# ANNALES
# DE MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Analyse algébrique. Examen et complément de la méthode de Newton, pour l'approximation des racines incommensurables, des équations numériques de tous les degrés**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 20 (1829-1830), p. 196-212
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__196_0>

# ANALYSE ALGÉBRIQUE.

## *Examen et complément de la méthode de Newton, pour l'approximation des racines incommensurables, des équations numériques de tous les degrés ;*

Par M. Gergonne.

De toutes les méthodes propres à déterminer, par approximation, les racines réelles des équations numériques, celle de Newton est bien, sans contredit, la plus commode et la plus expéditive ; elle peut d'ailleurs s'appliquer tout aussi bien à plusieurs équations, entre un égal nombre d'inconnues, qu'à une équation qui n'en renferme qu'une seule, à des équations transcendantes, comme à des équations algébriques ; mais cette méthode repose sur des considérations assez délicates, et l'esprit n'en peut être bien saisi qu'autant qu'elle est exposée avec tout le soin et tous les développemens convenables. En outre, cette méthode est assez souvent en défaut ; et il ne paraît pas qu'on ait encore bien caractérisé jusqu'ici ni les conditions nécessaires et suffisantes pour en assurer le succès, ni les diverses circonstances qui peuvent en rendre l'application illusoire. Enfin cette méthode, telle du moins qu'on la présente communément, manque d'un complément au défaut duquel tout procédé approximatif, quelque parfait qu'il pût paraître à d'autres égards, devrait être sévèrement repoussé ; elle ne donne point, en effet, à chaque approximation nouvelle, comme le fait celle de

Lagrange, la limite de l'erreur dont cette approximation se trouve affectée.

Je désire que l'essai qu'on va lire soit jugé propre à remédier en partie à ces divers inconvéniens; il renferme l'exposé de la méthode d'approximation de Newton, telle, à peu près, que j'ai coutume de la présenter dans mes cours.

Pour plus de simplicité et de brièveté je supposerai constamment, dans tout ce qui va suivre, que l'équation proposée n'a point de racines égales, et que celle de ses racines dont on veut poursuivre l'approximation est une racine positive. On sait, en effet, que la question peut toujours être réduite à ces termes.

Soit l'équation numérique proposée, de degré quelconque,

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Gx^2+Hx+K=\mathrm{F}x=0\,. \quad (1)$$

Supposons que l'on sache de cette équation que, parmi ses racines réelles, positives, inconnues, il en est une, et une seule $r$, très-peu différente d'un nombre donné $p$ que, pour fixer les idées, nous supposerons plus grand que cette racine inconnue. Soit $\xi$ ce qu'il faudrait rigoureusement retrancher à $p$ pour avoir $r$; posons $x=p-\xi$; il viendra, en substituant dans (1),

$$A(p-\xi)^m+B(p-\xi)^{m-1}+C(p-\xi)^{m-2}+\ldots\ldots+G(p-\xi)^2+H(p-\xi)+K=0\,; \quad (2)$$

équation du même degré en $\xi$ que la proposée en $x$, et dont les racines sont les $m$ restes qu'on obtient en retranchant tour à tour de $p$ toutes les racines de la proposée. Au nombre de ses racines se trouve donc, en particulier, ce qu'il faut retrancher à $p$ pour avoir la racine $r$; mais si, pour obtenir cette quantité, il nous fallait résoudre l'équation (2), nous n'aurions fait ainsi que déplacer une difficulté qu'il s'agit, au contraire, d'éluder.

Pour y parvenir observons que, puisqu'une seule des racines de l'équation (1) est peu différente de $p$, une seule des racines de l'équation (2) doit être un fort petit nombre ; d'où il suit que, relativement à cette racine, la seule que nous ayons intérêt de connaître, l'équation ne sera que faiblement altérée si, dans le développement de son premier membre, nous supprimons tous les termes affectés des puissances de $\xi$ supérieures à la première. Par leur suppression, nous atteindrons à la fois deux buts ; car, d'une part, nous amenerons ainsi l'équation (2) à n'être plus que du premier degré seulement, et, d'une autre, nous exprimerons tacitement que la racine unique de l'équation résultante est la plus petite de toutes, c'est-à-dire, précisément celle que nous cherchons. Toutefois, la seule valeur de $\xi$ que nous obtiendrons de cette équation résultante ne sera point exacte, puisqu'elle aura été déduite d'une équation tronquée ; mais elle approchera d'autant plus de l'être, qu'elle sera plus petite, puisqu'alors nos suppressions en auront eu d'autant moins d'importance ; de sorte qu'elle serait rigoureusement exacte si on la trouvait tout à fait nulle ; ce qui est d'ailleurs manifeste, puisqu'à $\xi=0$ doit répondre $x=p$.

En exécutant le développement du premier membre de l'équation (2), avec les suppressions qui viennent d'être indiquées, elle devient

$$\left.\begin{array}{r} Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+\ldots\ldots+Gp^2+Hp+k \\ -[mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}+\ldots\ldots+Gp+H]\xi \end{array}\right\}=0\ ;$$

or, nous avons déjà (1)

$$Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+\ldots\ldots+Gp^2+Hp+k=\mathrm{F}p\ ;$$

si donc, suivant les notations de Lagrange, nous posons en outre

$$mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}+\ldots\ldots+Gp+H=\mathrm{F}'p\ ,$$

notre équation deviendra simplement

$$\mathrm{F}p-\xi\mathrm{F}'p=0\ ,$$

d'où nous tirerons

$$\xi = \frac{Fp}{F'p} \;; \qquad (3)$$

telle est donc, à peu près, ce qu'il faut retrancher au nombre donné $p$, pour avoir la valeur $r$ de $x$, de sorte que nous pourrons écrire, par forme d'approximation,

$$x = p - \frac{Fp}{F'p} \;; \qquad (4)$$

ce qui donne cette règle fort simple: *ce qu'il faut retrancher d'une valeur approchée, mais un peu trop grande, de l'une des racines réelles positives d'une équation numérique pour en obtenir une valeur plus approchée, est une fraction ayant pour numérateur ce que devient le premier membre de l'équation proposée en y mettant cette première valeur approchée à la place de l'inconnue, et pour dénominateur ce que devient la fonction dérivée de ce premier membre lorsqu'on y fait la même substitution.*

La forme même de la valeur (3) de $\xi$ semble venir pleinement à l'appui de cette proposition. Si, en effet, $p$ est un nombre presque égal à une des racines de l'équation (1), le numérateur $Fp$ de cette valeur doit être un très-petit nombre, tellement que, si $p$ était rigoureusement racine de l'équation (1), ce numérateur serait tout à fait nul. Mais il n'en saurait être de même, en général, de son dénominateur $F'p$. Pour qu'en effet ce dénominateur fût tout à fait nul, en même temps que le numérateur $Fp$, il faudrait, suivant la théorie des racines égales, que l'équation (1) eût plusieurs racines égales à $p$; d'où il suit que, pour qu'il fût très-petit en même temps que le numérateur, il faudrait que l'équation (1) eût plusieurs racines peu différentes de $p$; supposition que, dès le début, nous avons formellement exclue. Dans notre hypothèse, donc, le dénominateur de la valeur de $\xi$ sera généralement beaucoup plus grand que son numérateur; cette valeur sera donc généralement une petite fraction ; nous aurons donc fait des suppressions peu importantes pour déduire cette valeur de l'équation (2) ; cette valeur sera donc à peu près exacte.

Ayant ainsi obtenu une valeur de la racine cherchée $r$, plus approchée que la première, en la représentant par $p_1$, on pourra raisonner, à plus forte raison, sur $p_1$ comme l'on avait raisonné sur $p$, et en conclure, par un semblable calcul, une valeur $p_2$, plus approchée encore, et ainsi de suite, c'est-à-dire que, si l'on pose successivement,

$$\left.\begin{array}{l} p-\dfrac{\mathrm{F}p}{\mathrm{F}'p}=p_1\,, \\ p_1-\dfrac{\mathrm{F}p_1}{\mathrm{F}'p_1}=p_2\,, \\ p_2-\dfrac{\mathrm{F}p_2}{\mathrm{F}'p_2}=p_3\,, \\ \dots\dots\dots\,; \end{array}\right\} \quad (5)$$

les nombres $p, p_1, p_2, p_3$ ....... devront, sauf les exceptions dont il sera question plus loin, converger sans cesse vers la valeur de la racine $r$.

On voit, par là, pourquoi nous avons donné, comme condition de succès du procédé, qu'une seule des racines de la proposée (1) fût peu différente du nombre donné $p$ ; on voit d'ailleurs que s'il en est autrement, que si l'équation (1) a plusieurs racines peu différentes de $p$, la suppression, dans le développement du premier membre de l'équation (2), des termes affectés des puissances de $\xi$ supérieures à la première, réduira bien encore, à la vérité, cette équation au premier degré ; mais cette suppression n'exprimant plus alors nettement, comme elle faisait dans le premier cas, quelle est celle des valeurs de $\xi$ qu'on a le dessein d'obtenir, cette valeur ne pourra se présenter que d'une manière tout à fait équivoque (*).

Nous n'avons eu égard, dans ce qui précède, qu'aux racines réelles de l'équation (1); mais on va voir que la nature de ses racines imaginaires peut souvent aussi devenir un obstacle au succès de la méthode. Soient, en effet, $g \pm h\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires de l'équation (1); si $h$ est une fraction extrêmement petite et que $g$ soit un nombre peu différent de $p$, ou même, si l'on veut, égal à $p$, il sera vrai de dire que la proposée a trois racines peu différentes de $p$; d'où il suit que le dénominateur de la valeur de $\xi$ sera, comme son numérateur, une quantité fort petite; or, il en pourra fort bien résulter pour $\xi$ une valeur fort grande et conséquemment très-fautive; puisqu'alors, pour parvenir à cette valeur, on aura fait des suppressions notables dans le développement du premier membre de l'équation (2).

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que la fraction $\frac{Fp}{F'p}$ avait été rigoureusement conclue de la valeur de $p$; mais si, comme l'on en use communément, on fait usage, dans ce calcul, des parties décimales, et qu'on se contente de simples approximations, on trouvera là une nouvelle source d'erreurs d'autant plus influentes que $Fp$ et $F'p$ seront de plus petits nombres; de sorte que la méthode pourra être trouvée en défaut dans des cas même où un calcul plus rigoureux en aurait assuré le succès.

On a cru suffisamment obvier à ces divers inconvéniens en prescrivant de prendre, pour la valeur $p$ de départ, un nombre très-

(*) On pourrait bien, dans les cas semblables, conserver, dans le développement du premier membre de l'équation (2), les termes affectés de $\xi^2$, s'il y avait seulement deux racines de l'équation (1) peu différentes de $p$; y conserver en outre les termes en $\xi^3$ s'il y en avait trois, et ainsi de suite; mais, outre que le plus souvent ces circonstances ne sont pas connues, on nuirait ainsi à la simplicité et à l'uniformité du procédé.

peu différent de la racine qu'on cherche; mais l'on va voir tout à l'heure que cette condition a le double défaut de n'être ni nécessaire ni suffisante. On verra que, si voisine que se trouve de la véritable cette valeur de départ, la méthode peut très-bien être en défaut; tandis qu'au contraire on peut en obtenir un succès complet dans certains cas, quelque éloignée que soit cette valeur de départ de la racine dont on poursuit l'approximation. On verra en outre que le procédé peut fort bien réussir lors même que plusieurs des racines de la proposée diffèrent très-peu du nombre $p$, tandis que, dans le cas contraire, elle peut très-bien se trouver en défaut; ce qui revient à dire finalement qu'on a complétement ignoré jusqu'ici les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour en assurer certainement le succès.

Pour découvrir ces conditions, consultons la géométrie, et essayons de traduire nos approximations successives en procédé graphique. Considérons la courbe parabolique donnée par l'équation

$$y=\mathrm{F}x\ ; \qquad (6)$$

la résolution de l'équation (1) se réduira, comme l'on sait, à assigner les distances de l'origine aux diverses intersections de cette courbe avec l'axe des $x$; c'est-à-dire, les valeurs de $x$ qui répondent à $y=0$.

$\mathrm{F}x$ étant, en général, l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x$, et $\mathrm{F}'x$ l'angle que fait avec cet axe la tangente menée à la courbe par l'extrémité de cette ordonnée, il s'ensuit que $\frac{\mathrm{F}x}{\mathrm{F}'x}$ est l'expression de la sous-tangente qui répond à cette même abscisse, et que conséquemment $x-\frac{\mathrm{F}x}{\mathrm{F}'x}$ est la distance de l'origine au point où l'axe des $x$ est coupé par la tangente menée à la courbe par le point dont l'abscisse est $x$; donc $p-\frac{\mathrm{F}p}{\mathrm{F}'p}$ est la distance de l'origine au point où l'axe des $x$ est coupé par la tangente au point de la courbe dont l'abscisse est $p$.

En conséquence le calcul indiqué par la série des équations (5) pourra être traduit graphiquement ainsi qu'il suit :

Soient O l'origine des coordonnées et P un quelconque des points de l'axe des $x$. Soient menées l'ordonnée PM, terminée à la courbe en M, et ensuite la tangente MP′, se terminant à l'axe des $x$ en P′; soit menée l'ordonnée P′M′, terminée à la courbe en M′, et ensuite la tangente M′P″, se terminant à l'axe des $x$ en P″; soit menée l'ordonnée P″M″ terminée à la courbe en M″, et ensuite la tangente M″P‴ se terminant à l'axe des $x$ en P‴, et ainsi de suite, indéfiniment; alors, si OP est supposé le nombre donné $p$, OP′, OP″, OP‴, ........ seront les valeurs de $p_1$, $p_2$, $p_3$, ...... données par les équations (5).

A l'aide de cette construction (*), il nous sera très-facile d'assigner les circonstances dans lesquelles on peut compter surement sur le succès de la méthode, et celles où, au contraire, elle peut se trouver en défaut.

Soit d'abord R (fig. 1) un des points d'intersection de la courbe parabolique avec l'axe des $x$, et soit OR la racine de l'équation $Fx=0$ dont on se propose d'approcher de plus en plus. Soit OP > OR, valeur de départ, et soit PM l'ordonnée qui répond à l'abscisse OP; le succès de la méthode sera infaillible si, dans toute l'étendue de l'arc MR, les ordonnées sont constamment positives et décroissantes, et qu'il en soit de même des inclinaisons des tangentes sur l'axe des $x$, c'est-à-dire, si cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion; car il est manifeste qu'alors OR sera la limite de OP, OP′, OP″, OP‴, ........, pourvu toutefois que ces dernières quantités soient déterminées par un calcul rigoureux.

Le succès de la méthode sera encore infaillible (fig. 2) si les

---

(*) Cette construction, dont je fais depuis long-temps usage dans mes cours, m'a été indiquée assez récemment par M. Bérard, géomètre distingué de Briançon, qui la croyait nouvelle, parce qu'en effet elle paraît n'avoir encore été publiée nulle part.

ordonnées et les inclinaisons des tangentes sur l'axe des $x$, dans toute l'étendue de l'arc MR, étant constamment négatives, les unes et les autres vont continuellement en décroissant, abstraction faite de leur signe ; ce qui arrivera encore nécessairement si cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion ; car, dans ce cas, comme dans le précédent, OR sera nécessairement la limite de OP, OP′, OP″, OP‴, ......

Si, dans toute l'étendue de l'arc MR (fig. 3 et 4), les ordonnées et les inclinaisons des tangentes sur l'axe des $x$ décroissant encore continuellement, abstraction faite de leur signe, c'est-à dire si cet arc, ne présentant encore ni sommets ni points d'inflexion, comme dans les deux cas précédens, ces ordonnées et ces inclinaisons étaient constamment de signes contraires, le procédé réussirait encore infailliblement, pourvu que l'on prît l'abscisse de départ OP moindre que la racine cherchée OR ; mais alors cette racine OR serait la limite supérieure des grandeurs croissantes OP, OP′, OP″, OP‴, ......

Si l'on remarque présentement que $Fx$ est l'ordonnée, $F'x$ l'inclinaison de la tangente sur l'axe des $x$, et que $F''x$ ne peut changer de signe qu'à la rencontre d'un point d'inflexion, on pourra réduire tout ce qui précède au résumé que voici : Soit $r$ une des racines de la proposée dont on propose d'obtenir des valeurs de plus en plus approchées ; pour qu'en partant d'une première valeur approchée $p$, l'application de la méthode de Newton obtienne un plein succès, il suffit que, dans tout l'intervalle de $p$ à $r$, aucune des fonctions $Fx$, $F'x$ et $F''x$ ne change de signe, et que les deux premières, abstraction faite de leurs signes, soient constamment décroissantes ; pourvu toutefois que l'on prenne $p$ plus grand ou plus petit que $r$, suivant qu'entre ces mêmes limites $Fx$ et $F'x$ seront de même signe ou de signes contraires.

On voit par là qu'il n'est point toujours nécessaire, pour le succès de la méthode, que la valeur de départ $p$ soit très-peu différente de la racine $r$ dont on poursuit l'approximation. Tout ce qu'on peut gagner à prendre $p$ très-peu différent de $r$ c'est de diminuer les chances d'existence des sommets et des points d'inflexion entre ces deux limites; mais ces sommets et ces points d'inflexion peuvent fort bien exister entre ces mêmes limites, quelque rapprochées d'ailleurs qu'on les suppose.

Nous avons signalé simplement, comme *suffisante* et non comme *nécessaire*, la condition d'absence de tout sommet et de tout point d'inflexion entre les limites $p$ et $r$; et c'est qu'en effet le procédé pourrait fort bien réussir dans le cas même où il existerait des sommets et des points d'inflexion entre ces mêmes limites; mais alors le succès n'en serait pas certain et dépendrait de la grandeur du nombre $p$ de départ. C'est ce que montrent évidemment les figures 5 et 6, où il s'agit de la même courbe parabolique et conséquemment de la même équation à résoudre, et de plus de la même racine à chercher. Dans l'une et dans l'autre, il se trouve deux sommets et deux points d'inflexion entre les limites OP et OR; mais bien que, dans la figure 5, la valeur de départ soit moins rapprochée de la racine OR qu'elle ne l'est dans la figure 6, le procédé réussit très-bien dans la première de ces deux figures, tandis qu'il est en défaut dans la seconde où, comme l'on voit, les grandeurs OP, OP$'$, OP$''$, OP$'''$,..... ne sont pas constamment décroissantes.

Il est aisé de voir que, réciproquement, lorsque les valeurs de $p_1, p_2, p_3,$ ........, déduites de quelque valeur de $p$ que se puisse être, sont constamment convergentes vers une certaine limite, ou du moins deviennent convergentes, au-delà d'un certain terme, on peut être certain que la limite vers laquelle elles convergent est une des racines de l'équation $Fx=0$. On obtient donc ainsi, par le progrès du calcul, une suite de valeurs de cette racine de moins en moins différentes de la véritable; mais on peut désirer plus encore; on peut désirer de connaître, à chaque approximation nouvelle, la limite de l'erreur dont cette approximation est affectée; c'est là un complément que la méthode d'approximation de Newton réclame impérieusement, et qu'il est très-facile de lui procurer, comme on va le voir.

Tout étant d'ailleurs dans la figure 7, comme dans la figure 1; c'est-à-dire, OP étant une limite supérieure de la racine OR, et OP′, OP″, OP‴,...... des limites supérieures de plus en plus rapprochées de cette même racine, déduites les unes des autres, et de celle-là par le procédé indiqué plus haut; soit OQ une limite inférieure de cette même racine, tellement choisie qu'entre OP et OQ la courbe parabolique ne présente ni sommets ni points d'inflexion. Soit menée l'ordonnée QN, terminée à la courbe en N, et ensuite la parallèle NQ′ à la tangente MP′, se terminant en Q′ à l'axe des $x$; soit menée l'ordonnée Q′N′, terminée à la courbe en N′, et ensuite la parallèle N′Q″ à la tangente M′P″, se terminant en Q″ à l'axe des $x$; soit menée l'ordonnée Q″N″, terminée à la courbe en N″, et ensuite la parallèle N″Q‴ à la tangente M″P‴, et ainsi de suite; les longueurs OQ, OQ′, OQ″, OQ‴,......., constamment croissantes, auront évidemment la racine OR pour limite supérieure; cette racine se trouvera donc indistinctement comprise

$$\text{entre}\left\{\begin{array}{l}\text{OP et OQ},\\ \text{OP}' \text{ et OQ}',\\ \text{OP}'' \text{ et OQ}'',\\ \ldots\ldots\ldots,\end{array}\right.$$

de sorte que PQ, P′Q′, P″Q″,....... seront les limites des erreurs dont seront respectivement affectées soient les valeurs approchées continuellement décroissantes OP, OP′, OP″,......... soit les valeurs approchées continuellement croissantes OQ, OQ′, OQ″,.......

Rien n'est plus aisé que de traduire ce procédé graphique en analyse. Soient $q$, $q_1$, $q_2$, $q_3$,....... les valeurs OQ, OQ′, OQ″, OQ‴,........ nous aurons

$$QQ'=NQ\text{Tang}.QNQ'=NQ\text{Tang}.PMP' ;$$

c'est-à-dire,

$$QQ'=\frac{Fq}{F'p} ;$$

donc

$$q_1=OQ'=OQ+QQ'=q+\frac{Fq}{F'p} ;$$

donc, à cause de l'uniformité de la construction, on aura successivement

$$\left.\begin{array}{l} q+\dfrac{Fq}{F'p}=q_1 , \\ q_1+\dfrac{Fq_1}{F'p_1}=q_2 , \\ q_2+\dfrac{Fq_2}{F'p_2}=q_3 , \\ \ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right\} (6)$$

en comparant ces formules aux formules (5), on aura $p-q, p_1-q_1$, $p_2-q_2$, ....... pour les limites respectives dont seront affectées soit les valeurs approchées décroissantes $p, p_1, p_2, p_3$, ..... soit les valeurs approchées croissantes $q, q_1, q_2, q_3$, .......

Si la courbe était tournée (fig. 8) comme dans la figure 2, il n'y aurait rien à changer au procédé; il arriverait seulement que les ordonnées QN, Q'N', Q''N'', .......... seraient positives, au lieu d'être négatives; mais, comme les tangentes tabulaires des angles MP'P, M'P''P', M''P'''P'', ........ seraient négatives, au lieu d'être positives, cela ne changerait rien aux signes des fractions $\frac{Fq}{F'p}$,

$\frac{Fq_1}{F'p_1}$, $\frac{Fq_2}{F'p_2}$, ........; de manière que les formules (6) subsisteraient encore.

Si la courbe était tournée ( fig. 9 et 10 ) comme dans les figures 3 et 4, où $p$=OP est une limite inférieure à la racine $r$=OR; il faudrait alors prendre la valeur de départ $q$=OQ plus grande que cette même racine; et, en ayant égard aux signes, les formules (6) continueraient à avoir lieu.

Il y a du reste à dire, sur ce complément au procédé de Newton, tout ce que nous avons dit sur ce procédé lui-même; ainsi on en obtiendra toujours un plein succès toutes les fois que l'arc NR n'offrira ni sommets ni points d'inflexion, tandis que, dans le cas contraire, il pourra indifféremment réussir ou se trouver en défaut, suivant la grandeur des nombres de départ $p$ et $q$; c'est ce qu'on aperçoit clairement à l'inspection des figures 11 et 12; dans la première, le procédé obtient un plein succès, tandis que, dans la seconde, bien que la valeur de départ OQ soit plus voisine de la véritable OR que dans l'autre, les longueurs OQ, OQ', OQ'', ........ finissent par dépasser la longueur OR.

On voit donc, en résumé, que, toutes les fois que l'on saura que l'une des racines réelles $r$ d'une équation numérique proposée est comprise entre deux limites $p$ et $q$, plus ou moins rapprochées l'une de l'autre, mais telles que, dans toute l'étendue de l'arc de la courbe parabolique compris entre les ordonnées qui répondent à ces limites, cet arc ne présente ni sommets ni points d'inflexion (*), rien ne sera plus aisé que de resserrer indéfiniment ces limites, et d'obtenir ainsi une valeur de cette racine $r$ aussi approchée qu'on

(*) Nous comprenons ici, sous la dénomination commune des sommets, tous les points de la courbe dont la tangente est parallèle à l'axe des $x$, et dont quelques-uns peuvent être en même temps des points d'inflexion.

pourra le désirer ; c'est-à-dire, une valeur de laquelle on puisse affirmer que sa différence avec la véritable est moindre qu'un nombre donné, si petit d'ailleurs qu'on veuille le supposer. Si donc on avait de pareilles limites pour chacune des racines réelles d'une équation numérique proposée, on pourrait en conclure des valeurs aussi approchées qu'on le voudrait de ces mêmes racines.

On obtiendrait évidemment de telles limites pour chacune des racines réelles d'une équation numérique proposée, si l'on connaissait exactement la situation des sommets et celle des points d'inflexion de la courbe parabolique correspondante. Il est évident, en effet, que toute intersection de cette courbe avec l'axe des $x$ est toujours comprise soit entre la projection d'un sommet et celle d'un point d'inflexion, soit entre les projections de deux points d'inflexion sur le même axe. Réciproquement, si les ordonnées soit d'un sommet et d'un point d'inflexion, soit de deux points d'inflexion sont telles que l'arc de la courbe parabolique, compris entre elles, ne comprenne ni sommet ni point d'inflexion, et si ces deux ordonnées sont de signes contraires, leurs abscisses comprendront nécessairement entre elles une racine $r$ de l'équation, et n'en comprendront qu'une seule ; de sorte que ces abscisses pourront être prises pour les limites $p$ et $q$ de cette même racine $r$.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir ces limites $p$ et $q$, de connaître précisément les sommets et les points d'inflexion de la courbe parabolique ; et il suffit seulement de connaître deux points indéfiniment rapprochés entre lesquels chacun de ceux-là se trouve situé. Si, en effet, on sait que l'abscisse d'un point d'inflexion est comprise entre deux limites $p$ et $q>p$, et qu'on sache que l'abscisse du sommet consécutif est comprise entre $p'$ et $q'>p'$, $q'$ étant moindre que $p$ ; et si les ordonnées qui répondent à $p$ et $q'$ sont de signes contraires, on saura par là même qu'il existe une racine réelle de l'équation proposée et une seule entre $p$ et $q'$ ; mais il pourrait encore exister une racine réelle entre le point d'inflexion et le sommet, quand bien même les ordonnées répondant à $p$ et $q'$ seraient de même signe ; cette racine se trouverait alors soit entre $p$ et $q$, soit entre $p'$ et $q'$.

Ainsi la méthode d'approximation de Newton, même avec le complément que nous y avons introduit, ne saurait complètement dispenser du recours à l'équation aux quarrés des différences des racines.

Nous avons insinué, en commençant, que la méthode d'approximation de Newton pouvait tout aussi bien être appliquée aux équations qui renferment plusieurs inconnues qu'à celles qui n'en ont qu'une seule, et cela quelle que soit la nature algébrique ou transcendante des équations proposées. C'est là une chose bien connue des astronomes ; mais, comme il n'est fait aucune mention de cette extension de la méthode dans les traités élémentaires, nous en dirons deux mots, en terminant, en faveur des commençans.

Soient

$$\varphi(x,y)=\Phi=0\ , \qquad \psi(x,y)=\psi=0\ ,$$

deux équations de forme quelconque entre $x$ et $y$, desquelles on sache qu'on y satisfait, à peu près, en posant

$$x=a\ , \qquad y=b\ ;$$

en désignant respectivement par $\alpha$ et $\beta$ ce qu'il faut retrancher à $a$ et $b$ pour avoir exactement $x$ et $y$, on aura

$$x=a-\alpha\ , \qquad y=b-\beta\ ;$$

en substituant, et posant pour abréger,

$$\varphi(a,b)=M\ , \qquad \psi(a,b)=N\ ,$$

il viendra, suivant la série de Taylor,

$$0=M-\frac{dM}{da}\cdot\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2M}{da^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}-\ldots \qquad 0=N-\frac{dN}{da}\cdot\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2N}{da^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}-\ldots$$

$$-\frac{dM}{db}\cdot\frac{\beta}{1}+2\frac{d^2M}{da\,db}\cdot\frac{\alpha\beta}{1.2}-\ldots \qquad -\frac{dN}{db}\cdot\frac{\beta}{1}+2\frac{d^2N}{da\,db}\cdot\frac{\alpha\beta}{1.2}-\ldots$$

$$+\frac{d^2M}{db^2}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}-\ldots \qquad +\frac{d^2N}{db^2}\cdot\frac{\beta^2}{1.2}-\ldots$$

mais puisque, par l'hypothèse, $\alpha$ et $\beta$ sont de forts petits nombres, nous pourrons, sans beaucoup d'erreur, écrire simplement

$$\frac{dM}{da}\alpha+\frac{dM}{db}\beta=M\,, \qquad \frac{dN}{da}\alpha+\frac{dN}{db}\beta=N\,,$$

d'où nous conclurons

$$\alpha=\frac{M\frac{dN}{db}-N\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{da}\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\frac{dM}{db}}\,,$$

$$\beta=\frac{N\frac{dM}{db}-M\frac{dN}{da}}{\frac{dM}{da}\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\frac{dM}{db}}\,;$$

ces valeurs ne seront qu'approchées; mais il n'en résultera pas moins, pour $x$ et $y$, les valeurs

$$a-\frac{M\frac{dN}{db}-N\frac{dM}{da}}{\frac{dM}{da}\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\frac{dM}{db}}\,, \qquad b-\frac{N\frac{dM}{db}-M\frac{dN}{da}}{\frac{dM}{da}\frac{dN}{db}-\frac{dN}{da}\frac{dM}{db}}\,,$$

généralement plus approchées que ne l'étaient les premières $a$ et

$b$, et desquelles il sera facile d'en déduire de plus approchées encore. Il est aisé de voir par là ce qu'il y aurait à faire s'il s'agissait d'un plus grand nombre d'équations entre un égal nombre d'inconnues.