \alpha' A'x^{\alpha'-1} + \beta' B'x^{\beta'-1} + \gamma' C'x^{\gamma'-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}(X + X') = \left\{ \begin{array}{l} \quad \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots\ldots \\ + \alpha' A'x^{\alpha'-1} + \beta' B'x^{\beta'-1} + \gamma' C'x^{\gamma'-1} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

et, par suite,

$$\mathrm{d}X + \mathrm{d}X' = \left\{ \begin{array}{l} \quad \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots\ldots \\ + \alpha' A'x^{\alpha'-1} + \beta' B'x^{\beta'-1} + \gamma' C'x^{\gamma'-1} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

ce qui donne, en comparant,

$$\mathrm{d}(X + X') = \mathrm{d}X + \mathrm{d}X' ; \qquad (1)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme des dérivées de ces deux fonctions.*

Si, dans cette formule, on suppose que X' se change en $X' + X''$, elle deviendra

$$\mathrm{d}(X + X' + X'') = \mathrm{d}X + \mathrm{d}(X' + X'') ,$$

ou, en vertu de la même formule,

$$d(X+X'+X'')=dX+dX'+dX'' .$$

supposant encore que X'' se change en $X''+X'''$, on aura

$$d(X+X'+X''+X''')=dX+dX'+d(X''+X''') ;$$

ou bien, en vertu de la même formule,

$$d(X+X'+X''+X'''+......)=dX+dX'+dX''+dX''' ,$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on aura, en général,

$$d(X+X'+X''+X'''+.....)=dX+dX'+dX''+dX'''+.... \quad (2)$$

c'est-à-dire: *la dérivée de la somme de tant de fonctions qu'on voudra est égale à la somme des dérivées de toutes ces fonctions*,

Supposons $X=X'=X''=X'''=........$ et ces fonctions au nombre de n; la formule (2) deviendra simplement

$$d.nX=n.dX ; \quad (3)$$

c'est-à-dire: *la dérivée du produit d'une fonction par un nombre entier positif quelconque est le produit de la dérivée de cette fonction par ce même nombre.*

En vertu de la formule (1), on a

$$d(X'+X'')=dX'+dX'' ;$$

posant

$$X'+X''=X , \qquad \text{d'où} \qquad X''=X-X' ,$$

il viendra, en substituant,

$$dX=dX'+d(X-X') ,$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}(X-X')=\mathrm{d}X-\mathrm{d}X' \; ; \qquad (4)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la différence de deux fonctions est égale à la différence des dérivées de ces deux fonctions.*

Si, dans cette dernière formule, on suppose $X=0$, on aura $\mathrm{d}X=0$; en conséquence, elle deviendra, en changeant ensuite X' en X,

$$\mathrm{d}(-X)=-\mathrm{d}X \; ; \qquad (5)$$

c'est-à-dire : *les dérivées de deux fonctions qui ne diffèrent que par le signe, ne diffèrent également que par le signe ;* ou, en d'autres termes, *si la somme de deux fonctions est nulle, la somme de leurs dérivées le sera également.*

De tout cela il est facile de conclure généralement que *la dérivée de la somme algébrique de tant de fonctions qu'on voudra, est égale à la somme algébrique des dérivées de toutes ces fonctions.*

En vertu de la formule (3) on a

$$\mathrm{d}.nX'=n.\mathrm{d}X' \; ;$$

posant

$$nX'=X, \quad \text{d'où} \quad X'=\frac{X}{n},$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}X=n.\mathrm{d}\frac{X}{n} \; ;$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}\frac{X}{n}=\frac{\mathrm{d}X}{n} \; ; \qquad (6)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du quotient de la division d'une fonction* *par un diviseur entier positif quelconque est égale au quotient de la division de la dérivée de cette fonction par ce même diviseur.*

On a pareillement,

$$\mathrm{d}\frac{X'}{n}=\frac{\mathrm{d}X'}{n} \;;$$

posant

$$X'=mX\,, \qquad \text{d'où (3)} \qquad \mathrm{d}X'=m.\mathrm{d}X\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}.\frac{m}{n}X=\frac{m}{n}\,\mathrm{d}X\;; \qquad (7)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du produit d'une fonction par une fraction positive quelconque est égale au produit de la dérivée de cette fonction par cette même fraction.* La formule (5) prouve, en outre, qu'il doit en être de même pour une *fraction négative.*

Soient X et X' deux fonctions monomes de x, telles qu'on ait

$$X=Ax^{\alpha}\,, \qquad X'=A'x^{\alpha'}\,,$$

où A, A', α, α' sont des constantes quelconques; on en conclura

$$XX'=AA'x^{\alpha+\alpha'}\,,$$

et ensuite

$$\mathrm{d}X=\alpha Ax^{\alpha-1}\,, \qquad \mathrm{d}X'=\alpha'A'x^{\alpha'-1}\,,$$

$$\mathrm{d}.XX'=(\alpha+\alpha')AA'x^{\alpha+\alpha'-1}\,.$$

Cela donnera

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{\alpha}{x}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}X'}{X'}=\frac{\alpha'}{x}\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}.XX'}{XX'}=\frac{\alpha+\alpha'}{x}\,,$$

donc, en comparant,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'}{XX'}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\,, \tag{8}$$

ou encore

$$\mathrm{d}.XX'=X'\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'\,. \tag{9}$$

Soit toujours X une fonction monome, et soit X' une fonction polynome; telle qu'on ait

$$X'=X'_1+X'_2+X'_3+\ldots\ldots\,;$$

X'_1, X'_2, X'_3, ... étant des monomes, on aura

$$XX'=XX'_1+XX'_2+XX'_3+\ldots\ldots\,;$$

de là on conclura (2)

$$\mathrm{d}X'=\mathrm{d}X'_1+\mathrm{d}X' \;+\mathrm{d}X'_3+\ldots\ldots\,,$$

$$\mathrm{d}.XX'=\mathrm{d}.XX'_1+\mathrm{d}.XX'_2+\mathrm{d}.XX'_3+\ldots\ldots\,;$$

mais on a (9)

$$\mathrm{d}.XX'_1=X'_1\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'_1\,,$$

$$\mathrm{d}.XX'_2=X'_2\mathrm{d}X+X\mathrm{d}X'_2\,,$$

$$\mathrm{d}.XX'_3=X'_3\mathrm{d}X+\mathrm{d}X'_3\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

ce qui donnera, en substituant dans la valeur de $d.XX'$

$$d.XX'=(X'_1+X'_2+X'_3+\ldots..)dX+X(dX'_1+dX'_2+dX_3+\ldots..)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$d.XX'=X'dX+XdX'\ ;$$

ainsi l'équation (9), et conséquemment l'équation (8), a encore lieu, lors même que l'un des deux facteurs X et X' est un polynome.

Supposons présentement que la fonction X soit aussi un polynome, de telle sorte que l'on ait

$$X=X_1+X_2+X_3+\ldots\ldots\ ;$$

X_1, X_2, X_3, ... étant des monomes; on aura

$$XX'=X_1X'+X_2X'+X_3X'+\ldots..\ ;$$

d'où on conclura (2)

$$dX=dX_1+dX_2+dX_3+\ldots.\ ,$$

$$d.XX'=d.X_1X'+d.X_2X'+d.X_3X'+\ldots\ldots\ ;$$

mais, d'après ce qui vient d'être dit sur la dérivée du produit de deux facteurs dont un seul est polynome, on a (9)

$$d.X_1X'=X'dX_1+X_1dX'\ ,$$

$$d.X_2X'=X'dX_2+X_2dX'\ ,$$

$$d.X_3X'=X'dX_3+X_3dX'\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans la valeur de $d.XX'$,

$$\mathrm{d}.XX' = X'(\mathrm{d}X_1 + \mathrm{d}X_2 + \mathrm{d}X_3 + \ldots\ldots) + (X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots)\mathrm{d}X' ;$$

c'est-à-dire ,

$$\mathrm{d}.XX' = X'\mathrm{d}X + X\mathrm{d}X' ;$$

ainsi l'équation (9) , et conséquemment l'équation (8) , ont encore lieu lorsque les fonctions X et X' sont toutes deux polynomes ; or , comme il n'est aucune fonction connue qui ne soit développable en une suite de monomes , il s'ensuit que la formule (8) a généralement lieu quelque fonctions connues de x que puissent représenter les symboles X et X', c'est-à-dire que *le quotient de la division de la dérivée du produit de deux fonctions par ce produit lui-même est égal à la somme des quotiens qu'on obtient en divisant respectivement les dérivées des deux facteurs par ces mêmes facteurs*

Si, dans la formule (8), on suppose que X' se change en $X'X''$, elle deviendra

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''}{XX'X''} = \frac{\mathrm{d}X}{X} + \frac{\mathrm{d}.X'X''}{X'X''} ,$$

ou, en vertu de la même formule,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''}{XX'X''} = \frac{\mathrm{d}X}{X} + \frac{\mathrm{d}X'}{X'} + \frac{\mathrm{d}X''}{X''} ;$$

supposant encore que X'' se change en $X''X'''$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''}{XX'X''X'''} = \frac{\mathrm{d}X}{X} + \frac{\mathrm{d}X'}{X'} + \frac{\mathrm{d}.X''X'''}{X''X'''} ;$$

ou bien, en vertu de la même formule,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''}{XX'X''X'''} = \frac{\mathrm{d}X}{X} + \frac{\mathrm{d}X'}{X'} + \frac{\mathrm{d}X''}{X''} + \frac{\mathrm{d}X'''}{X'''} ;$$

et ainsi de suite ; de sorte qu'on aura, en général,

$$\frac{\mathrm{d}.XX'X''X'''.....}{XX'X''X'''....}=\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''}+\frac{\mathrm{d}X'''}{X'''}+...... \quad (10)$$

c'est-à-dire : *le quotient qu'on obtient en divisant la dérivée du produit d'un nombre quelconque de fonctions par ce produit lui-même, est égal à la somme des quotiens qu'on obtient en divisant respectivement les dérivées des facteurs par ces mêmes facteurs.*

Supposons $X=X'=X''=X'''=.......$ et ces fonctions au nombre de n ; la formule (10) deviendra simplement

$$\frac{\mathrm{d}.X^n}{X^n}=n.\frac{\mathrm{d}X}{X} \;; \quad (11)$$

c'est-à-dire : *le quotient qu'on obtient en divisant la dérivée d'une puissance entière et positive d'une fonction par cette puissance même, est égal au résultat qu'on obtient en multipliant par l'exposant de la puissance la dérivée de la fonction divisée par cette même fonction.*

En vertu de la formule (8) on a

$$\frac{\mathrm{d}.X'X''}{X'X''}=\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}X''}{X''} \;;$$

posant

$$X'X''=X, \qquad \text{d'où} \qquad X''=\frac{X}{X'},$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}=\frac{\mathrm{d}X'}{X'}+\frac{\mathrm{d}\frac{X}{X'}}{\frac{X}{X'}} .$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{X}{X'}}{\frac{X}{X'}}=\frac{\mathrm{d}X}{X}-\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\ ; \qquad (12)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du quotient de deux fonctions divisée par ce quotient lui-même est égale à la dérivée du dividende divisée par le dividende, moins la dérivée du diviseur divisée par le diviseur.*

Si, dans cette dernière formule, on suppose $X=1$, on aura $\mathrm{d}X=0$; en conséquence elle deviendra, en changeant X' en X,

$$\frac{\mathrm{d}\,\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=-\frac{\mathrm{d}X}{X}\ ; \qquad (13)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de l'inverse d'une fonction, divisée par cette inverse, est égale au quotient, pris en signe contraire, de la dérivée de cette fonction par la fonction même ;* ou, en d'autres termes, *si le produit de deux fonctions est l'unité, la somme des quotiens respectifs de leurs dérivées par ces fonctions elles-mêmes sera nulle.*

De tout cela il est facile de conclure généralement que *la dérivée du quotient de la division du produit de plusieurs fonctions par le produit de plusieurs autres fonctions, divisée par ce quotient même, est égale à la somme des dérivées des facteurs du dividende, divisées respectivement par ces facteurs, moins la somme des dérivées des facteurs du diviseur, divisées aussi respectivement par ces derniers.*

En vertu de la formule (11), on a

$$\frac{\mathrm{d}.X'^n}{X'^n}=n.\frac{\mathrm{d}X'}{X'}\ ;$$

posant

$$X'^n = X\,, \qquad \text{d'où} \qquad X' = \sqrt[n]{X}\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{dX}{X} = n.\frac{d\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{X}}\,;$$

ce qui donnera

$$\frac{d\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{X}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dX}{X}\,; \qquad (14)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une racine entière et positive d'une fonction, divisée par cette même racine, est égale au quotient qu'on obtient en divisant par l'exposant de la racine la dérivée de la fonction divisée par la fonction elle-même.*

On a, en vertu de cette formule.

$$\frac{d.X'^{\frac{1}{n}}}{X'^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dX'}{X'}\,;$$

posant

$$X' = X^m\,, \quad \text{d'où (11)} \quad \frac{dX'}{X'} = m.\frac{dX}{X}\,,$$

il viendra, en substituant,

$$\frac{d.X^{\frac{m}{n}}}{X^{\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}\cdot\frac{dX}{X}\,; \qquad (15)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance fractionnaire positive d'une fonction, divisée par cette puissance, est égale au produit qu'on obtient en multipliant par son exposant la dérivée de la fonction divisée par cette fonction elle-même.* La formule (13) prouve, en outre, qu'il doit en être de même pour une *puissance fractionnaire négative.*

Si, dans la formule (9), on suppose $X'=a$, a étant une constante quelconque, positive ou négative, entière ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, réelle ou imaginaire, on aura $\mathrm{d}X'=\mathrm{d}a=0$; en conséquence cette formule deviendra

$$\mathrm{d}.aX=a.\mathrm{d}X\ ; \qquad (16)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du produit d'une fonction par un multiplicateur constant quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de la fonction par ce multiplicateur.* Cette formule, comme l'on voit, contient, comme cas particulier, les formules (3), (5), (6), (7).

La formule (10) donne, en chassant les dénominateurs,

$$\mathrm{d}.XX'X''X'''\ldots\ldots=X'X''X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X+XX''X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X'+XX'X'''\ldots\ldots\mathrm{d}X''+XX'X''\ldots\ldots\mathrm{d}X'''+\ldots\ldots\ ; \qquad (17)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du produit de tant de fonctions qu'on voudra s'obtient en prenant la somme des produits de la dérivée de chacun des facteurs par tous les autres.*

De la formule (11), qui a lieu (13), (14), (15), quelque nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif que l'on prenne pour n, on tire

$$\mathrm{d}.X^n=n.X^{n-1}\,\mathrm{d}X\ ; \qquad (18)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance quelconque d'une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par son exposant, en diminuant ensuite cet exposant d'une unité et en multipliant enfin par la dérivée de la fonction.*

La formule (12) donne

$$\mathrm{d}\,\frac{X}{X'}=\frac{X'\mathrm{d}X-X\mathrm{d}X'}{X'^2}\ ; \qquad (19)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction fractionnaire s'obtient en retranchant du produit du dénominateur par la dérivée du numérateur, le produit du numérateur par la dérivée du dénominateur, et en divisant le reste par le quarré de ce même dénominateur.*

Si, dans cette formule, on fait $X=1$ et qu'on y change ensuite X' en X; à cause de $\mathrm{d}1=0$, elle deviendra, comme on le déduirait aussi de la formule (13),

$$\mathrm{d}\frac{1}{X}=-\frac{\mathrm{d}X}{X^2}\ ; \tag{20}$$

c'est-à-dire : *la dérivée de l'inverse d'une fonction s'obtient en divisant la dérivée de la fonction, prise en signe contraire, par le quarré de cette même fonction.*

La formule (14) donne

$$\mathrm{d}\sqrt[n]{X}=\frac{\sqrt[n]{X}}{nX}\mathrm{d}X\ ; \tag{21}$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une racine quelconque d'une fonction s'obtient en divisant cette racine par autant de fois la fonction qu'il y a d'unités dans l'exposant, et en multipliant le quotient obtenu par la dérivée de cette même fonction.*

Les racines du second degré étant celles qui se présentent le plus fréquemment, il est utile de remarquer 1.° que, si l'on suppose $n=2$, cette formule deviendra simplement

$$\mathrm{d}\sqrt{X}=\frac{\mathrm{d}X}{2\sqrt{X}}\ ; \tag{22}$$

2.° que si, dans cette dernière formule, on change X en $a+2bX+cX^2$, d'où $\mathrm{d}X=2(b+cX)\mathrm{d}X$; elle deviendra

$$\mathrm{d}\sqrt{a+2bX+cX^2}=\frac{(b+cX)\mathrm{d}X}{\sqrt{a+2bX+cX^2}}\ ; \tag{23}$$

3.° que si enfin l'on a $X=x$, d'où $\mathrm{d}X=\mathrm{d}x=1$, celle-ci deviendra simplement

$$\mathrm{d}\sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,. \qquad (24)$$

Soit X une fonction de X', supposée elle-même fonction de la variable x, le développement de X, considéré comme fonction de X', ne pourra être que de la forme

$$X=aX'^{\alpha}+bX'^{\beta}+cX'^{\gamma}+\ldots\ldots$$

d'où (2), (16) et (18)

$$\mathrm{d}X=(\alpha aX'^{\alpha-1}+\beta bX'^{\beta-1}+\gamma cX'^{\gamma-1}+\ldots\ldots)\mathrm{d}X'\,;$$

mais si, dans la valeur de X, on considère X' comme la variable, et si, pour indiquer que l'on en prend la dérivée sous ce point de vue, on écrit (*Introd.*) $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}$ au lieu de $\mathrm{d}X$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}=\alpha aX'^{\alpha-1}+\beta bX'^{\beta-1}+\gamma cX'^{\gamma-1}+\ldots\ldots$$

ce qui donnera, en substituant, et en écrivant $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}$ au lieu de $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}X'$, pour faire connaître qu'il s'agit de dérivées relatives à x,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X'}\cdot\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}\,; \qquad (25)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction d'une quantité qui est elle-même fonction de la variable s'obtient en multipliant la dérivée de la première fonction, prise par rapport à la seconde, considérée comme la variable, par la dérivée de celle-ci, prise par rapport à la variable même.* La formule (18) offre un exemple de ce cas.

Si la fonction X' était elle-même fonction d'une quantité X'' fonction de x, on aurait, suivant cette formule,

$$\frac{dX'}{dx}=\frac{dX'}{dX''}\cdot\frac{dX''}{dx}\ ;$$

ce qui donnerait, en substituant,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dX}{dX'}\cdot\frac{dX'}{dX''}\cdot\frac{dX''}{dx}\ ; \qquad (26)$$

et ainsi de suite, pour un plus grand nombre de fonctions subordonnées les unes aux autres.

Ce qui précède suffit pour déterminer la dérivée de toute fonction algébrique donnée d'une seule variable. Nous renvoyons, pour les exemples, aux divers traités connus de calcul différentiel, et nous passons de suite aux fonctions transcendantes.

On sait que, dans le système de logarithmes de Néper, le seul dont il sera question ici, X étant une fonction quelconque de x, on a

$$\text{Log.}X=\frac{X-1}{1}-\frac{(X-1)^2}{2}+\frac{(X-1)^3}{3}-\frac{(X-1)^4}{4}+\ldots$$

d'où (2)

$$\text{d.Log.}X=\text{d}\frac{X-1}{1}-\text{d.}\frac{(X-1)^2}{2}+\text{d.}\frac{(X-1)^3}{3}-\text{d.}\frac{(X-1)^4}{4}+\ldots$$

mais on a généralement (6) et (18)

$$\text{d.}\frac{(X-1)^n}{n}=\frac{1}{n}.\text{d}(X-1)^n=(X-1)^{n-1}\text{d}(X-1)=(X-1)^{n-1}\text{d}X\ ;$$

donc, en substituant

$$\text{d.Log.}X=\{1-(X-1)+(X-1)^2-(X-1)^3+(X-1)^4-\ldots\}\text{d}X\ ;$$

ou plus brièvement

$$\text{d.Log.}X = \frac{\text{d}X}{1+(X-1)} \;;$$

c'est-à-dire ;

$$\text{d.Log.}X = \frac{\text{d}X}{X} \;. \qquad (27)$$

Ce qui nous apprend que *la dérivée du logarithme d'une fonction s'obtient en divisant la dérivée de la fonction par la fonction elle-même.* C'est déjà ce qu'auraient pu faire soupçonner l'inspection des formules (8), (10), (11), (12), (13), (14), (15) (*).

La formule (27) donne

$$\text{d.Log.}X' = \frac{\text{d}X'}{X'} \;;$$

posant

$$X' = X^{X'} , \qquad \text{d'où} \qquad \text{Log.}X' = \text{Log}\,X^{X'} \;;$$

il viendra, en substituant,

$$\text{d.Log}\,X^{X'} = \frac{\text{d.}X^{X'}}{X^{X'}} \;,$$

ce qui donne

(*) En définissant, avec quelques auteurs, le logarithme de X ce que devient $\frac{X^n-1}{n}$ lorsque n est nul; ce qui revient exactement au développement donné plus haut; la dérivée de Log.X sera ce que devient la dérivée de $\frac{X^n-1}{n}$ lorsque n est nul. Or, cette dérivée est $X^{n-1}\text{d}X$ ou $X^n\frac{\text{d}X}{X}$, qui, lorsque n est nul, se réduit à $\frac{\text{d}X}{X}$, comme ci-dessus.

$$\mathrm{d}.X^{X'}=X^{X'}.\mathrm{d}.\mathrm{Log}\,X^{X'}\;; \qquad (28)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une fonction élevée à une puissance qui est elle-même une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par la dérivée de son logarithme.*

Soit d'abord $X'=a$, a étant une constante quelconque, positive ou négative, entière ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, réelle ou imaginaire ; on aura

$$\mathrm{Log}.X^{X'}=\mathrm{Log}.X^{a}=a\mathrm{Log}.X\;,$$

et, par suite (16) et (27),

$$\mathrm{d}.\mathrm{Log}.X^{X'}=a.\,\frac{\mathrm{d}X}{X}\;;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\mathrm{d}.X^{a}=aX^{a}\frac{\mathrm{d}X}{X}\;,$$

ou encore

$$\mathrm{d}.X^{a}=aX^{a-1}\,\mathrm{d}X\;; \qquad (29)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance constante quelconque d'une fonction s'obtient en multipliant la puissance par son exposant, diminuant ensuite cet exposant d'une unité et multipliant enfin par la dérivée de la fonction.* Cette formule, comme l'on voit, contient, comme cas particuliers, les formules (18), (20), (21).

Si, dans la formule (28), on fait $X=a$, a étant toujours une constante quelconque, et qu'on change ensuite X' en X, elle deviendra

$$\text{d}.a^X = a^X.\text{d}.\text{Log}\, a^X \;;$$

mais on a

$$\text{Log}.a^X = X\text{Log}.a \;, \quad \text{d'où (16)} \quad \text{d}.\text{Log}\, a^X = \text{Log}.a.\text{d}X\,;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{d}.a^X = a^X.\text{Log}.a.\text{d}X \;; \qquad (30)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance d'une constante dont l'exposant est une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par le logarithme de la constante et par la dérivée de la fonction.*

Dans le cas particulier où $a = e$, e étant la base des logarithmes de Néper, ou ce que devient $\sqrt[n]{1+n}$ lorsque n est nul, on aura simplement

$$\text{d}.e^X = e^X\text{d}X \;; \qquad (31)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'une puissance de la base des logarithmes de Néper dont l'exposant est une fonction s'obtient en multipliant cette puissance par la dérivée de son exposant* (*).

(*) On parviendrait directement à ce résultat, en partant de la formule

$$e^X = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

qui donne

$$\text{d}.e^X = \left(1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\right)\text{d}X,$$

Passons présentement aux fonctions circulaires. On sait que X étant une fonction quelconque de x, on a

$$\text{Ang.(Tang.}=X)=\frac{X}{1}-\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{5}-\frac{X^7}{7}+\ldots\ldots ;$$

donc (2)

$$\text{d.Ang.(Tang.}=X)=\text{d.}\frac{X}{1}-\text{d.}\frac{X^3}{3}+\text{d.}\frac{X^5}{5}-\text{d.}\frac{X^7}{7}+\ldots\ldots ;$$

mais on a généralement, (16) et (18),

$$\text{d.}\frac{X^n}{n}=X^{n-1}\text{d}X ;$$

donc, en substituant,

---

c'est-à-dire, comme ci-dessus,

$$\text{d.}e^X=e^X.\text{d}X .$$

On aurait de même

$$\text{d.}e^{X'}=e^{X'}.\text{d}X' ;$$

posant alors

$$e^{X'}=X, \quad \text{d'où} \quad X'=\text{Log.}X \quad \text{et} \quad \text{d}X'=\text{d.Log.}X,$$

il viendrait, en substituant,

$$\text{d}X=X\text{d.Log }X ;$$

d'où l'on conclurait, comme nous l'avons trouvé ci-dessus,

$$\text{d.Log.}X=\frac{\text{d}X}{X} .$$

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang} = X) = (1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8 - \ldots\ldots)\text{d}X\ ;$$

ou, plus brièvement,

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang.} = X) = \frac{\text{d}X}{1 + X^2}\ ; \qquad (32)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la tangente tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette tangente par le quarré de la sécante du même angle.*

On a

$$\text{Ang.}(\text{Cot.} = X) = \tfrac{1}{2}\varpi - \text{Ang}(\text{Tang.} = X)\ ;$$

d'où

$$\text{d.Ang.}(\text{Cot.} = X) = -\text{d.Ang.}(\text{Tang} = X)\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\text{d.Ang.}(\text{Cot.} = X) = -\frac{\text{d}X}{1 + X^2}\ ; \qquad (33)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la cotangente tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette cotangente, prise en signe contraire, par le quarré de la cosécante du même angle.*

La formule (32) donne

$$\text{d.Ang.}(\text{Tang.} = X') = \frac{\text{d}X'}{1 + X'^2}\ ;$$

posant alors

$$\text{Ang.}(\text{Tang.}=X')=X\,,\quad \text{d'où}\quad X'=\text{Tang.}X\,,\ \text{et}\ 1+X'^2=\frac{1}{\text{Cos.}^2X}\ ;$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}X=\text{Cos.}^2X\mathrm{d}.\text{Tang.}X\ ;$$

ce qui donnera

$$\mathrm{d}.\text{Tang.}X=\frac{\mathrm{d}X}{\text{Cos.}^2X}\ ; \qquad (34)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la tangente tabulaire d'un angle fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de l'angle par le quarré de son cosinus.*

La formule (33) donne

$$\mathrm{d}.\text{Ang.}(\text{Cot.}=X')=-\frac{\mathrm{d}X'}{1+X'}\ ;$$

posant alors

$$\text{Arc}(\text{Cot.}=X')=X\,,\quad \text{d'où}\quad X'=\text{Cot.}X\quad \text{et}\quad 1+X'^2=\frac{1}{\text{Sin.}^2X}\ ,$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}X=-\text{Sin.}^2X.\mathrm{d}.\text{Cot.}X\ ;$$

ce qui donnera

$$\mathrm{d}.\text{Cot.}X=-\frac{\mathrm{d}X}{\text{Sin.}^2X}\ ; \qquad (35)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la cotangente tabulaire d'un angle fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par le quarré de son sinus.*

On sait que, X étant une fonction quelconque, on a

$$\text{Sin.}X=\frac{\text{Tang}\,X}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}\,,\qquad \text{Cos.}X=\frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}\;;$$

d'où l'on déduit d'abord, (19) et (20),

$$\text{d.Sin.}X=\frac{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}\,\text{d.Tang}\,X-\text{Tang.}X\text{d}\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}{1+\text{Tang}^2X}\,,$$

$$\text{d.Cos.}X=-\frac{\text{d}\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}{1+\text{Tang.}^2X}\;;$$

mais on a (23)

$$\text{d}\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}=\frac{\text{Tang.}X.\text{d.Tang.}X}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}\;;$$

ce qui donne, en substituant,

$$\text{d.Sin.}X=\frac{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}-\dfrac{\text{Tang.}^2X}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2X}}}{1+\text{Tang.}^2X}\text{d.Tang.}X\,,$$

$$\text{d.Cos.}X=-\frac{\text{Tang.}X.\text{d.Tang.}X}{(1+\text{Tang.}^2X)^{\frac{3}{2}}}\;;$$

ou encore

$$\text{d.Sin.}X=\frac{\text{d.Tang.}X}{\text{Séc.}^3X}\,,\qquad \text{d.Cos.}X=-\frac{\text{Tang.}X.\text{d Tang.}X}{\text{Séc.}^3X}\;;$$

mettant dans ces formules pour d.Tang.X sa valeur (34), il viendra

$$\text{d.Sin.}X=-\frac{\text{d}X}{\text{Séc.}^3X\text{Cos.}^2X}\,,\qquad \text{d.Cos.}X=-\frac{\text{Tang}\,X\text{d}X}{\text{Séc.}^3X\text{Cos.}^2X}\;;$$

ou encore

$$\mathrm{d.Sin.}X = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{Séc.}X}\,, \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\frac{\mathrm{Tang.}X.\mathrm{d}X}{\mathrm{Séc.}X}\,;$$

ou enfin

$$\mathrm{d.Sin.}X = \mathrm{d}X.\mathrm{Cos.}X\,, \quad (36) \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\mathrm{d}X.\mathrm{Sin.}X\,; \quad (37)$$

c'est-à-dire : *la dérivée du sinus tabulaire d'une fonction quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle par son cosinus tabulaire ;*

La dérivée du cosinus tabulaire d'une fonction quelconque s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par son sinus tabulaire (*).

(*) On aurait pu parvenir directement à ces résultats, en partant des formules connues

$$\mathrm{Sin.}X = \frac{X}{1} - \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} - \frac{X^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots\,;$$

$$\mathrm{Cos.}X = 1 - \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} - \frac{X^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\,,$$

qui donnent (2), (16), (18)

$$\mathrm{d.Sin.}X = \left(1 - \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} - \frac{X^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)\mathrm{d}X\,,$$

$$\mathrm{d.Cos.}X = -\left(\frac{X}{1} - \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} - \frac{X^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)\mathrm{d}X\,;$$

c'est-à-dire, comme ci-dessus,

$$\mathrm{d.Sin}\,X = \mathrm{d}X.\mathrm{Cos.}X\,, \qquad \mathrm{d.Cos.}X = -\mathrm{d}X.\mathrm{Sin.}X\,;$$

La formule (36) donne

$$\mathrm{d\,Sin.}X'=\mathrm{d}X'.\mathrm{Cos}\;X'\;;$$

posant

$$\mathrm{Sin.}X'=X\;,\quad \text{d'où}\quad X'=\mathrm{Ang.}(\mathrm{Sin.}=X)\;,\quad \text{et}\quad \mathrm{Cos}\;X'=\sqrt{1-X^2}\;;$$

il viendra, en substituant,

$$\mathrm{d}X=\sqrt{1-X^2}.\mathrm{d.Ang.}(\mathrm{Sin}=X)\;;$$

ce qui donnera

---

on aurait pu partir aussi des définitions connues

$$\mathrm{Sin.}X=\frac{e^{X\sqrt{-1}}-e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\;,\qquad \mathrm{Cos.}X=\frac{e^{X\sqrt{-1}}+e^{-X\sqrt{-1}}}{2}\;,$$

qui auraient conduit aux mêmes résultats. En considérant ensuite que

$$\mathrm{Tang.}X=\frac{\mathrm{Sin.}X}{\mathrm{Cos.}X}\;,$$

on en aurait conclu (19)

$$\mathrm{d.Tang.}X=\frac{\mathrm{Cos.}X.\mathrm{dSin.}X-\mathrm{Sin.}X.\mathrm{d.Cos.}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\;,$$

ou bien (36), (37)

$$\mathrm{d.Tang.}X=\frac{(\mathrm{Cos.}^2X+\mathrm{Sin.}^2X)\mathrm{d}X}{\mathrm{Cos.}^2X}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\;;$$

comme nous l'avons déja trouvé ci-dessus (34).

$$\mathrm{d.Ang.}(\mathrm{Sin.}=X)=\frac{\mathrm{d}X}{\sqrt{1-X^2}}\ ; \qquad (38)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont le sinus tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée du sinus par le cosinus.*

On a

$$\mathrm{Ang.}(\mathrm{Cos.}=X)=\tfrac{1}{2}\varpi-\mathrm{Ang.}(\mathrm{Sin.}=X)\ ,$$

d'où

$$\mathrm{d.Ang.}(\mathrm{Cos.}=X)=-\mathrm{d.Ang}\,(\mathrm{Sin.}=X)\ ;$$

ou bien (38)

$$\mathrm{d.Ang.}(\mathrm{Cos.}=X)=-\frac{\mathrm{d}X}{\sqrt{1-X^2}}\ ; \qquad (39)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont le cosinus tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée du cosinus, prise en signe contraire, par le sinus.*

On a, quelle que soit X,

$$\mathrm{Séc.}X=-\frac{1}{\mathrm{Cos.}X}\ , \qquad \mathrm{Coséc.}X=\frac{1}{\mathrm{Sin.}X}\ ;$$

donc (20)

$$\mathrm{d.Séc.}X=-\frac{\mathrm{d.Cos.}X}{\mathrm{Cos.}^2X}\ , \qquad \mathrm{d.Coséc.}X=-\frac{\mathrm{d.Sin.}X}{\mathrm{Sin.}^2X}\ ;$$

ou encore (36), (37)

$$\mathrm{d.S\acute{e}c.}X = \frac{\mathrm{d}X.\mathrm{Sin}.X}{\mathrm{Cos.}^2X}\ , \qquad \mathrm{d.Cos\acute{e}c.}X = -\frac{\mathrm{d}X.\mathrm{Cos}.X}{\mathrm{Sin.}^2X}\ ;$$

ou enfin

$$\mathrm{d.S\acute{e}c.}X = \frac{\mathrm{Tang}.X}{\mathrm{Cos}.X}\mathrm{d}X\ , \quad (40) \qquad \mathrm{d.Cos\acute{e}c.}X = -\frac{\mathrm{Cot}.X}{\mathrm{Sin}.X}\mathrm{d}X ; \quad (41)$$

c'est-à-dire : *la dérivée de la sécante tabulaire d'un angle s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle par sa tangente, et en divisant le produit par son cosinus.*

La dérivée de la cosécante tabulaire d'un angle s'obtient en multipliant la dérivée de l'angle, prise en signe contraire, par sa cotangente, et en divisant le produit par son sinus.

La formule (40) donne

$$\mathrm{d\ S\acute{e}c.}X' = \frac{\mathrm{Tang}.X'}{\mathrm{Cos}.X'}\mathrm{d}X'\ ;$$

posant alors

$$\mathrm{S\acute{e}c.}X' = X\ , \quad \text{d'où} \quad X' = \mathrm{Ang.(S\acute{e}c.} = X)\ ;$$

on aura

$$\mathrm{Tang}.X' = \sqrt{X^2 - 1}\ , \qquad \mathrm{Cos}.X' = \frac{1}{X}\ ,$$

cela donnera, en substituant,

$$\mathrm{d}X = X\sqrt{X^2-1}.\mathrm{d}.\mathrm{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

d'où on tirera

$$\mathrm{d}.\mathrm{Ang}.(\text{Séc.}=X) = \frac{\mathrm{d}X}{X\sqrt{X^2-1}} \;; \qquad (42)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la sécante tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette sécante par le produit de cette même sécante et de la tangente du même angle.*

On a

$$\mathrm{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = \tfrac{1}{2}\varpi - \mathrm{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

d'où

$$\mathrm{d}.\mathrm{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = -\mathrm{d}.\mathrm{Ang}.(\text{Séc.}=X) \;;$$

ou bien (42)

$$\mathrm{d}.\mathrm{Ang}.(\text{Coséc.}=X) = -\frac{\mathrm{d}X}{X\sqrt{X^2-1}} \;; \qquad (43)$$

c'est-à-dire : *la dérivée d'un angle dont la cosécante tabulaire est une fonction quelconque s'obtient en divisant la dérivée de cette cosécante, prise en signe contraire, par le produit de cette même cosécante et de la cotangente du même angle.*

Au moyen de ces formules, il n'est aucune fonction logarithmique, exponentielle ou circulaire, dont on ne parvienne facilement à calculer la dérivée.

§. II.

Dérivées successives des fonctions d'une seule variable.

En continuant de représenter par X une fonction quelconque de la seule variable x, on voit, par ce qui précède, que généralement $\mathrm{d}X$ sera aussi une fonction de x, dont on pourra se proposer de déterminer la dérivée comme celle de X. On pourrait représenter cette dérivée par $\mathrm{d.d}X$; mais on la représente plus simplement par d^2X; et c'est là ce qu'on appelle la *seconde dérivée* de la fonction X, tandis que $\mathrm{d}X$ en est dit la *première dérivée*. On peut dire également que d^2X est la première dérivée de $\mathrm{d}X$.

Cette seconde dérivée d^2X étant aussi, en général, une fonction de x, on peut pareillement se proposer d'en déterminer la dérivée, qui sera dite la *troisième dérivée* de X, ou la seconde dérivée de $\mathrm{d}X$, ou encore la première dérivée de d^2X. On pourrait la représenter par $\mathrm{d.d}^2X$ ou par $\mathrm{d}^2.\mathrm{d}X$; mais on trouve plus simple de la dénoter par d^3X.

Généralement, nous conviendrons de représenter par

$$X,\ \mathrm{d}X,\ \mathrm{d}^2X,\ \mathrm{d}^3X\ldots\ldots\mathrm{d}^nX,\ \ldots\ldots$$

une suite de fonctions de la seule variable x, dont la première peut être quelconque, et dont chacune des autres est la première dérivée de celle qui la précède immédiatement. En conséquence d^nX sera dite la $n.^{ieme}$ dérivée de x. On voit par là que l'expression $\mathrm{d}^{m+n}X$, qu'on pourrait remplacer par l'une ou l'autre de ces deux-ci $\mathrm{d}^m.\mathrm{d}^nX$ ou $\mathrm{d}^n.\mathrm{d}^mX$, pourra être dite indifféremment la $(m+n)^{ieme}$ dérivée de x, ou la $m.^{ieme}$ dérivée de sa $n.^{ieme}$ dérivée, ou enfin la $n.^{ieme}$ dérivée de sa $m.^{ieme}$ dérivée.

Au surplus, à cause de $\mathrm{d}x=1$; d'où il suit que $\mathrm{d}x^n$, équivalent de $(\mathrm{d}x)^n$, et qu'il faut bien (*Introd*) se garder de confondre soit avec $\mathrm{d}\,x^n$ soit avec d^nx, est aussi égal à l'unité; de même qu'au lieu de $\mathrm{d}X$ on peut écrire $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$, on pourrait aussi, au lieu de d^2X ou $\mathrm{d.d}X$, écrire

$$\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x},\ \text{ou simplement}\ \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}.$$

De même, au lieu de d^3X ou $\mathrm{d.d}^2X$, on pourrait écrire

$$\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}x},\ \text{ou simplement}\ \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3};$$

et ainsi de suite. Alors la série de fonctions, dont il a été question ci-dessus, serait dénotée comme il suit :

$$X,\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{\mathrm{d}^nX}{\mathrm{d}x^n},\ldots\ldots;$$

mais dans le cas présent, où il n'est question que de fonctions d'une seule variable, ce serait là, comme nous l'avons déjà remarqué, une complication tout à fait sans objet.

Puisqu'en général $\mathrm{d}.Ax^\alpha = \alpha Ax^{\alpha-1}$; il s'ensuit que, si X est une fonction rationnelle et entière de x, du $m.^{ième}$ degré, sa première dérivée ne sera plus que du $(m-1)^{ième}$ degré seulement, sa seconde dérivée du $(m-2)^{ième}$, la troisième du $(m-3)^{ième}$, et ainsi de suite; de sorte qu'en général d^nX ne sera plus que du $(m-n)^{ième}$ degré. La $m.^{ième}$ dérivée sera donc d'un degré nul, c'est-à-dire constante; et, par suite, toutes les dérivées ultérieures seront égales à zéro. Dans tous les autres cas, la fonction X aura une infinité de dérivées effectives.

Soit, en général,

$$X = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots = \mathrm{f}x;$$

$A, B, C, \ldots\ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des constantes quelconques, positives ou négatives, entières ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, réelles ou imaginaires, on aura successivement

$$\mathrm{d}X = \alpha A x^{\alpha-2} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \ldots\ldots,$$

$$\mathrm{d}^2 X = \alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-1} + \beta(\beta-1) B x^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1) C x^{\gamma-2} + \ldots\ldots,$$

$$\mathrm{d}^3 X = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) A x^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)(\beta-2) B x^{\beta-3} + \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) C x^{\gamma-3} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en général,

$$\mathrm{d}^n X = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots\ldots(\alpha-n+1) A x^{\alpha-n} \\ +\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)\ldots\ldots(\beta-n+1) B x^{\beta-n} \\ +\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\ldots\ldots(\gamma-n+1) C x^{\gamma-n} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\};$$

de là on conclura, quelle que soit la constante g,

$$X + \mathrm{d}X \frac{g}{1} + \mathrm{d}^2 X \frac{g^2}{1.2} + \mathrm{d}^3 X \frac{g^3}{1.2.3} + \ldots\ldots + \mathrm{d}^n X \frac{g^n}{1.2.3\ldots.n} + \ldots\ldots$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A\left(x^{\alpha} + \frac{\alpha}{1} x^{\alpha-1} g + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2} x^{\alpha-2} g^2 + \ldots\ldots + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}\ldots.\frac{\alpha-n+1}{n} x^{\alpha-n} g^n + \ldots\right) \\ +B\left(x^{\beta} + \frac{\beta}{1} x^{\beta-1} g + \frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2} x^{\beta-2} g^2 + \ldots\ldots + \frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2}\ldots.\frac{\beta-n+1}{n} x^{\beta-n} g^n + \ldots\right) \\ +C\left(x^{\gamma} + \frac{\gamma}{1} x^{\gamma-1} g + \frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2} x^{\gamma-1} g^2 + \ldots\ldots + \frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2}\ldots.\frac{\gamma-n+1}{n} x^{\gamma-n} g^n + \ldots\right) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\};$$

ou, plus brièvement,

$$X+\mathrm{d}X\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2X\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3X\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots=A(x+g)^{\alpha}+B(x+g)^{\beta}+C(x+g)^{\gamma}+\ldots\ldots;$$

or, puisqu'on a

$$X=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots\ldots=\mathrm{f}x\,,$$

on doit avoir

$$A(x+g)^{\alpha}+B(x+g)^{\beta}+C(x+g)^{\gamma}+\ldots\ldots=\mathrm{f}(x+g)\;;$$

donc finalement

$$\mathrm{f}(x+g)=X+\mathrm{d}X\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2X\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3X\frac{g^3}{1.2.3}+\mathrm{d}^4X\frac{g^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

ou bien, en remettant pour X sa valeur fx;

$$\mathrm{f}(x+g)=\mathrm{f}x+\mathrm{d}.\mathrm{f}x\frac{g}{1}+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\;; \quad (44)$$

c'est en cela que consiste le *Théorème de Taylor*, qui se trouve ainsi très-simplement et très-rigoureusement démontré pour toute fonction développable en une suite de monomes; c'est-à-dire pour toutes les fonctions connues, algébriques ou transcendantes. Il est clair d'ailleurs qu'on pourrait écrire

$$\mathrm{f}(x+g)=X+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\;; \quad (45)$$

nous aurons souvent besoin d'employer ce développement sous cette dernière forme.

Dans la formule (44), fx est ce qu'on appelle l'*état primitif* de la fonction; la constante quelconque g est dite l'*accroissement* ou la *différence* de la variable; et f$(x+g)$ est ce qu'on appelle l'*état varié* de la fonction. Cette formule (44) donne donc le développement de l'état varié de la fonction, en série, procédant suivant les puissances entières et positives de l'accroissement ; série dans laquelle les coefficiens des différens termes sont les dérivées successives de la fonction primitive, divisés respectivement par le produit d'autant des premiers nombres naturels qu'il y a d'unités dans l'exposant de dérivation.

De cette formule on tire

$$\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x=\mathrm{d.f}x.g+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\,\frac{g^2}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\,; \quad (46)$$

formule au moyen de laquelle $\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x$, qu'on appelle la *différence* de la fonction, se trouve développée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement g. Le premier terme $\mathrm{d.f}x.g$ de cette différence, qui est proprement une différence tronquée, est appelé la *différentielle* de la fonction $\mathrm{f}x$; et le coefficient $\mathrm{d.f}x$ de g, dans ce premier terme, est dit le *coefficient différentiel* de cette même fonction ; d'où l'on voit que *le coefficient différentiel d'une fonction n'est autre chose que sa fonction dérivée.*

De la formule (46) on tire

$$\frac{\mathrm{f}(x+g)-\mathrm{f}x}{g}=\mathrm{d.f}x+\mathrm{d}^2.\mathrm{f}x\,\frac{g}{1.2}+\mathrm{d}^3.\mathrm{f}x\,\frac{g^2}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Le premier membre de cette équation est le rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable ; et comme, à mesure que g devient plus petit, son second membre tend sans cesse à se réduire à son premier terme $\mathrm{d.f}x$, on peut dire encore que *la dérivée ou le coefficient différentiel d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable.*

Voilà donc, pour obtenir la dérivée d'une fonction, un procédé différent de celui que nous avons d'abord indiqué, mais qui doit nécessairement lui être équivalent. Il consiste à attribuer à la variable un accroissement arbitraire ; à retrancher la fonction proposée de ce qu'elle devient par l'effet de cet accroissement ; à diviser le reste par cet accroissement et à faire enfin ce même accroissement nul dans le quotient.

Soit, par exemple, la fonction déjà considérée

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots$$

dont on se propose d'obtenir la fonction dérivée par ce nouveau procédé ; en désignant toujours l'accroissement par g, l'état varié de la fonction sera

$$A(x+g)^{\alpha}+B(x+g)^{\beta}+C(x+g)^{\gamma}+\ldots,$$

duquel, retranchant la fonction primitive, il viendra pour reste

$$A\{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}\}+B\{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}\}+C\{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}\}+\ldots;$$

de sorte que la dérivée sera ce que devient la fraction

$$\frac{A\{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}\}+B\{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}\}+C\{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}\}+\ldots\ldots}{g}$$

lorsque g est nul. Or, on a

$$\frac{(x+g)^{\alpha}-x^{\alpha}}{g}=\alpha x^{\alpha-1}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\,x^{\alpha-2}g+\ldots\ldots,$$

$$\frac{(x+g)^{\beta}-x^{\beta}}{g}=\beta x^{\beta-x}+\frac{\beta}{1}\cdot\frac{\beta-1}{2}\,x^{\beta-x}g+\ldots\ldots,$$

$$\frac{(x+g)^{\gamma}-x^{\gamma}}{g}=\gamma x^{\gamma-1}+\frac{\gamma}{1}\cdot\frac{\gamma-1}{2}\,x^{\gamma-2}g+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

substituant donc dans la fraction ci-dessus, elle deviendra

$$\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\dots\dots$$
$$+\left(\frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}Ax^{\alpha-2}+\frac{\beta}{1}\,\frac{\beta-1}{2}Bx^{\beta-2}+\frac{\gamma}{1}\,\frac{\gamma-1}{2}Cx^{\gamma-2}+\dots\right)g$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

posant enfin, dans ce résultat, $g=0$, on obtiendra, pour la dérivée demandée,

$$\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\dots\dots;$$

comme nous l'avions déjà obtenue par l'autre procédé.

Nous aurions donc pu, dès le début, adopter cette définition des fonctions dérivées, et en déduire les règles de dérivation des fonctions que nous aurions trouvées exactement telles que nous les avons déjà obtenues dans le paragraphe I; et c'est même ainsi qu'on en use communément; mais il nous a paru beaucoup plus naturel, et conséquemment plus convenable, de choisir de préférence, pour définition des dérivées, une opération fort simple que nos premiers pas dans l'analyse et dans son application à la géométrie des lignes et des surfaces courbes doivent nous avoir rendue tout à fait familière.

Les expressions *fonction dérivée* et *coefficient différentiel* étant, d'après ce qu'on vient de voir, rigoureusement synonymes, nous ferons, à l'avenir, exclusivement usage de la dernière comme étant la plus usitée, et, en conséquence, nous substituerons, aux mots *dérivation* et *dériver*, les mots *différentiation* et *dériver*.

SECTION II.

Différentiation des fonctions de plusieurs variables.

§. I.

Différentiation des fonctions explicites.

Soit S une fonction quelconque de tant de variables x, y, z,..... qu'on voudra; si on la différentie α fois consécutivement, par rapport à la seule variable x, on obtiendra son coefficient différentiel du α^{ieme} ordre relatif à cette variable, que nous sommes déjà convenus de représenter par $\frac{d^\alpha S}{dx^\alpha}$; lequel sera en général, comme S, une nouvelle fonction de $x, y, z, \ldots\ldots$

Si l'on différentie ce coefficient différentiel β fois, par rapport à la seule variable y, on obtiendra, en général, pour résultat, une autre fonction de $x, y, z, \ldots\ldots$, que l'on pourrait dénoter par

$$\frac{d^\beta.\frac{d^\alpha S}{dx^\alpha}}{dy^\beta};$$

mais que l'on est convenu de représenter plus simplement par

$$\frac{d^{\alpha+\beta}S}{dx^\alpha dy^\beta}.$$

On pourra, semblablement, différentier cette dernière fonction γ fois par rapport à la seule variable z, et au lieu de dénoter le résultat de cette dernière opération, comme on pourrait très-bien le faire, par

$$\frac{d^\gamma.\frac{d^{\alpha+\beta}S}{dx^\alpha dy^\beta}}{dz^\gamma},$$

on la représentera simplement par

$$\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma}S}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}S}{\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}y^{\beta}\mathrm{d}z^{\gamma}\ldots\ldots},$$

sera le symbole de la fonction à laquelle on parvient en différentiant d'abord α fois la fonction S par rapport à x seulement, puis la fonction résultante β fois par rapport à y seulement, puis la nouvelle fonction obtenue γ fois par rapport à z seulement, et ainsi du reste.

Ces choses ainsi entendues, soit

$$S=\mathrm{f}(x, y, z, \ldots\ldots\ldots);$$

d'après la formule (45) on aura

$$\mathrm{f}(x+g, y, z, \ldots)=S+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots; \quad (47)$$

si, dans cette équation, on suppose que y se change en $y+h$, h étant une constante quelconque; en vertu de la même formule,

$$\left.\begin{array}{l} S \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2} \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} \\[1ex] \ldots\ldots \end{array}\right\}\text{ deviendront }\left\{\begin{array}{l} S+\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\,\dfrac{h}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\,\dfrac{h^2}{1.2}+\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^3}\,\dfrac{h^3}{1.2.3}+\ldots \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\dfrac{h}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\,\dfrac{h^2}{1.2}+\ldots \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\,\dfrac{h}{1}+\ldots \\[1ex] \dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}+\ldots \\[1ex] \ldots\ldots \end{array}\right.$$

en conséquence la formule (47) deviendra

$$\left.\begin{array}{rl} \mathrm{f}(x+g,y+h,z,\ldots\ldots)=S+\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\dfrac{g}{1}+\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{g^2}{1.2}+\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{g^3}{1.2.3}+\ldots \\ +\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\dfrac{h}{1}+2\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\dfrac{gh}{1.2}+3\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\dfrac{g^2h}{1.2.3}+\ldots \\ +\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\dfrac{h^2}{1.2}+3\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\dfrac{gh^2}{1.2.3}+\ldots \\ +\dfrac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^3}\dfrac{h^3}{1.2.3}+\ldots \end{array}\right\} \quad (48)$$

Remarquons présentement que l'on peut passer de la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots\ldots)$ à la fonction $\mathrm{f}(x+g, y+h, z, \ldots..)$ de deux manières qui, bien que différentes en apparence, doivent néanmoins conduire au même résultat; on peut, en effet, comme nous venons de le faire, supposer que, dans la première fonction, x se change en $x+g$, et qu'ensuite, dans la fonction résultante, y se change en $y+h$; ou bien on peut supposer que, dans cette même première fonction, c'est d'abord y qui se change en $y+h$, et qu'ensuite dans la fonction résultante, x se change en $x+g$; et le développement exécuté suivant cette dernière hypothèse devra être identiquement le même que le développement résultant de la première, quels que soient d'ailleurs les grandeur et rapport des accroissemens g et h; donc, en particulier, le coefficient de gh devra être le même dans l'un et dans l'autre. D'un autre côté, le second développement devra différer du premier en ce que y et h y auront pris respectivement les places de x et g, et *vice versâ*; donc, puisque, dans le premier, $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ est le coefficient de gh, ce coefficient sera $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$ dans le second; or, nous venons de voir que ces deux coefficiens doivent être identiquement les mêmes; on doit donc avoir identiquement

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}\,; \qquad (49).$$

c'est-à-dire que, *lorsqu'on différentie successivement une fonction de plusieurs variables, par rapport à deux d'entre elles, on parvient toujours au même résultat final, quel que soit l'ordre suivant lequel on fait succéder les différentiations l'une à l'autre.*

Supposons encore que, dans la fonction $f(x+g, y+h, z, ...)$ z se change en $z+k$, k étant également une constante quelconque, alors, en vertu de la formule (45),

$$\left.\begin{array}{l} S \\[1ex] \dfrac{dS}{dx} \\[1ex] \dfrac{dS}{dy} \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dx^2} \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dxdy} \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dy^2} \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dx^3} \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dx^2dy} \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dxdy^2} \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dy^3} \\[1ex] \dots\dots \end{array}\right\} \text{deviendront} \left\{\begin{array}{l} S+\dfrac{dS}{dz}\dfrac{k}{1}+\dfrac{d^2S}{dz^2}\dfrac{k^2}{1.2}+\dfrac{d^3S}{dz^3}\dfrac{k^3}{1.2.3}+\dots \\[1ex] \dfrac{dS}{dx}+\dfrac{d^2S}{dxdz}\dfrac{k}{1}+\dfrac{d^3S}{dxdz^2}\dfrac{k^2}{1.2}+\dots \\[1ex] \dfrac{dS}{dy}+\dfrac{d^2S}{dydz}\dfrac{k}{1}+\dfrac{d^2S}{dydz^2}\dfrac{k^2}{1.2}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dx^2}+\dfrac{d^3S}{dx^2dz}\dfrac{k}{1}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dxdy}+\dfrac{d^3S}{dxdydz}\dfrac{k}{1}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^2S}{dy^2}+\dfrac{d^3S}{dy^2dz}\dfrac{k}{1}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dx^3}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dx^2dy}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dxdy^2}+\dots \\[1ex] \dfrac{d^3S}{dy^3}+\dots \\[1ex] \dots\dots \end{array}\right.$$

en conséquence la formule (48) deviendra

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathrm{f}(x+g, y+h, z+k, \ldots) = S &+ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{g}{1} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\frac{g^2}{1.2} + 2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\frac{gh}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y^2}\frac{h^2}{1.2} \\
&+ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\frac{k}{1} + 2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}\frac{gk}{1.2} + 2\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\frac{hk}{1.2} \\
&+ \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}z^2}\frac{k^2}{1.2} \\
&+ \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\frac{g^3}{1.2.3} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\frac{g^2h}{1.2.3} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\frac{gh^2}{1.2.3} + \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^3}\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots\ldots \\
&+ 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}z}\frac{g^2k}{1.2.3} + 6\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\frac{ghk}{1.2.3} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y^2\mathrm{d}z}\frac{h^2k}{1.2.3} \\
&+ 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x\mathrm{d}z^2}\frac{gk^2}{1.2.3} + 3\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z^2}\frac{hk^2}{1.2.3} \\
&+ \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}z^3}\frac{k^3}{1.2.3}
\end{aligned}
\right\} \quad (50)
$$

Remarquons présentement que l'on peut parvenir de la fonction primitive $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ à la fonction variée $\mathrm{f}(x+g, y+h, z+k, \ldots)$ par des accroissemens successifs de variables, de six manières différentes, puisqu'on peut choisir de trois manières, parmi les trois variables x, y, z, la variable qui, la première, recevra son accroissement; et que, pour chaque choix qu'on en voudra faire, il restera encore deux manières de faire succéder l'une à l'autre les variations des deux restantes. Il est clair d'ailleurs que les six développemens résultants ne différeront les uns des autres que par les diverses permutations tant des variables x, y, z que de leurs accroissemens respectifs g, h, k. Il n'est pas moins évident que ces six développemens devront être identiquement les mêmes quels que soient les grandeurs et rapports des accroissemens g, h, k;

donc, en particlier, les coefficiens du terme ghk devront y être identiquement les mêmes; ce qui donnera

$$\frac{d^3S}{dxdydz}=\frac{d^3S}{dxdzdy}=\frac{d^3S}{dydxdz}=\frac{d^3S}{dydzdx}=\frac{d^3S}{dzdxdy}=\frac{d^3S}{dzdydx}\,; \quad (51)$$

c'est-à-dire que, *lorsqu'on différentie successivement une fonction de plusieurs variables par rapport à trois d'entre elles, on parvient toujours au même résultat final, quel que soit l'ordre suivant lequel on fait succéder les différentiations les unes aux autres.*

Supposons présentement que cette proposition, déjà démontrée pour deux et pour trois variables, l'ait été aussi pour tout nombre de variables inférieur à n; il sera facile de démontrer alors qu'elle devra l'être également pour n variables. En effet, considérons, au hasard, deux coefficiens différentiels du n^{ieme} ordre, dans lesquels les différentiations ne se succèdent pas de la même manière; ou bien la dernière différentiation y sera relative à la même variable, ou bien cette dernière différentiation sera relative à deux variables différentes.

Si la dernière différentiation y est relative à la même variable, les $n-1$ différentiations qui l'auront précédée auront dû être relatives aux $n-1$ mêmes variables, et auront pu, tout au plus, se succéder les unes aux autres dans un ordre différent; elles auront donc dû, suivant l'hypothèse, conduire au même avant dernier résultat qui, différentié de nouveau, par rapport à une même variable, aura dû donner aussi, pour l'une ou pour l'autre, le même résultat final.

Si, au contraire, dans ces deux coefficiens différentiels du $n.^{ieme}$ ordre, la dernière différentiation n'est point relative à la même variable, on pourra, sans rien changer à l'un ni à l'autre, garder pour l'avant-dernière, dans chacun, la différentiation qui sera la dernière dans l'autre, puisqu'on ne fera, de la sorte, qu'intervertir l'ordre des différentiations entre $n-1$ variables seulement. On pourra encore, pour la même raison, amener, de part et d'autre, la différentiation qui devra précéder immédiatement ces deux-là à être relative à une même troisième variable quelconque. Alors les différentiations qui précéderont les trois dernières conduiront, de part et d'autre, à une même fonction, puisqu'elles auront lieu par rapport aux $n-3$ mêmes variables. Il restera donc à différentier une même fonction par rapport aux trois mêmes variables; ce qui, d'après ce qui précède, devra conduire (51), quel que soit d'ailleurs l'ordre des différentiations, au même résultat final.

Si l'on suppose $n=4$, la proposition se trouvera vraie, (49) et (51), pour tous les nombres inférieurs à n; d'où il suit qu'elle est vraie aussi pour $n=4$. Supposons ensuite $n=5$, elle se trouvera vraie pour tous les nombres inférieurs; d'où l'on sera fondé à conclure qu'elle est également vraie pour celui-là, et ainsi de suite; cette proposition est donc générale, c'est-à-dire que, *dans quelque ordre que l'on différentie successivement une fonction de tant de variables qu'on voudra, par rapport à un nombre quelconque d'entre elles, on parviendra toujours au même résultat final* (*).

Il suit de là que, tandis qu'une fonction d'une seule variable n'a, dans chaque ordre, qu'un seul coefficient différentiel, savoir :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4}\,,\ \ldots\ldots\,;$$

une fonction de deux variables x et y a, dans le premier ordre, deux coefficiens différentiel, savoir :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,,\quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\,;$$

dans le second, trois; savoir :

(*) Nous avions déjà indiqué ce tour de démonstration (*Annales*, tom. I, pag. 57).

$$\frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^2S}{dxdy}, \quad \frac{d^2S}{dy^2};$$

dans le troisième, quatre; savoir :

$$\frac{d^3S}{dx^3}, \quad \frac{d^3S}{dx^2dy}, \quad \frac{d^3S}{dxdy^2}, \quad \frac{d^3S}{dy^3};$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire, en général, $n+1$ pour $n^{\text{ième}}$ ordre, savoir :

$$\frac{d^nS}{dx^n}, \quad \frac{d^nS}{dx^{n-1}dy}, \quad \frac{d^nS}{dx^{n-2}dy^2}, \ldots \frac{d^nS}{dx^2dy^{n-2}}, \quad \frac{d^nS}{dxdy^{n-1}}, \quad \frac{d^nS}{dy^n}.$$

S'il s'agit d'une fonction de trois variables, elle aura, dans le premier ordre, trois coefficiens différentiel, savoir :

$$\frac{dS}{dx}, \quad \frac{dS}{dy},$$

$$\frac{dS}{dz};$$

dans le second, six; savoir :

$$\frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^2S}{dxdy}, \quad \frac{d^2S}{dy^2};$$

$$\frac{d^2S}{dxdz}, \quad \frac{d^2S}{dydz};$$

$$\frac{d^2S}{dz^2};$$

dans le troisième, dix; savoir :

$$\frac{d^3S}{dx^3}\,,\quad \frac{d^3S}{dx^2dy}\,,\quad \frac{d^3S}{dxdy^2}\,,\quad \frac{d^3S}{dy^3}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dx^2dz}\,,\quad \frac{d^3S}{dxdydz}\,,\quad \frac{d^3S}{dy^2dz}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dxdz^3}\,,\quad \frac{d^3S}{dydz^2}\,,$$

$$\frac{d^3S}{dz^3}\;;$$

et ainsi de suite ; c'est-à-dire, en général, dans le $n.^{ieme}$ ordre, $\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}$.

On voit, généralement, à l'inspection des dénominateurs, que le nombre des coefficiens différentiels du $n.^{ieme}$ ordre d'une fonction d'un nombre quelconque m de variables doit être le même que le nombre des termes d'un polynome homogène complet de n dimensions, formé avec m lettres ; c'est-à-dire que ce nombre doit être (*)

$$\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}.\frac{n+3}{3}\ldots\ldots\frac{n+m-1}{m-1}\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}\,. \qquad (52)$$

Soit, par exemple, la fonction de deux variables

$$S=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F\,,$$

on aura

(*) Voy. *Annales*, tom. XIII, pag. 282.

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Cy+D)\ ,\qquad \frac{dS}{dy}=2(By+Cx+E)\ ,$$

$$\frac{d^2S}{dx^2}=2A\ ,\quad \frac{d^2S}{dxdy}=2C\ ,\quad \frac{d^2S}{dy^2}=2B\ ;$$

et tous les autres coefficiens différentiels seront nuls. S'il s'agit de la fonction de trois variables

$$S=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L\ ,$$

on trouvera

$$\frac{dS}{dx}=2(Ax+Ez+Fy+G)\ ,\quad \frac{d^2S}{dx^2}=2A\ ,\quad \frac{d^2S}{dydz}=2D\ ,$$

$$\frac{dS}{dy}=2(By+Fx+Dz+H)\ ,\quad \frac{d^2S}{dy^2}=2B\ ,\quad \frac{d^2S}{dzdx}=2E\ ,$$

$$\frac{dS}{dz}=2(Cz+Dy+Ex+K)\ ,\quad \frac{d^2S}{dz^2}=2C\ ,\quad \frac{d^2S}{dxdy}=2F\ ;$$

et tous les autres coefficiens différentiels seront encore nuls.

Soit P une fonction donnée quelconque de la seule variable x, et soit S une fonction donnée quelconque de P; si x se change en $x+g$, P deviendra (45)

$$P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3P}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ ;$$

de sorte qu'en représentant par G son accroissement, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3P}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ ;$$

mais P devenant ainsi $P+G$, S deviendra (45)

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dP^3}\,\frac{G^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

ou bien, en remettant pour G sa valeur, développant et ordonnant par rapport à g,

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots\;;$$

mais, d'un autre côté, puisque, par l'intermédiaire de P, S est aussi fonction de x, il s'ensuit que, lorsque x se change en $x+g$, S doit devenir

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dx^3}\,\frac{g^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\;;$$

et ce dernier développement doit être identiquement le même que celui qui le précède, quel que soit g; on doit donc avoir

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\;; \qquad (53)$$

c'est-à-dire que *le coefficient différentiel d'une fonction d'une quantité qui est elle-même une fonction d'une variable s'obtient en multipliant le coefficient différentiel de la première fonction, pris par rapport à la seconde, considérée comme la variable, par le coefficient différentiel de celle-ci, pris par rapport à cette variable.* C'est ce que nous avions déjà vu.

Soient P et Q deux fonctions données quelconques de la seule variable x, et soit S une fonction donnée quelconque de P et Q; si x se change en $x+g$, P et Q deviendront respectivement

$$P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots\;; \qquad Q+\frac{dQ}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2Q}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\;;$$

de sorte qu'en représentant par G et H les accroissemens respectifs de P et Q, on aura

$$G = \frac{dP}{dx}\frac{g}{1} + \frac{d^2P}{dx^2}\frac{g^2}{1.2} + \ldots\ldots ; \quad H = \frac{dQ}{dx}\frac{g}{1} + \frac{d^2Q}{dx^2}\frac{g^2}{1.2} + \ldots . ;$$

mais P et Q devenant respectivement $P+G$ et $Q+H$, S doit devenir (48)

$$S + \frac{dS}{dP}\frac{G}{1} + \frac{d^2S}{dP^2}\frac{G^2}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{dS}{dQ}\frac{H}{1} + 2\frac{d^2S}{dPdQ}\frac{GH}{1.2} + \ldots ;$$

$$+ \frac{d^2S}{dQ^2}\frac{H^2}{1.2} + \ldots$$

ou bien, en substituant pour G et H leurs valeurs, développant et ordonnant,

$$S + \left(\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx} + \frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}\right)\frac{g}{1}$$

$$+ \left\{\frac{dS}{dP}\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{dS}{dQ}\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2S}{dPdQ}\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dx} + \frac{d^2S}{dQ^2}\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2} + \ldots ;$$

mais, d'un autre côté, par l'intermédiaire de P et Q, S étant aussi fonction de x; lorsque x se change en $x+g$, S doit devenir

$$S + \frac{dS}{dx}\frac{g}{1} + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{g^2}{1.2} + \ldots\ldots ,$$

et ce dernier développement doit, quel que soit g, être identique avec celui qui le précède. On doit donc avoir

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx} + \frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx} . \qquad (54)$$

Si S était fonction de trois quantités P, Q, R qui fussent elles-mêmes des fonctions de x, on trouverait semblablement

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dx}\,, \qquad (55)$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire que *le coefficient différentiel d'une fonction de plusieurs quantités qui sont elles-mêmes des fonctions d'une même variable s'obtient en prenant la somme des produits respectifs des coefficiens différentiels partiels de la fonction, relatifs à ces diverses quantités, par les coefficiens différentiels de ces mêmes quantités, relatifs à la variable.*

Soit P une fonction donnée quelconque de deux variables x et y, et soit S une fonction donnée quelconque de P ; si l'on suppose que x et y se changent respectivement en $x+g$ et $y+h$, P deviendra (48)

$$\begin{aligned}P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\\ +\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+2\frac{d^2P}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots\\ +\frac{d^2P}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots;\end{aligned}$$

de sorte qu'en représentant par G son accroissement, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\frac{d^2P}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{d^2P}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots;$$

mais P devenant ainsi $P+G$, S doit devenir (45)

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\frac{d^3S}{dP^3}\,\frac{G^3}{1.2.3}+\ldots;$$

ou, en mettant pour G sa valeur, développant et ordonnant,

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2\right\}\frac{g^2}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+2\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{dP}{dx}\,\frac{dP}{dy}\right\}\frac{gh}{1.2}+\ldots$$

$$+\left\{\frac{dS}{dP}\,\frac{d^2P}{dy^2}+\frac{d^2S}{dP^2}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right\}\frac{h^2}{1.2}+\ldots$$

mais, d'un autre côté, S étant, par l'intermédiaire de P, fonction de x et y, doit, dans les mêmes circonstances, devenir

$$S+\frac{dS}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{dS}{dy}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{d^2S}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^2S}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ ;$$

voilà donc deux développemens qui, quels que soient la grandeur et le rapport des deux accroissemens g et h, doivent être identiquement les mêmes; ce qui donne

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,,\qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}\ ;\qquad (56)$$

c'est-à-dire que *les coefficiens différentiels partiels d'une fonction d'une quantité qui est elle-même fonction de deux variables, s'obtient en multipliant respectivement le coefficient différentiel de la fonction, par rapport à cette quantité, par les coefficiens différentiels partiels de cette quantité relatifs aux deux variables.*

Soient P et Q deux fonctions données quelconques de deux variables x et y, et soit S une fonction donnée quelconque de P

et Q; si x et y deviennent respectivement $x+g$ et $y+h$, P et Q deviendront respectivement (48)

$$P+\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots \qquad Q+\frac{dQ}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{d^2Q}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{d^2P}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots \qquad +\frac{dQ}{dy}\,\frac{h}{1}+2\,\frac{d^2Q}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{d^2P}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots \qquad +\frac{d^2Q}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots;$$

de sorte qu'en dénotant par G et H les accroissemens respectifs de P et Q, on aura

$$G=\frac{dP}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{dP}{dy}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\,\frac{d^2P}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{d^2P}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots$$

$$H=\frac{dQ}{dx}\,\frac{g}{1}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2Q}{dx^2}\,\frac{g^2}{1.2}+2\,\frac{d^2Q}{dxdy}\,\frac{gh}{1.2}+\frac{d^2Q}{dy^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots;$$

mais, P et Q devenant respectivement $P+F$ et $Q+H$, S doit devenir (48)

$$S+\frac{dS}{dP}\,\frac{G}{1}+\frac{d^2S}{dP^2}\,\frac{G^2}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{dS}{dQ}\,\frac{H}{1}+2\,\frac{d^2S}{dPdQ}\,\frac{GH}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{d^2S}{dQ^2}\,\frac{H^2}{1.2}+\ldots$$

ou, en mettant pour G et H leurs valeurs, développant et ordonnant,

$$S+\left(\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}\right)\frac{g}{1}+\ldots$$

$$+\left(\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dy}\right)\frac{h}{1}+\ldots;$$

mais, d'un autre côté, par l'intermédiaire de P et Q, S étant aussi fonction de x et y, doit devenir, dans les mêmes circonstances,

$$S+\frac{dS}{dx}\frac{g}{1}+\ldots$$

$$+\frac{dS}{dy}\frac{h}{1}+\ldots;$$

or, ces deux développemens doivent être identiquement les mêmes, quels que soient la grandeur et le rapport des accroissemens g et h; donc

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dy}. \quad (57)$$

Si S était fonction de trois quantités P, Q, R, dont chacune fût fonction de x et y, on trouverait semblablement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dx},\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dR}\frac{dR}{dy};\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

et ainsi de suite. En rapprochant ces résultats des formules (53), (54), (55) on en conclura que, *pour obtenir les coefficiens différentiels partiels d'une fonction de tant de quantités qu'on voudra, qui sont toutes fonctions de deux variables, il suffit d'opérer tour à tour, par rapport à chaque variable, comme si elle était seule.*

Si, P étant une fonction de trois variables x, y, z, S était une fonction de P, on trouverait, par de semblables considérations,

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}\,,\qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}\,,\qquad \frac{dS}{dz}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dz}\,.\qquad (59)$$

Si P et Q étant des fonctions de x, y, z, S était fonction de P et Q, on trouverait

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}\,,\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dy}\,,\\ \frac{dS}{dz}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dz}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dz}\,.\end{aligned}\right\}\qquad (60)$$

Si P, Q, R étant des fonctions de x, y, z, S était une fonction de P, Q, R, on trouverait pareillement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dx}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dx}\,,\\ \frac{dS}{dy}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dy}\,,\\ \frac{dS}{dz}&=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dz}+\frac{dS}{dQ}\,\frac{dQ}{dz}+\frac{dS}{dR}\,\frac{dR}{dz}\,;\end{aligned}\right\}\qquad (61)$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général, *pour obtenir les coefficiens différentiels partiels d'une fonction de tant de quantités qu'on voudra, qui sont elles-mêmes fonctions d'un nombre quelconque de variables, il suffit d'opérer tour à tour, par rapport à chaque variable, comme si toutes les autres étaient des constantes.*

Si, dans la formule (54), on suppose $Q=x$, elle deviendra

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dx}\,;\qquad (62)$$

et tel sera le coefficient différentiel d'une fonction S de x et d'une autre quantité P, qui sera elle-même fonction de x.

Il est essentiel de distinguer, dans cette formule, le $\frac{dS}{dx}$ qui se trouve dans le premier membre de celui qui se trouve dans le second; le premier est relatif à S, considérée tant par rapport à x que par rapport à sa fonction P, tandis que, pour déterminer l'autre, il faudra, dans S, considérer P comme une constante.

Pour éviter l'équivoque, dans tous les cas semblables, lesquels se représentent assez fréquemment, Euler renfermait constamment entre deux parenthèses les symboles de dérivées prises relativement à une variable, de manière à traiter comme constantes toutes les autres variables, fonctions ou non fonctions de celle-là. Ainsi, par exemple, en supposant

$$S=(P\,,\,Q\,,\,R,\ldots\ldots\,x,y,z,\ldots\ldots)\,,$$

et, en admettant que chacune des quantités P, Q, R, ... fût à la fois fonction des variables x, y, z, ..., $\left(\frac{dS}{dx}\right)$ signifiait la dérivée de S, prise en considérant P, Q, R, ... y, z, ... comme des constantes, tandis que $\frac{dS}{dx}$ représentait la dérivée de S prise non seulement par rapport à x, mais encore par rapport à P, Q, R, ... considérés comme des fonctions de x; de sorte que, suivant la manière de noter d'Euler, la formule (62) aurait été écrite comme il suit:

$$\frac{dS}{dx}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dx}+\left(\frac{dS}{dx}\right).$$

Laplace a constamment employé la notation d'Euler; mais, peu à peu, l'usage des parenthèses s'est perdu, et c'est véritablement une chose fâcheuse; car la perfection des notations algébriques devrait consister principalement en ce qu'elles n'offrissent jamais d'équivoques et s'expliquassent toujours nettement d'elles-mêmes, sans avoir jamais besoin, pour être comprises, d'être interprétées par les mots de la langue vulgaire.

Si, dans les formules (58), on suppose $Q=x$, $R=y$, on aura, suivant la notation d'Euler, $\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dR}{dx}\right)=0$; en conséquence ces formules deviendront

$$\frac{dS}{dx}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dx}+\left(\frac{dS}{dx}\right),\quad \frac{dS}{dy}=\left(\frac{dS}{dP}\right)\frac{dP}{dy}+\left(\frac{dS}{dy}\right);\qquad (63)$$

formules qu'on écrit communément comme il suit:

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dx}+\frac{dS}{dx},\qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dS}{dP}\,\frac{dP}{dy}+\frac{dS}{dy}.$$

Nous terminerons par observer que, si une fonction S d'une ou de plusieurs variables est constamment nulle, quelles que soient ces variables, tous les coefficiens différentiels de cette fonction devront aussi être nuls. Si, en effet, on a

$$S=f(x,y,z,\ldots\ldots)=0,$$

quels que soient $x, y, z, \ldots\ldots$; on devra avoir aussi

$$f(x+g, y+h, z+k, \ldots\ldots)=0,$$

quels que soient $g, h, k, \ldots\ldots\ldots$; d'où il suit qu'en développant, par le théorème de Taylor, les coefficiens des différens termes du développement devront séparément être nuls.

§. II.

De la différentiation des équations.

Dans tout ce qui précède, nous avons constamment considéré des fonctions d'une ou de plusieurs variables données explicitement, soit immédiatement soit médiatement, par l'intermédiaire d'autres fonctions de ces mêmes variables; mais on pourrait fort bien n'avoir, entre des variables et des fonctions de ces variables dont on se propose d'obtenir les divers coefficiens différentiels, que de simples équations de relation, auquel cas on dirait que ces fonctions sont données *implicitement*.

Pour commencer par le cas le plus simple, soit, entre les deux variables x et y l'équation quelconque

$$\mathrm{f}(x, y)=0 ;$$

en vertu de cette équation, y est une certaine fonction de x, qu'on obtiendrait *explicitement* par la résolution même de l'équation. On peut donc se proposer de déterminer les coefficiens différentiels des différens ordres de cette fonction.

Le première pensée qui se présente, pour résoudre cette question, est de résoudre l'équation proposée par rapport à y, ce qui ramenerait la question au cas des fonctions explicites, dont nous avons traité assez au long (SEC. I.er, §. I.er).

Mais, outre que l'équation pourrait être transcendante, et qu'il est bien peu d'équations de cette classe que nous sachions résoudre, quand bien même cette équation serait algébrique, nous ne saurions pas la résoudre si elle était d'un degré supérieur au quatrième, et même, passé le second, les valeurs que nous obtiendrions pour y seraient, en général, d'une excessive complication. Voilà donc une difficulté que nous devons nous attacher à éluder.

Que nous sachions ou que nous ne sachions pas résoudre cette équation, y n'en est pas moins une certaine fonction de x que nous pouvons représenter comme il suit:

$$y=\varphi x \ ,$$

et si nous substituons cette valeur dans la proposée, à la place de x, ce qui donnera

$$\mathrm{f}(x, \varphi x)=\psi x=0 \ ,$$

nous en ferons une équation identique qui devra avoir lieu quel que soit x, et qui conséquemment devra encore avoir lieu quel que soit g, lorsqu'on y changera x en $x+g$.

Mais si l'on pose

$$\mathrm{f}(x, y)=\mathrm{f}(x, \varphi x)=\psi x=S \ ,$$

on aura

$$\psi(x+g)=S+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\frac{g}{1}+\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{g^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}\,\frac{g^3}{1.2\,3}+\ldots.. ;$$

et, puisque ce développement doit être nul, quel que soit g, on devra avoir cette suite d'équations

$$S=0\ , \quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0\ , \quad \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2}=0\ , \quad \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}=0 \ \ldots.. ;$$

ainsi, *étant donnée une équation entre deux variables, on peut égaler à zéro les coefficiens différentiels successifs de son premier membre, pris par rapport à l'une d'elles, pourvu que, dans ce premier membre, on considère l'autre variable comme une fonction de celle-là.*

Il faudra donc, dans $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$, traiter y, comme nous avons traité P dans la formule (62), ce qui donnera

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\;; \qquad (64)$$

c'est là ce qu'on appelle l'*équation différentielle* de la proposée $S=0$.

Ces deux équations sont de la forme

$$f(x,y)=0\;, \qquad F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0\;;$$

de sorte que si, après avoir éliminé y entre elles, on résolvait l'équation résultante par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on obtiendrait la valeur de ce coefficient différentiel en fonction de x, telle qu'on l'aurait obtenue par la résolution de la proposée, suivie de la différentiation; mais ce sont là des opérations le plus souvent aussi inutiles qu'elles seraient impraticables.

Remarquons que, puisque la proposée et sa différentielle ont lieu en même temps, il doit en être de même de toutes les combinaisons qu'on voudra faire de l'une et de l'autre; et, comme ces combinaisons sont en nombre infini, il s'ensuit qu'une même équation *primitive*, entre deux variables, peut avoir une infinité de différentielles différentes, mais qui toutes, par l'élimination de la fonction, au moyen de la proposée, conduiraient à la même valeur du coefficient différentiel de cette fonction, exprimé au moyen de la variable.

Si, dans l'équation $f(x,y)=0$, nous eussions considéré x comme fonction de y, ainsi que nous pouvions le faire; en représentant toujours son premier membre par S, son équation différentielle aurait été

$$\frac{dS}{dx}\,\frac{dx}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\;. \qquad (65)$$

Au lieu des équations (64) et (65), où les deux variables x et y ne sont pas traitées de la même manière, on peut en obtenir une où elles soient traitées symétriquement. Pour cela, concevons que, outre l'équation proposée $f(x,y)=0$ ou $S=0$, on pose encore une autre équation arbitraire $F(x,y,r)=0$, r étant une nouvelle variable. Au moyen de ces deux équations, x et y seront des fonctions de r qu'on obtiendrait, par l'élimination, pour chaque forme particulière qu'on voudrait adopter pour la fonction F; on aura donc, au moyen de ces deux équations,

$$x=\varphi r\,, \qquad y=\psi r\,;$$

au moyen de quoi la proposée deviendra

$$S=f(\varphi r,\psi r)=0\,;$$

équation qui devra être identique quelle que soit r. On pourra donc égaler à zéro la différentielle de son premier membre, prise par rapport à r; on pourra donc aussi égaler à zéro la différentielle de S prise par rapport à r, pourvu qu'on y considère x et y comme des fonctions de cette variable; ce qui donnera (54)

$$\frac{dS}{dx}\,\frac{dx}{dr}+\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dr}=0\,; \qquad (66)$$

équation qui comprend implicitement les équations (64) et (65) qui s'en déduisent, savoir: la première en posant $r=x$, et la seconde en posant $r=y$.

Si l'on convient de représenter par la caractéristique δ les différentielles de x et de y prises par rapport à r, le dénominateur $dr=1$ deviendra dès lors superflu, et l'on pourra écrire simplement

$$\frac{dS}{dx}\,\delta x+\frac{dS}{dy}\,\delta y=0\,; \qquad (67)$$

et c'est ainsi qu'il nous arrivera fréquemment d'en user par la suite. Mais on ne doit pas perdre de vue que ces deux dernières équations n'auront aucun sens, tant qu'on n'aura pas statué sur la forme de la fonction F; c'est-à-dire que le rapport de δx à δy demeurera tout à fait indéterminé. Ce δx et ce δy sont dits alors les *variations* de x et de y.

Soit présentement l'équation, entre trois variables,

$$S=\mathrm{f}(x,y,z)=0\ ;$$

au moyen de cette équation, z sera une certaine fonction de x et y, que l'on obtiendrait en la résolvant par rapport à z; on peut donc poser

$$z=\varphi(x,y)\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$S=\mathrm{f}[x,y,\varphi(x,y)]=0\ ;$$

équation qui devra avoir lieu quels que soient les grandeur et rapport des variables x et y, et devra conséquemment subsister encore, quels que soient les grandeur et rapport de g et h, en y changeant respectivement ces variables en $x+g$ et $y+h$; de là on conclura, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait ci-dessus, que l'on peut égaler à zéro les deux différentielles partielles de S, relatives à x et à y, pourvu qu'on y considère z comme une fonction de ces deux variables; ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=0\ ,\qquad (68)$$

équations desquelles on tirera les valeurs des deux coefficiens différentiels partiels $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ de la fonction z.

Au surplus, au lieu d'opérer de cette manière, on pourrait poser les deux équations arbitraires.

$$F(x,y,z,r)=0\ , \qquad \Phi(x,y,z,r)=0\ ;$$

au moyen desquelles et de la proposée x, y, z deviendraient des fonctions de la seule variable r ; on aurait ainsi

$$\frac{dS}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dS}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dS}{dz}\frac{dz}{dr}=0\ ;$$

ou simplement

$$\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{dS}{dy}\delta y+\frac{dS}{dz}\delta z=0\ ; \qquad (69)$$

équation qui n'aura de sens qu'autant qu'on aura statué sur la forme des fonctions F et Φ.

Soient entre les trois variables x, y, z les deux équations

$$M=\varphi(x,y,z)=0\ , \qquad N=\psi(x,y,z)=0\ ;$$

en vertu de ces équations, x et y sont des fonctions de z ; d'où il suit, par les mêmes considérations que ci-dessus, qu'on pourra égaler à zéro les différentielles de M et de N, prises par rapport à z, pourvu qu'on y traite x et y comme des fonctions de cette variable, ce qui donnera

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\ , \quad \frac{dN}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dN}{dz}=0\ ; \quad (70)$$

équations qui donneront les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ des deux fonctions x et y de la variable z. On pourrait au surplus écrire, plus symétriquement,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dM}{dx}\delta x+\dfrac{dM}{dy}\delta y+\dfrac{dM}{dz}\delta z=0\ , \\[2ex] \dfrac{dN}{dx}\delta x+\dfrac{dN}{dy}\delta y+\dfrac{dN}{dz}\delta z=0\ ,\end{array}\right\}\qquad(71)$$

pourvu qu'il demeurât entendu que δx, δy, δz sont les différentielles de x, y, z prises par rapport à une quatrième variable r, liée aux trois autres par une équation arbitraire

$$F(x,y,z,r)=0\ .$$

Nous avons vu ci-dessus que, si l'on avait, entre les deux variables x et y, l'équation de relation

$$S=0\ ,$$

on avait aussi

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ ;$$

au moyen de ces deux équations y et $\frac{dy}{dx}$ sont des fonctions de x; en différentiant donc la dernière sous ce point de vue, il viendra

$$\frac{dS}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2S}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,\frac{dS}{dxdy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}=0\ ;\qquad(72)$$

équation qui donnerait $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de x, si l'on en chassait y et $\frac{dy}{dx}$, au moyen des deux premières. Par des différentiations ultérieures on trouverait successivement $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ...

Nous avons également vu ci-dessus que si, entre les variables x, y, z, on avait l'équation de relation

$$S=0\ ,$$

on avait aussi les deux suivantes

$$\frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dx}+\frac{dS}{dx}=0\ ,\qquad \frac{dS}{dz}\,\frac{dz}{dy}+\frac{dS}{dy}=0\ ;$$

au moyen de ces trois équations, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sont des fonctions de x et y ; en différentiant donc les deux dernières sous ce point de vue, et remarquant que la différentielle de l'une par rapport à y est identique avec la différentielle de l'autre par rapport à x, il en résultera seulement ces trois-ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dS}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\,\frac{d^2S}{dzdx}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}=0\ ,\\
&\frac{dS}{dz}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2S}{dz^2}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2S}{dzdx}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2S}{dzdy}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2S}{dxdy}=0\ ,\\
&\frac{dS}{dz}\,\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2S}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+2\,\frac{d^2S}{dzdy}\,\frac{dz}{dy}+\frac{d^2S}{dy^2}=0\ ;
\end{aligned}\right\}\ (73)$$

équations qui donneraient les trois coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ de la fonction z, au moyen des deux variables x et y, si l'on en chassait z, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, au moyen des trois premières. Par des différentiations ultérieures on obtiendrait les coefficiens différentiels des ordres plus élevés.

Nous avons vu aussi que si, entre les trois mêmes variables x, y, z, on avait les deux équations

$$M=0\ ,\qquad N=0\ ;$$

on avait aussi les deux suivantes :

$$\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dM}{dz}=0\,,\quad \frac{dN}{dx}\frac{dx}{dz}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dz}+\frac{dN}{dz}=0\,;$$

au moyen de ces quatre équations x, y, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ sont des fonctions de z; en différentiant donc les deux dernières sous ce point de vue, on obtiendrait ces deux-ci:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{dz}+\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{dz}+\frac{d^2M}{dz^2}=0\,,\\ &\frac{dN}{dx}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dN}{dy}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{d^2N}{dxdz}\frac{dx}{dz}+\frac{d^2N}{dydz}\frac{dy}{dz}+\frac{d^2N}{dz^2}=0\,;\end{aligned}\right\}\ (74)$$

lesquelles donneront les deux coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, en fonction de z, lorsqu'on en aura chassé x, y, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, au moyen des quatre premières. Par des différentiations ultérieures on obtiendrait successivement les coefficiens différentiels des ordres supérieurs.

Généralement, si, entre m variables, on a les n équations

$$S_1=0\,,\quad S_2=0\,,\quad S_3=0\,,\ldots\ldots S_n=0\,;$$

on pourra considérer n de ces variables comme des fonctions des $m-n$ autres, et, en différentiant successivement ces équations sous ce point de vue, on obtiendra les coefficiens différentiels de tous les ordres de ces mêmes fonctions.

Si nous écrivions pour des commençans, nous nous serions bien gardés d'entrer aussi avant dans la théorie, sans en avoir montré l'utilité par quelques applications simples, et sans avoir appuyé les préceptes par un nombre d'exemples suffisant pour faire bien comprendre le mécanisme du calcul pratique; mais nous avons pensé que ces précautions, qui auraient donné à cet exposé une étendue trop excessive, n'étaient point nécessaires pour nous faire comprendre de nos lecteurs. Il nous deviendra présentement fort commode de pouvoir nous livrer exclusivement aux applications, sans être obligés de les interrompre pour revenir sur les principes théoriques.

Nous avons eu principalement en vue, dans ce qui précède, 1.° de conserver les notations de Leibnitz, dont on ne saurait contester les avantages, et qu'on ne pourrait d'ailleurs changer sans rendre très-pénible la lecture d'un grand nombre d'excellens ouvrages; 2.° de ne nous appuyer néanmoins sur aucune sorte de considérations telles que celles des infiniment petits ou des limites, qui laissent toujours quelques nuages dans l'esprit; 3.° enfin, de ne nous pas appuyer, dès l'abord, sur la série de Taylor, qu'il paraît tout au moins difficile de bien établir *a priori*. Nous désirerions n'avoir pas trop imparfaitemement rempli ces trois objets.

Nous nous occuperons des applications dès que divers mémoires sur d'autres sujets, que peut-être déjà nous avons trop différé de faire connaître, auront été publiés.