ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Analise transcendante. Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre à deux variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 41-44
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__41_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre à deux variables ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

On se tromperait étrangement si l'on croyait avoir tout fait dans l'analise, lorsqu'on a trouvé une méthode propre à résoudre chacune des questions qui dépendent de ses procédés. Outre qu'en effet les divers chemins qui conduisent au même but peuvent fort bien n'être pas tous également aisés à parcourir ; il arrive souvent que, tandis que certaines méthodes sont exclusivement propres à l'objet particulier pour lequel elles ont été imaginées, d'autres, au contraire, semblent ouvrir devant elles une voie nouvelle, et être de nature à s'étendre à un grand nombre de recherches analogues.

Ces réflexions nous serviront d'excuse, si nous revenons ici un moment sur un sujet qui semble épuisé depuis long-temps, en indiquant, pour parvenir à l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre entre deux variables, un procédé tout-à-fait nouveau, et qui nous paraît susceptible d'être étendu au-delà de cette application particulière.

Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx}=P_1y+Q_1\,, \qquad (1)$$

dans laquelle P_1 et Q_1 sont supposés des fonctions quelconques de x sans y. En la différentiant, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=P_1\frac{dy}{dx}+\frac{dP_1}{dx}y+\frac{dQ_1}{dx}\;;$$

ou, en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur donnée par la proposée,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(P_1^2+\frac{dP_1}{dx}\right)y+\left(P_1Q_1+\frac{dQ_1}{dx}\right)\;;$$

de sorte qu'en posant

$$P_1^2+\frac{dP_1}{dx}=P_2\,, \qquad P_1Q_1+\frac{dQ_1}{dx}=Q_2\;;$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=P_2y+Q_2\,,$$

où P_2 et Q_2 seront encore, comme dans (1), des fonctions de x sans y.

Il est clair, d'après cela, que, si l'on pose,

$$P_2^2+\frac{dP_2}{dx}=P_3\,, \qquad P_2Q_2+\frac{dQ_2}{dx}=Q_3\,,$$

on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3}=P_3y+Q_3\,,$$

où P_3 et Q_3 seront toujours des fonctions de x sans y; de manière qu'en continuant ainsi, on aura, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n}=P_n y+Q_n\,, \qquad (2)$$

où P_n et Q_n seront encore des fonctions de x sans y, et n un nombre entier positif quelconque.

Si, dans cette dernière équation, on suppose $n=0$, elle deviendra

$$\frac{d^0 y}{dx^0} \quad \text{ou} \quad y=P_0 y+Q_0\,,$$

d'où

$$y=\frac{Q_0}{1-P_0}\,; \qquad (3)$$

d'où l'on voit que l'intégration de la proposée se réduit finalement à déterminer les deux fonctions P_0 et Q_0. Or, c'est là une chose très-facile, ainsi qu'on va le voir.

En différentiant l'équation (2), on a

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=P_n\frac{dy}{dx}+\frac{dP_n}{dx}y+\frac{dQ_n}{dx}\,;$$

ou, en mettant dans le second membre pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur donnée par l'équation (1),

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\left(P_1P_n+\frac{dP_n}{dx}\right)y+\left(Q_1P_n+\frac{dQ_n}{dx}\right).$$

Faisant, dans cette dernière, $n=0$, elle deviendra

$$\frac{dy}{dx}=\left(P_1P_0+\frac{dP_0}{dx}\right)y+\left(Q_1P_0+\frac{dQ_0}{dx}\right).$$

Celle-ci devant être identique avec l'équation (1), on aura

$$P_1 P_0 + \frac{dP_0}{dx} = P_1 , \qquad (4) \qquad Q_1 P_0 + \frac{dQ_0}{dx} = Q_1 . \qquad (5)$$

La première de ces équations donne

$$\frac{dP_0}{1-P_0} = P_1 dx ,$$

d'où en intégrant

$$\text{Log.}\,\frac{1-P_0}{C} = -\int P_1 dx ,$$

C étant la constante ; c'est-à-dire,

$$1-P_0 = Ce^{-\int P_1 dx} . \qquad (6)$$

On tire ensuite de l'autre

$$dQ_0 = Q_1(1-P_0)dx = CQ_1 dx.e^{-\int P_1 dx},$$

d'où, en intégrant,

$$Q_0 = C\int e.^{-\int P_1 dx} Q_1 dx ,$$

substituant enfin les valeurs de Q_0 et de $1-P_0$ dans la formule (3), on aura

$$y = \frac{\int e.^{-\int P_1 dx} Q_1 dx}{e^{-\int P_1 dx}} = e.^{\int P_1 dx} \int e.^{-\int P_1 dx} Q_1 dx ,$$

c'est la formule connue dans laquelle, comme l'on voit, il ne faut point ajouter de constante à l'intégrale $\int P_1 dx$, mais seulement à l'intégrale $\int e.^{-\int P_1 dx} Q_1 dx$.