ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Questions résolues. Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 183 du XIX.me volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 183-184

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__183_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution d'un problème de géométrie énoncé à la pag. 183 *du XIX.me volume des* Annales;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier.

PROBLÈME. *Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre droit, inscrit à une sphère donnée, pour que sa surface ou son volume soit un* maximum ?

Solution. Si l'axe du cylindre était égal au diamètre de la sphère, sa surface, soit latérale, soit totale, ainsi que son volume, seraient évidemment nuls. Si, au contraire, son axe était nul, sa surface latérale et son volume seraient encore nuls, tandis que sa surface totale serait double de celle d'un grand cercle de la sphère.

On voit clairement par là que la surface latérale et le volume du cylindre sont susceptibles de maximum; mais rien ici ne nous montre qu'il en doive être de même de sa surface totale, ou du moins on ne voit pas, *à priori*, si cette surface totale maximum est autre que celle qui répond à une hauteur nulle, et l'application du calcul peut seule nous éclairer sur ce point.

Soient r le rayon de la sphère donnée et $2x$ la hauteur du cylindre cherché; le rayon de sa base sera $\sqrt{r^2-x^2}$; la circonférence de cette base sera donc $2\varpi\sqrt{r^2-x^2}$, et sa surface $\varpi(r^2-x^2)$. En conséquence, si nous représentons par S la surface latérale du cylindre, par Σ sa surface totale et par V son volume, nous aurons

$$S=4\varpi x\sqrt{r^2-x^2}\ ,$$

$$\Sigma=2\varpi(r^2-x^2)+4\varpi x\sqrt{r^2-x^2}\ ,$$

$$V=2\varpi x(r^2-x^2)\ .$$

De là on tire, par différentiation,

$$\frac{dS}{dx}=4\varpi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\ , \qquad \frac{d^2S}{dx}=4\varpi x.\frac{2x^2-3r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

$$\frac{d\Sigma}{dx}=4\varpi\left\{\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}-x\right\}, \qquad \frac{d^2\Sigma}{dx^2}=4\varpi\left\{\frac{x(r^2-6x^2)}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right\},$$

$$\frac{dV}{dx}=2\varpi(r^2-3x^2)\ ; \qquad \frac{d^2V}{dx^2}=-12\varpi x\ .$$

En égalant les différentielles premières à zéro, on obtient successivement

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}\ , \\[2ex] x=r\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{-11}}{10}}\ , \\[2ex] x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}\ , \end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{ll} S=2\varpi r^2\ , & \dfrac{d^2S}{dx^2}=-16\varpi\ , \\[2ex] \Sigma= & \dfrac{d^2\Sigma}{dx^2}= \\[2ex] V=4\varpi\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^3, & \dfrac{d^2V}{dx^2}=-4\varpi\left(1+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)\ . \end{array}\right.$$

Ainsi l'on voit, en résumé, 1.° qu'il n'y a proprement ni *maximum* ni *minimum* pour la surface totale, puisque, pour ce cas, la hauteur du cylindre est imaginaire ; 2.° que la hauteur du cylindre, dont la surface latérale est *maximum*, est égale au côté du quarré inscrit à un grand cercle de la sphère, et que cette surface latérale est alors double de celle d'un grand cercle ; 3.° enfin, que la hauteur du cylindre de plus grand volume qu'on puisse inscrire à une sphère donnée est les deux tiers du côté du triangle équilatéral inscrit à un grand cercle de la sphère, et que ce volume *maximum* est triple de celui de la sphère qui aurait cette même hauteur pour diamètre.