ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Analyse transcendante. Essai sur une méthode générale d'intégration

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 117-125

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__117_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Essai sur une méthode générale d'intégration ;

Par M. Le Barbier.

M. Wronski, dans quelqu'un de ses ouvrages, a traité de *rapsodiques* nos connaissances actuelles en mathématiques ; et, bien que cette qualification puisse paraître un peu sévère, il est peut-être vrai de dire qu'en ne la prenant que dans le sens le moins défavorable, le géomètre polonais pourrait bien n'avoir pas eu tout à fait tort. Nous possédons les matériaux d'un grand et bel édifice scientifique, ces matériaux sont admirables pour la plupart ; mais nous manquons d'une main suffisamment habile pour les réunir systématiquement et en former un ensemble tout à fait régulier.

Pour ne parler ici que du calcul intégral, combien n'existe-t-il pas de cas où nous en sommes réduits à attendre le succès de nos procédés d'intégration de certains artifices de calcul qui ne sauraient être réduits en préceptes, d'un hasard heureux, que le génie maîtrise quelquefois, mais seulement par une sorte d'instinct tout à fait incommunicable ; de telle sorte qu'on ne saurait jamais affirmer positivement de certaines formules qui, jusqu'ici, se sont montrées tout à fait réfractaires, qu'elles ne céderont pas un jour à des efforts mieux dirigés. Parmi celles d'ailleurs que nous savons intégrer, combien de méthodes diverses, que le calculateur ne doit jamais perdre un instant de vue, attendu que chacune d'elles est exclusivement applicable à certains cas spéciaux.

Dans un tel état de choses, il nous paraît qu'on ne saurait trop encourager les recherches qui ont pour but d'enrichir la haute analyse des procédés qui lui manquent encore, et qu'on doit accueillir avec quelque bienveillance toutes les tentatives dirigées vers ce but important. C'est à ce titre seulement que nous osons réclamer l'attention du lecteur en faveur de l'essai, bien imparfait encore, que nous allons mettre sous ses yeux.

Soit désignée par X une fonction de forme quelconque de la variable x et de tant de constantes qu'on voudra ; on pourra toujours, sans difficulté, en former les coefficiens différentiels successifs

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4}\,,\ \ldots\ldots\,;$$

et pour peu que ces nouvelles fonctions suivent une marche régulière, il sera aisé d'en déduire, par induction, la forme du coefficient différentiel général $\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m}$. Si, du reste, on conservait quelque doute sur la véritable forme de ce coefficient, il serait facile de confirmer ou de détruire l'induction qui y aurait conduit ; il ne s'agirait en effet, pour cela, que de former, sur son modèle, la fonction $\frac{\mathrm{d}^{m-1}X}{\mathrm{d}x^{m-1}}$, et de vérifier ensuite si, par la différenciation, elle conduit exactement à la forme qu'on avait attribuée à $\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m}$.

Supposons qu'il en soit ainsi ; alors $\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m}$ sera une certaine fonction déterminée de x et de m ; de sorte qu'on aura

$$\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m}=\varphi(x\,,m)\ ;$$

or, il est connu que

$$\frac{d^{-m}X}{dx^{-m}} \text{ est l'équivalent de } \int^m X dx^m \ ;$$

donc, par le simple changement du signe de m, on conclura de l'équation précédente

$$\int^m X dx^m = \varphi(x, -m) \ ;$$

et, en particulier, en posant $m=1$,

$$\int X dx = \varphi(x, -1) \ ;$$

Nous ne craignons pas de trop hasarder en donnant ce peu de lignes comme l'équivalent des préceptes, si nombreux et si variés, qui ont été donnés jusqu'ici pour l'intégration des fonctions différentielles d'une seule variable (*).

Pour prendre d'abord un exemple des plus simples, supposons qu'il soit question d'assigner la valeur de l'intégrale $\int x^r dx$. On aura ici

$$X = x^r, \quad \frac{dX}{dx} = rx^{r-1}, \quad = \frac{d^2X^r}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = r(r-1)(r-2)x^{r-3} \ .$$

Il n'en faudra pas davantage pour être conduit à penser qu'on doit avoir, en général,

$$\frac{d^mX}{dx^m} = r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-m+1)x^{r-m} \ ,$$

(*) Nous croyons avoir lu quelque part que le comte de Buquoy, chambellan de S. M. l'Empereur d'Autriche, a imaginé, il y a quelques années, un procédé d'intégration à peu près pareil à celui-ci. C'est encore au même procédé que revient la méthode donnée par M. Bouvier (*Annales*, tom. XV, pag. 41) pour l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre.

J. D. G.

on s'en assurera d'ailleurs en remarquant que, si l'on pose

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}X}{\mathrm{d}x^{m-1}}=r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-m+2)x^{r\ m+1},$$

on retombera, par différentiation, sur l'expression supposée.

On peut écrire, plus brièvement, suivant la notation des facultés numériques,

$$\frac{\mathrm{d}^m x^r}{\mathrm{d}x^m}=(r-m+1)^{m|1}x^{r-m};$$

d'où on conclura, en changeant le signe de m,

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=(r+m-1)^{-m|1}x^{r+m};$$

mais (*Annales*, tom. III, pag. 2)

$$(r+m-1)^{-m|1}=\frac{1}{(r+1)^{m|1}};$$

donc, on aura finalement

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=\frac{x^{r\ m}}{(r+1)^{m|1}};$$

ou, en développant,

$$\int^m x^r\mathrm{d}x^m=\frac{x^{r+m}}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots\ldots(r+m)}$$

et, en changeant le signe de r,

$$\int^m \frac{\mathrm{d}x^m}{x^r}=\frac{(-1)^m}{(r-1)(r-2)(r-3)\ldots\ldots(r-m)x^{r-m}}$$

donc, en particulier, en posant $m=1$,

$$\int x^r \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}\ , \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^r} = -\frac{1}{(r-1)x^{r-1}}\ ;$$

comme on le savait déjà.

Pour second exemple, soit l'intégrale $\int a^x \mathrm{d}x$; nous aurons en prenant les logarithmes népériens

$$X = a^x\ , \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = a^x \mathrm{Log}.a\ , \quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = a^x \mathrm{Log}.^2 a\ , \quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} = a^x \mathrm{Log}.^3 a\ ;$$

d'où il sera facile de conclure généralement

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = a^x.\mathrm{Log}^m x\ ;$$

puis en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur

$$\int^m a^x \mathrm{d}x^m = \frac{a^x}{\mathrm{Log}.^m a}\ ;$$

et, en particulier,

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\mathrm{Log}.a}\ ;$$

comme on le savait déjà.

Traitons encore les deux intégrales

$$\int \mathrm{d}x \mathrm{Sin}.x\ , \qquad \int \mathrm{d}x \mathrm{Cos}.x\ ;$$

Pour la première, nous aurons

$$X = \mathrm{Sin}.x\ , \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Cos}.x\ , \quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{Sin}.x\ , \quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} = -\mathrm{Cos}\,x\ ,$$

et, en général,

$$\frac{\mathrm{d}^m.X}{\mathrm{d}x^m} = \mathrm{Sin}.\left(x + m\frac{\varpi}{2}\right)$$

donc, en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur,

$$\int^m \mathrm{Sin}\, x.\mathrm{d}x = \mathrm{Sin}.\left(x - m\frac{\varpi}{2}\right).$$

Pour la seconde, nous aurons

$$X = \mathrm{Cos}.x, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{Sin}.x, \quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{Cos}.x, \quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} = +\mathrm{Sin}\,x,$$

et, en général,

$$\frac{\mathrm{d}^mX}{\mathrm{d}x^m} = \mathrm{Sin}.\left\{x + (m+1)\frac{\varpi}{2}\right\};$$

donc, en changeant le signe de m et remplaçant X par sa valeur,

$$\int^m \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x = \mathrm{Sin}.\left\{x - (m-1)\frac{\varpi}{2}\right\}.$$

En supposant, dans ces deux formules, $m=1$, elles deviennent

$$\int \mathrm{Sin}.x.\mathrm{d}x = -\mathrm{Cos}.x, \qquad \int \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x = +\mathrm{Sin}.x,$$

comme on le savait déjà.

Nous terminerons par un cas plus compliqué, en traitant les deux intégrales

$$\int a^x \mathrm{Sin}.x.\mathrm{d}x; \qquad \int a^x \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x:$$

On sait qu'en général, P et Q étant des fonctions de x, on a

$$\frac{\mathrm{d}^m.PQ}{\mathrm{d}x^m} = P\frac{\mathrm{d}^mQ}{\mathrm{d}x^m} + \frac{m}{1}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}^{m-1}Q}{\mathrm{d}x^{m-1}} + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^{m-2}Q}{\mathrm{d}x^{m-2}} + \ldots\ldots;$$

mais, en posant $Q=a^x$, on a, comme nous l'avons vu ci-dessus, quel que soit r,

$$\frac{d^r Q}{dx^r}=a^x\mathrm{Log.}^r a\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{d^m.Pa^x}{dx^m}=a^x\mathrm{Log.}^m a\left\{P+\frac{m}{1}\frac{1}{\mathrm{Log.}a}\frac{dP}{dx}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{Log.}^2 a}\frac{d^2P}{dx^2}+\ldots\ldots\right\};$$

mais si l'on pose successivement

$$P=\mathrm{Sin.}x\ ,\qquad P=\mathrm{Cos.}x\ ,$$

on aura, dans le premier cas,

$$\frac{dP}{dx}=\mathrm{Cos.}x\ ,\quad \frac{d^2P}{dx^2}=-\mathrm{Sin.}x\ ,\quad \frac{d^3P}{dx^3}=-\mathrm{Cos.}x\ ,\ \ldots\ldots\ ;$$

et, dans le second,

$$\frac{dP}{dx}=-\mathrm{Sin.}x\ ,\quad \frac{d^2P}{dx^2}=-\mathrm{Cos.}x\ ,\quad \frac{d^3P}{dx^3}=+\mathrm{Sin.}x\ ,\ \ldots\ldots\ ;$$

substituant donc, tour à tour, dans la formule ci-dessus, elle deviendra, dans le premier cas,

$$\frac{d^m.a^x\mathrm{Sin.}x}{dx^m}=a^x\mathrm{Log.}^m a\left(\mathrm{Sin.}x+\frac{m}{1}\frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}a}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^2 a}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^3 a}+\ldots\right);$$

et dans le second,

$$\frac{d^m.a^x\mathrm{Cos.}x}{dx^m}=a^x\mathrm{Log.}^m a\left(\mathrm{Cos.}x-\frac{m}{1}\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}a}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^2 a}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^3 a}+\ldots\right);$$

on aura donc en changeant le signe de m,

$$\int^m a^x\mathrm{Sin.}x.dx^m=\frac{a^x}{\mathrm{Log.}^m a}\left(\mathrm{Sin.}x-\frac{m}{1}\cdot\frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}a}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Log.}^2 a}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{\mathrm{Cos.}x}{\mathrm{Log.}^3 a}+\ldots\right),$$

$$\int^m a^x \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x^m = \frac{a^x}{\mathrm{Log}.^m a}\left(\mathrm{Cos}.x + \frac{m}{1}\frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Log}.a} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Log}.^2 a} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Log}.^3 a} + \ldots\right)$$

en faisant ensuite $m=1$, on conclura de là

$$\int a^x \mathrm{Sin}.x.\mathrm{d}x = a^x\left(\frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Log}.a} - \frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Log}.^2 a} - \frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Log}.^3 a} + \frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Log}.^4 a} + \frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Log}.^5 a} - \ldots\ldots\right),$$

$$\int a^x \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x = a^x\left(\frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Log}.a} + \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Log}.^2 a} - \frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Log}.^3 a} - \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Log}.^4 a} + \frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Log}.^5 a} + \ldots\ldots\right);$$

comme on le trouverait d'ailleurs en intégrant par partie.

Comme il s'agit toujours ici de logarithmes népériens, si l'on change a et e, il viendra simplement

$$\int e^x \mathrm{Sin}.x.\mathrm{d}x = e^x(\mathrm{Sin}.x - \mathrm{Cos}.x - \mathrm{Sin}.x + \mathrm{Cos}.x + \mathrm{Sin}.x - \mathrm{Cos}.x - \ldots),$$

$$\int e^x \mathrm{Cos}.x.\mathrm{d}x = e^x(\mathrm{Cos}.x + \mathrm{Sin}.x - \mathrm{Cos}.x - \mathrm{Sin}.x + \mathrm{Cos}.x + \mathrm{Sin}\,x - \ldots).$$

Pour savoir ce que valent ces séries, nous remarquerons que, suivant que le nombre des termes qu'on y admet est de l'une des formes $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, la première se réduit à

$$0,\quad +\mathrm{Sin}.x,\quad +\mathrm{Sin}.x - \mathrm{Cos}.x,\quad -\mathrm{Cos}.x,$$

et la seconde à

$$0,\quad +\mathrm{Cos}.x,\quad +\mathrm{Cos}.x + \mathrm{Sin}.x,\quad +\mathrm{Sin}.x;$$

prenant donc dans chacune le quart de la somme de ces quatre résultats, nous aurons

$$\int e^x \mathrm{Sin}.x.\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}e^x(\mathrm{Sin}.x - \mathrm{Cos}.x),\quad \int e^x \mathrm{Cos}.x.dx = \tfrac{1}{2}e^x(\mathrm{Sin}.x + \mathrm{Cos}.x);$$

ce que la différentiation confirme parfaitement.

Nous pourrons revenir encore, dans une autre occasion, sur ce procédé d'intégration ; nous nous bornerons à observer, pour le présent, que, comme on a,

$$\Sigma^m.fx = \Delta^{-m}.fx \ ,$$

il peut être tout aussi bien appliqué à l'intégration des formules aux différences qu'à celle des formules différentielles.