ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET
GERGONNE

Géométrie élémentaire. Démonstration de deux théorèmes de géométrie, desquels on peut déduire, comme cas particulier, le théorème de M. Hamett, mentionné aux pages 334 et 374 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 84-89
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__84_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de deux théorèmes de géométrie, desquels on peut déduire, comme cas particulier, le théorème de M. Hamett, mentionné aux pages 334 et 374 du précédent volume;

Par MM. Querret et Gergonne.

Théorème de M. Querret.

Si aux deux extrémités A, B de la base AB d'un triangle quelconque ACB (fig. 6), on élève respectivement à ses deux autres côtés CA, CB, vers son sommet, des perpendiculaires AP, BQ qui leur soient proportionnelles, et qu'on mène ensuite les droites AQ et BP; ces deux droites se couperont sur la perpendiculaire CC′ abaissée du sommet C du triangle sur la direction de sa base.

Démonstration. Soient faits

$$\frac{AC}{AP}=\frac{BC}{BQ}=m\ ,$$

et soient abaissées, des points P et Q, des perpendiculaires PM et QN sur la direction de AB. Les triangles rectangles AMP, BNQ, respectivement semblables aux triangles rectangles CC′A, CC′B donneront

$$PM=\frac{C'A}{m}\ ,\qquad QN=\frac{C'B}{m}\ ;$$

$$AM=\frac{CC'}{m}\ ,\qquad BN=\frac{CC'}{m}\ .$$

Cela posé, soient respectivement X et Y les points où la droite CC′ est coupée par les droites AQ et BP; les triangles rectangles ANQ, BMP, respectivement semblables aux triangles rectangles AC′X, BC′Y, donneront

$$AN:QN::AC':C'X=\frac{AC'\times QN}{AN}=\frac{AC'\times\frac{BC'}{m}}{AB+\frac{CC'}{m}}=\frac{AC'\times BC'}{m.AB+CC'}\ ,$$

---

de cause, et pour ne point priver ses contemporains d'un ouvrage recommandable à tant d'autres titres, qu'il s'est résigné à ranger au nombre des axiomes une proposition qu'il avait vainement tenté de démontrer.

J. D. G.

$$BM:PM::BC':C'Y=\frac{BC'\times PM}{BM}=\frac{BC'\times\frac{AC'}{m}}{AB+\frac{CC'}{m}}=\frac{AC'\times BC'}{m.AB+CC'};$$

donc $C'X=C'Y$, comme nous l'avions annoncé.

Si l'on suppose $m=1$ et le triangle rectangle en C, on retombe sur le théorème de M. Hamett, démontré dans le précédent volume, par MM. Gergonne et B. D. C.; mais ce qui précède fait voir que la propriété remarquée par M. Hamett n'est pas particulière au triangle rectangle, et qu'elle n'exige pas même que les figures construites sur deux de ses côtés soient des carrés, mais seulement des rectangles semblables et semblablement situés.

Si l'on suppose m négatif, on trouve

$$C'X=C'Y=-\frac{AC'\times BC'}{m.AB-CC'}.$$

Ce résultat répond au cas où les perpendiculaires, au lieu d'être menées du même côté de la base que le sommet C, seraient menées du côté opposé; alors les droites AQ et BP se couperaient sur le prolongement de CC' au-delà du point C', tant qu'on aurait $m.AB>CC'$; elles seraient parallèles, si l'on avait $m.AB=CC'$; enfin, leur point d'intersection repasserait de l'autre côté de AB, si l'on avait $m.AB<CC'$.

Si l'on suppose $m=0$, ce qui revient à supposer AP et BQ d'une longueur infinie, et conséquemment BP et AQ parallèles à ces deux droites, et comme telles respectivement perpendiculaires à CA et CB, la même propriété subsiste encore; ce qui démontre que *les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois au même point.* On a alors.

$$C'X=C'Y=\frac{AC'\times BC'}{CC'},$$

résultat auquel, au surplus, il serait facile de parvenir directement dans ce cas.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette dernière propriété convient également au triangle sphérique; et qu'en désignant par I le point d'intersection des trois arcs perpendiculaires (fig. 7) on a

$$Tang.C'I=\frac{Sin.AC'\times Sin.BC'}{Cos.AB\times Tang.CC'};$$

expression qui coïncide avec la précédente lorsque, le triangle sphérique ACB restant fini, le rayon de la sphère devient infini. Cette propriété du triangle sphérique peut être aussi bien simplement déduite de l'équation

$$Sin.AC'\times Sin.BA'\times Sin.CB'=Sin.AB'\times Sin.CA'\times Sin.BC',$$

qui a lieu entre les segmens formés sur les côtés, par les arcs de grands cercles menés d'un même point aux trois sommets (*Géométrie de position*, pag. 300, n.° 248).

On voit, par ce qui précède, que la perpendiculaire CC′ abaissée du sommet C d'un triangle (fig. 6) sur la direction de sa base est le lieu des intersections des droites AQ et BP qui interceptent sur les perpendiculaires AP et BQ aux deux autres côtés des parties respectivement proportionnelles aux longueurs de ces mêmes côtés (*).

(*) M. Querret, dans sa lettre d'envoi, observe avec raison, 1.° qu'à la page 350 du précédent volume, nous avons omis d'observer que les quatre équations dont il s'agit en cet endroit avaient été déjà résolues, d'une manière à peu près pareille, par M. Cauchy, dans le chapitre V de son *Cours d'analise*, page 103; 2.° que c'est par erreur que M. Bouvier a

Théorème de M. Gergonne.

Si, par les extrémités A, B de la base AB d'un triangle quelconque ACB (fig. 8), on mène vers son sommet des droites de longueur arbitraire AP et BQ, respectivement parallèles aux côtés CB et CA; que par les points P et Q on mène, parallèlement à BQ et AP, des droites concourant en D; les trois droites AQ, BP et DC concourront en un même point.

Démonstration. Nous démontrerons ce théorème à l'aide de la géométrie analitique, parce que c'est ainsi qu'après en avoir pressenti la vérité, nous nous le sommes démontré à nous-même, et parce qu'à tout prendre, cette forme de démonstration en vaut bien une autre.

Soient faits $CA=a$, $CB=b$, $AP=q$, $BQ=p$. Soit pris l'angle ACB pour angle des coordonnées positives, de manière que l'axe des x soit dirigé suivant CA, et l'axe des y suivant CB; les équations des divers points que nous venons de considérer seront

$$\text{Pour C}\left\{\begin{array}{l}x=0,\\ y=0;\end{array}\right.\ \text{Pour A}\left\{\begin{array}{l}x=a.\\ y=0;\end{array}\right.\ \text{Pour B}\left\{\begin{array}{l}x=0,\\ y=b;\end{array}\right.\ \text{Pour P}\left\{\begin{array}{l}x=\ \ a,\\ y=-q;\end{array}\right.\ \text{Pour Q}\left\{\begin{array}{l}x=-p,\\ y=\ \ b,\end{array}\right.\ \text{Pour D}\left\{\begin{array}{l}x=-p,\\ y=-q.\end{array}\right.$$

---

avancé à la page 147 du même volume, que personne avant lui n'avait découvert la loi de la série qui donne la longueur de la tangente en fonction de l'arc correspondant, attendu que ce sujet a été traité, avec tous les développemens désirables par M. Lacroix, dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2.e édition, tom. I, pages 254—257, n.os 90—93. Nous nous empressons de réparer ces omissions et ces erreurs, que nous eussions mieux fait de signaler en leur lieu, en mentionnant ici les remarques de M. Querret.

J. D. G.

Les équations des trois droites AQ, BP, CD seront conséquemment

Pour AQ, $(a+p)y+b(x-a)=0$,

Pour BP, $(b+q)x+a(y-b)=0$,

Pour CD, $py-qx=0$.

Or, en prenant la différence des deux premières, on tombe sur la troisième ; donc chacune de ces équations est comportée par les deux autres ; et par conséquent elles expriment trois droites concourant au même point.

Et comme, en variant à volonté les signes de p et q, il en irait encore de même, il en faut conclure que les droites AP et BQ peuvent être indistinctement menées de côté ou d'autre de la base du triangle, sans que le théorème cesse pour cela d'avoir lieu.

Pour passer de là au théorème de M. Hamett, il suffira de supposer, 1.° que le triangle est rectangle en C ; 2.° que l'on a pris les longueurs arbitraires $p=b$ et $q=a$.