ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

AMPÈRE

Analise transcendante. Analogie entre les facultés numériques et les puissances; démonstration génerale de la formule du binôme de Newton; développement des fonctions exponentielles et circulaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 369-387

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__369_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Analogie entre les facultés numériques et les puissances ; Démonstration génerale de la formule du Binôme de Newton ; Développement des fonctions exponentielles et circulaires ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences de Paris, professeur de physique au Collége de France, etc.

M. Kramp a donné le nom de *Factorielles* ou de *Facultés numériques* aux produits de la forme

$$x(x+p)(x+2p)(x+3p).....(x+\overline{n-1}.p)\ ,$$

qui, sous la dénomination de *Puissances du second ordre*, avaient été déjà l'objet des travaux de Vandermonde (*). Le nombre des facteurs est ce qu'on appelle le *degré de la faculté*, de sorte que

$$x\,,\ x(x+p)\,,\ x(x+p)(x+2p)\,,\ ....\ x(x+p)(x+2p)....(x+\overline{n-1}.p)\,,$$

sont dites les facultés du premier, du second, du troisième, ... du $n.^{me}$ degré. Nous indiquerons généralement la faculté du $n.^{me}$

(*) Voyez la page 1.re du III.e volume du présent recueil.
J. D. G.

degré par $[\overset{n}{x}]$; p étant une quantité prise à volonté, entière ou fractionnaire, positive ou négative.

Il suit de cette notation que

$$\left.\begin{array}{l}
[\overset{1}{x}]=x\ , \\[2mm]
[\overset{2}{x}]=[\overset{1}{x}](x+p)\ , \\[2mm]
[\overset{3}{x}]=[\overset{2}{x}](x+2p)\ , \\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2mm]
[\overset{m+1}{x}]=[\overset{m}{x}](x+mp)\ .
\end{array}\right\}\quad (1)$$

On peut énoncer ces facultés en disant : x faculté 1, x faculté 2, x faculté 3, ..., x faculté n, pour $[\overset{1}{x}]$, $[\overset{2}{x}]$, $[\overset{3}{x}]$, ... $[\overset{n}{x}]$.

Ces notations admises, il existe entre les facultés numériques et les puissances une analogie remarquable qui consiste en ce que *la faculté d'un degré quelconque d'un binôme s'obtient en substituant aux puissances des deux termes du binôme, dans le développement de la puissance du même degré de ce binôme, les facultés des mêmes degrés de ses deux termes* ; de telle sorte qu'en général

$$[\overset{m}{x+y}]=\left\{\begin{array}{l}
[\overset{m}{x}]+\frac{m}{1}[\overset{m-1}{x}][\overset{1}{y}]+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}[\overset{m-2}{x}][\overset{2}{y}]+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}[\overset{m-n+1}{x}][\overset{n-1}{y}] \\
+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}[\overset{m-n}{x}][\overset{n}{y}]+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}[\overset{2}{x}][\overset{m-2}{y}]+\frac{m}{1}[\overset{1}{x}][\overset{m-1}{y}]+[\overset{m}{y}]\ .
\end{array}\right\}\quad (2)$$

La proposition est d'abord évidente pour les facultés des premiers degrés. On a en effet (1)

$$[\overset{1}{x+y}]=x+y=[\overset{1}{x}]+[\overset{1}{y}]\ ,$$

$$[\overset{2}{x+y}]=(x+y)(x+y+p)=x(x+p)+2xy+y(y+p)=[\overset{2}{x}]+2[\overset{1}{x}][\overset{1}{y}]+[\overset{2}{y}]\ ;$$

de sorte que la démonstration de cette proposition se réduit à faire voir que, si elle a lieu pour la faculté du m.me degré, elle sera vraie aussi pour celle du $(m+1)$.me

Pour y parvenir, multiplions la quantité $x+y+mp$ par les deux membres de l'équation (2). Il est d'abord clair que le premier membre de l'équation-produit sera $\overset{m+1}{[x+y]}$. Pour exécuter la multiplication par le second membre de l'équation (2), considérons tour à tour le multiplicande $x+y+mp$ comme

$(x+mp)+y$, pour la multiplication par le 1.er terme,

$(x+\overline{m-1}\,p)+(y+p)$, pour la multiplication par le 2.e,

$(x+\overline{m-2}.p)+(y+2p)$, pour la muliplication par le 3.e,

. . . . ,

$(x+\overline{m-n+1}.p)+(y+\overline{n-1}.p)$, pour la multiplication par le n.me,

$(x+\overline{m-n}.p)+(y+n.q)$, pour la multiplication par le $(n+1)$me;

on trouvera d'abord, pour les premiers termes du résultat,

$$\overset{m+1}{[x+y]}=\overset{m+1}{[x]}+\overset{m}{[x]}\overset{1}{[y]}$$

$$+\frac{m}{1}\overset{m}{[x]}\overset{1}{[y]}+\frac{m}{1}\overset{m-1}{[x]}\overset{2}{[y]}$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\overset{m-1}{[x]}\overset{2}{[y]}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\overset{m-2}{[x]}\overset{3}{[y]}$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\overset{m-2}{[x]}\overset{3}{[y]}+\dots;$$

ce qui donne en effet, en opérant la réduction, entre les termes qui renferment les mêmes facultés,

$$\overset{m+1}{[x+y]}=\overset{m+1}{[x]}+\frac{m+1}{1}\overset{m}{[x]}\overset{1}{[y]}+\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\overset{m-1}{[x]}\overset{2}{[y]}+\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\overset{m-2}{[x]}\overset{3}{[y]}+\ldots$$

qui est bien ce que devient l'équation (2), lorsqu'on y change m en $m+1$.

Mais, afin qu'il n'y ait point d'induction dans tout ceci, remarquons que

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}\overset{m-n+1}{[x]}\overset{n-1}{[y]}\times(y+\overline{n-1}.p)=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+2}{n-1}\overset{m-n+1}{[x]}\overset{n}{[y]},$$

et que

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}\overset{m-n}{[x]}\overset{n}{[y]}\times(x+\overline{m-n}\,p)=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}\overset{m-n+1}{[x]}\overset{n}{[y]},$$

et que ces termes du second membre seront les seuls en $\overset{m-n+1}{[x]}\overset{n}{[y]}$; or, en les réduisant en un seul, il vient

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\cdots\frac{m-n+2}{n}\overset{m-n+1}{[x]}\overset{n}{[y]},$$

qui est bien ce que devient le $(n+1)$.me terme du second membre de l'équation (2), lorsqu'on y change m en $m+1$; il demeure donc établi que, si la proposition est vraie pour $\overset{m}{[x+y]}$, elle le sera également pour $\overset{m+1}{[x+y]}$; or, nous avons prouvé qu'elle était vraie pour $\overset{1}{[x+y]}$ et pour $\overset{2}{[x+y]}$; cette proposition est donc vraie, quel que soit le nombre entier positif m.

Adoptons $m!$, avec M. Kramp, comme le symbole du produit $1.2.3\ldots\ldots m$; en divisant, tour à tour, les deux membres du développement de $(x+y)^m$ et de $\overset{m}{[x+y]}$ par $m!$, il vient

$$\frac{(x+y)^m}{m!}=\frac{x^m}{m!}+\frac{y}{1}\cdot\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}+\ldots\ldots+\frac{y^n}{n!}\cdot\frac{x^{m-n}}{(m-n)!}+\ldots\ldots+\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{y}{1}+\frac{y^m}{m!}\,.\quad(3)$$

$$\frac{\overset{m}{[x+y]}}{m!}=\frac{\overset{m}{[x]}}{m!}+\frac{\overset{1}{[y]}}{1}\cdot\frac{\overset{m-1}{[\,x\,]}}{(m-1)!}+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[y]}}{n!}\cdot\frac{\overset{m-n}{[\,x\,]}}{(m-n)!}+\ldots\ldots+\frac{\overset{m-1}{[\,y\,]}}{(m-1)!}\cdot\frac{\overset{1}{[x]}}{1}+\frac{\overset{m}{[y]}}{m!}.\quad(4)$$

A l'aide de ces résultats, on peut démontrer commodément un théorème très-fecond en belles conséquences; lequel consiste en ce que, si l'on a

$$\left.\begin{aligned}
f(t)&=1+\frac{t}{1}z+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}z^2+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}\cdot\frac{t+2p}{3}z^3+\frac{t}{1}\cdot\frac{t+p}{2}\cdot\frac{t+2p}{3}\cdot\frac{t+3p}{4}z^4+\ldots\ldots\\
f(u)&=1+\frac{u}{1}z+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}z^2+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}\cdot\frac{u+2p}{3}z^3+\frac{u}{1}\cdot\frac{u+p}{2}\cdot\frac{u+2p}{3}\cdot\frac{u+3p}{4}z^4+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

on aura

$$f(t).f(u)=f(t+u).\ (*)\qquad(6)$$

Les équations (5) peuvent. en effet, être écrites ainsi

$$\left.\begin{aligned}
f(t)&=1+\frac{\overset{1}{[t]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t]}}{3!}z^3+\frac{\overset{4}{[t]}}{4!}z^4+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[t]}}{n!}z^n+\ldots\ldots,\\
f(u)&=1+\frac{\overset{1}{[u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[u]}}{3!}z^3+\frac{\overset{4}{[u]}}{4!}z^4+\ldots\ldots+\frac{\overset{n}{[u]}}{n!}z^n+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

(*) C'est le théorème de M. de Stainville, démontré à la page 229 du IX.e volume du présent recueil, généralisé à la pag. 270 du XIII.e vol., et reproduit postérieurement comme sien, avec les mêmes notations, par M. le professeur J. Wallace, de Colombie (*Americ. Journ. of. sciences*, fev. 1824, p. 278).

J. D. G.

En les multipliant alors membre à membre, il viendra

$$
\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u)=1+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\\[2ex]+\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\end{array}\right|\, z+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\,\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex]+\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\end{array}\right|\, z^2+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{3}{[t]}}{3!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\,\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex]+\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1}\,\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{3}{[u]}}{3!}\end{array}\right|\, z^3+\dots\dots+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overset{n}{[t]}}{n!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{n-1}{[\ t\ ]}}{(n-1)!}\cdot\dfrac{\overset{1}{[u]}}{1}\\[2ex]+\dfrac{\overset{n-2}{[\ t\ ]}}{(n-2)!}\cdot\dfrac{\overset{2}{[u]}}{2!}\\[2ex]+\dots\dots\dots\\[2ex]+\dfrac{\overset{2}{[t]}}{2!}\cdot\dfrac{\overset{n-2}{[\ u\ ]}}{(n-2)!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{1}{[t]}}{1!}\cdot\dfrac{\overset{n-1}{[\ u\ ]}}{(n-1)!}\\[2ex]+\dfrac{\overset{n}{[u]}}{n!}\end{array}\right|\,\begin{array}{l}z^n+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\\[2ex]+\dots\dots\end{array}
$$

développement qui, à l'aide de la formule (4), peut être écrit ainsi

$$
\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u)=1+\frac{\overset{1}{[t+u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t+u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t+u]}}{3!}z^3+\dots\dots+\frac{\overset{n}{[t+u]}}{n!}z^n+\dots\dots;
$$

mais si, dans la première des formules (7) on change t en $t+u$, elle deviendra

$$
\mathrm{f}(t+u)=1+\frac{\overset{1}{[t+u]}}{1}z+\frac{\overset{2}{[t+u]}}{2!}z^2+\frac{\overset{3}{[t+u]}}{3}z^3+\dots\dots+\frac{\overset{n}{[t+u]}}{n!}z^n+\dots\dots;
$$

donc, en effet,

$$\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u)=\mathrm{f}(t+u)\,, \qquad (6)$$

comme nous l'avions annoncé.

Si, dans cette dernière formule, on change u en $u+v$, on aura

$$\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u+v)=\mathrm{f}(t+u+v)\;;$$

mais, en vertu de la même formule, on peut, dans le premier membre, remplacer $\mathrm{f}(u+v)$ par $\mathrm{f}(u).\mathrm{f}(v)$; donc

$$\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u).\mathrm{f}(v)=\mathrm{f}(t+u+v)\,.$$

On peut de même, dans celle-ci, changer v en $v+x$, en remplaçant ensuite, dans le premier membre, $\mathrm{f}(v+x)$ par $\mathrm{f}(v).\mathrm{f}(x)$; puis dans l'équation résultante, changer x en $x+y$ et ensuite $\mathrm{f}(x+y)$ en $\mathrm{f}(x).\mathrm{f}(y)$ et ainsi de suite, de sorte qu'on a généralement

$$\mathrm{f}(t).\mathrm{f}(u).\mathrm{f}(v).\mathrm{f}(x)\ldots\ldots=\mathrm{f}(t+u+v+x+\ldots\ldots) \qquad (8)$$

Si l'on suppose les quantités t, u, v, x, ... toutes égales entre elles et à x, et leur nombre égal à n, cette équation deviendra

$$\{\mathrm{f}(x)\}^n=\mathrm{f}(nx)\,. \qquad (9)$$

Or, comme ici x est quelconque, on peut changer x en $\frac{x}{n}$ ce qui changera nx en x et donnera en substituant, extrayant la racine et renversant

$$\sqrt[n]{\mathrm{f}(x)}=\mathrm{f}\left(\frac{x}{n}\right)\,. \qquad (10)$$

En changeant, dans cette dernière équation, x en mx, elle devient

$$\sqrt[n]{\mathrm{f}(mx)}=\mathrm{f}\left(\frac{m}{n}x\right);$$

mais, en supposant m un nombre entier positif, on a (9)

$$\mathrm{f}(mx)=\{\mathrm{f}(x)\}^m,$$

donc finalement

$$\sqrt[n]{\{\mathrm{f}(x)\}^m} \quad \text{ou} \quad \{\mathrm{f}(x)\}^{\frac{m}{n}}=\mathrm{f}\left(\frac{m}{n}x\right): \qquad (11)$$

Voilà donc la formule (9), qui n'étoit d'abord démontrée que pour un exposant entier positif, qui se trouve l'être présentement pour un exposant fractionnaire positif, et par suite pour un exposant positif quelconque.

Si, dans l'équation (6), on fait $u=-t=-x$, elle deviendra

$$\mathrm{f}(x).\mathrm{f}(-x)=\mathrm{f}(x-x)=\mathrm{f}(0);$$

or il est aisé de voir (5) que $\mathrm{f}(0)=1$; donc

$$\mathrm{f}(-x)=\frac{1}{\mathrm{f}(x)}. \qquad (12)$$

Si ensuite nous changeons x en mx, nous aurons, en renversant,

$$\frac{1}{\mathrm{f}(mx)}=\mathrm{f}(-mx);$$

mais nous venons de prouver que, quelque nombre positif, entier ou fractionnaire ou même incommensurable qu'on prenne pour x, on a toujours

$$\mathrm{f}(mx)=\{\mathrm{f}(x)\}^m,$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{\{f(x)\}^m} \quad \text{ou} \quad \{f(x)\}^{-m}=f(-mx). \qquad (13)$$

Ainsi la formule (9), qui n'était démontrée que pour une valeur positive de l'exposant, se trouve l'être présentement pour une valeur réelle quelconque de cet exposant.

Au moyen de ces résultats, la formule du binôme de Newton se trouve démontrée pour toute valeur réelle de l'exposant. On a, en effet, par ce qui précède, quelque valeur réelle qu'on attribue à m,

$$\{f(x)\}^m=f(mx) ;$$

c'est-à-dire (5)

$$\left\{1+\frac{x}{1}z+\frac{x}{1}\cdot\frac{x+p}{2}z^2+\frac{x}{1}\cdot\frac{x+p}{2}\cdot\frac{x+2p}{3}z^3+\ldots\ldots\right\}^m$$

$$=1+\frac{mx}{1}z+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}z^2+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}\cdot\frac{mx+2p}{3}z^3+\ldots\ldots+\frac{mx}{1}\cdot\frac{mx+p}{2}\cdots\frac{mx+(n-1)p}{n}z^n+\ldots \quad (14)$$

Faisant dans cette équation $x=1$ et $p=-1$, elle deviendra

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}z^3+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-n+1}{n}z^n+\ldots$$

Changeant ensuite z en $\frac{a}{x}$, et multipliant les deux membres par x^m, on obtiendra, quel que soit le nombre réel m

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n}+\ldots \quad (15)$$

Cette formule peut au surplus, pour le cas de l'exposant entier négatif, être déduite *à priori* de la théorie des combinaisons par un raisonnement fort analogue à celui que l'on emploie pour le cas de l'exposant entier positif; et nous nous arrêterons d'autant plus volontiers à le faire voir, que cela nous donnera, chemin faisant, l'interprétation des coefficiens qui affectent alors les termes du développement, et la solution d'une question très-intéressante dans l'analise : celle du nombre des termes d'un polynôme homogène de degré quelconque, formé d'un nombre de lettres également quelconque.

Employons, avec Vandermonde, par abréviation, les symboles (A^α), $(A^\alpha B^\beta)$, $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$, ... comme les équivalens respectifs des polynômes homogènes symétriques

$$a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha+d^\alpha+e^\alpha+f^\alpha+g^\alpha+\dots\dots,$$

$$a^\alpha b^\beta+a^\beta b^\alpha+a^\alpha c^\beta+a^\beta c^\alpha+b^\alpha c^\beta+b^\beta c^\alpha+\dots\dots,$$

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma+a^\alpha b^\gamma c^\beta+a^\beta b^\alpha c^\gamma+a^\beta d^\gamma c^\alpha+a^\gamma b^\alpha c^\beta+\dots\dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

nous trouverons alors, en exécutant la multiplication,

$$\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{(1+a+a^2+a^3+\dots)(1+b+b^2+b^3+\dots)(1+c+c^2+c^3+\dots)\dots} \\
=1+(A) & +(A^2) & +(A^3) & +(A^4) & +(A^5) & +\dots \\
 & +(AB) & +(A^2B) & +(A^3B) & +(A^4B) & +\dots \\
 & & +(ABC) & +(A^2B^2) & +(A^3B^2) & +\dots \\
 & & & +(A^2BC) & +(A^3BC) & +\dots \\
 & & & +(ABCD) & +(A^2B^2C) & +\dots \\
 & & & & +(A^2BCD) & +\dots \\
 & & & & +(ABCDE) & +\dots
\end{array}$$

Si donc nous représentons généralement par S_n la somme des termes du n.me degré de ce développement, nous aurons

$$(1+a+a^2+a^3+\ldots)(1+b+b^2+b^3+\ldots)(1+c+c^2+c^3+\ldots)\ldots$$
$$=1+S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots\ldots+S_n+\ldots\ldots \quad (16)$$

Supposons présentement que toutes les lettres a, b, c, ... deviennent égales entre elles et à z, que les facteurs du premier membre sont au nombre de m, et représentons généralement par P_n le nombre des produits de n facteurs que l'on peut faire avec m sortes de facteurs donnés, en admettant dans chaque produit la répétition d'une même sorte de facteur autant de fois qu'on voudra; on aura ainsi

$$S_1=P_1z\ ,\quad S_2=P_2z^2\ ,\quad S_3=P_3z^3\ ,\ldots\ldots S_n=P_nz^n\ ,\ldots$$

et en conséquence l'équation (16) deviendra

$$(1+z+z^2+z^3+\ldots)^m \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{1-z}\right)^m \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(1-z)^m} \quad \text{ou enfin}$$

$$(1-z)^{-m}=1+P_1z^1+P_2z^2+P_3z^3+\ldots\ldots+P_nz^n+\ldots\ldots\ ; \quad (17)$$

voyons quelles sont les valeurs de P_1, P_2, P_3 .... P_n, ... en fonction de m; et pour cela cherchons d'abord comment P_n peut se déduire de P_{n-1}.

Distinguons dans S_n les termes qui contiennent un ou plusieurs facteurs égaux à a et ceux qui sont indépendans de cette lettre. Si dans ceux de la première sorte on supprime un facteur a, on obtiendra évidemment S_{n-1}; de sorte que l'ensemble de ces termes revient à aS_{n-1}, et que conséquemment leur nombre est P_{n-1}.

Si, dans ces mêmes termes affectés de a, on met tour à tour à la place de a ou de ses puissances, les mêmes puissances de chacune des $m-1$ autres lettres, on formera un nombre de termes du $n.^{me}$ degré, indépendans de a égal à $(m-1)P_{m-1}$. Or, il est aisé de voir que, par un tel procédé, chacun des termes indépendans de a aura été formé n fois. Considérons en effet un quelconque $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ des termes de cette dernière sorte, où l'on doit avoir $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=n$, on l'aura formé, tour à tour, par le changement

$$\text{de } a \text{ en } b, \text{ dans les } \beta \text{ produits} \left\{\begin{array}{l} a^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\beta-1} bc^\gamma d^\delta \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ab^{\beta-1} c^\gamma d^\delta \ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$\text{de } a \text{ en } c, \text{ dans les } \gamma \text{ produits} \left\{\begin{array}{l} a^\gamma b^\beta d^\delta \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\gamma-1} cb^\beta d^\delta \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ac^{\gamma-1} b^\beta d^\delta \ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$\text{de } a \text{ en } d, \text{ dans les } \delta \text{ produits} \left\{\begin{array}{l} a^\delta b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a^{\delta-1} db^\beta c^\gamma \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ ad^{\delta-1} b^\beta c^\gamma \ldots\ldots; \end{array}\right.$$

et ainsi de suite. Le produit $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ sera donc répété $\beta+\gamma+\delta+\ldots$ fois ou n fois, et il en sera de même de chacun des autres produits indépendans de a. Donc, puisque le nombre total des produits indépendans de a que nous avons formés est $(m-1)P_{n-1}$, et que chacun d'eux se trouve répété n fois, il en résulte que le nombre des produits réellement différens de n facteurs qui ne renferment pas a est seulement $\frac{m-1}{n}P_{n-1}$; en y ajoutant donc le nombre P_{n-1} des produits de n facteurs qui renferment cette lettre, nous aurons, pour le nombre total P_n des différens produits de n facteurs, $P_{n-1}+\frac{m-1}{n}P_{n-1}$ ou $\frac{m+n-1}{n}P_{n-1}$; c'est-à-dire, que nous aurons

$$P_n=\frac{m+n-1}{n}P_{n-1}. \qquad (18)$$

Observant donc que $P_1=m=\frac{m}{1}$, et faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., il viendra

$$P_1=\frac{m}{1},$$

$$P_2=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2},$$

$$P_3=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{n};$$

au moyen de quoi l'équation (17) deviendra

$$(1-z)^{-m}=1+\frac{m}{1}z+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}z^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}z^3+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdots\frac{m+n-1}{n}z^n+\ldots$$

ou en changeant z en $-\frac{a}{x}$, et multipliant ensuite les deux membres par x^{-m}.

$$(x+a)^{-m}=x^{-m}\left(1-\frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{a^n}{x^n}+\ldots\ldots\right). \qquad (19)$$

Ainsi, tandis que les coefficiens des termes du développement de $(x+a)^m$ sont les nombres de produits différens d'un, de deux, de trois, ... de n facteurs que l'on peut faire avec m sortes de facteurs, *en excluant* l'admission de plusieurs facteurs d'une même sorte dans un même produit, les coefficiens des termes du développement de $(x+a)^{-m}$ sont, au contraire, les nombres de produits différens d'un, de deux, de trois, ... de n facteur que l'on peut faire avec m sortes de facteurs *en admettant* la répétition indéfinie de chaque sorte de facteurs dans chacun de ces produits.

Soit une équation complète du n.me degré, entre m inconnues, si l'on introduit dans chacun de ses termes une puissance d'une $(m+1)$me inconnue, telle que tous ses termes se trouvent être alors du n.me degré; il est clair qu'alors ces termes seront, abstraction faite des coefficiens, les différens produits de n facteurs qu'on peut faire avec $m+1$ sorte de facteurs, en admettant la répétition indéfinie de chaque sorte de facteurs dans un même produit; d'où il suit que le nombre des termes d'une équation complète du n.me degré entre m inconnue, n'est autre chose que ce que devient la valeur de P_n, lorsqu'on y change m en $m+1$, c'est-à-dire,

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n},$$

ou, en multipliant haut et bas par $1.2.3\ldots\ldots m$,

$$\frac{(m+n)!}{m!n!},$$

résultat dont la symétrie prouve qu'*il y a autant de termes dans une équation complète du* m.^{me} *degré entre* n *inconnues qu'il y en a dans une équation complète du* n.^{me} *degré entre* m *inconnues* (*).

Passons au développement des fonctions exponentielles et logarithmiques. Si, dans l'équation (14) qui a lieu, quels que soient m, p, x, z, on fait $x=1$, $p=0$, $z=1$ et $m=At$, elle devient

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\right)^{At}=1+\frac{At}{1}+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\ldots;$$

ou en représentant par e la série du premier membre,

$$e^{At} \text{ pos ou } \quad (e^A)^t=1+\frac{At}{1}+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^4t^4}{4!}+\ldots\ldots$$

Posant $e^A=a$, auquel cas A sera le logarithme Néperien de e, on aura

$$a^t=1+\frac{t\mathrm{l}a}{1}+\frac{t^2\mathrm{l}^2a}{2!}+\frac{t^3\mathrm{l}^3a}{3!}+\frac{t^4\mathrm{l}^4a}{4!}+\ldots\ldots \qquad (20)$$

puis, en changeant a en e

$$e^t=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\ldots\ldots \qquad (21)$$

qui aura lieu quel que soit t.

En changeant, dans la formule (20), a en $1+x$, elle devient

(*) On peut aussi consulter, sur ce sujet, la page 282 du XIII.^{e} volume du présent recueil.

J. D. G.

$$(1+x)^t=1+\frac{t\mathrm{l}(1+x)}{1}+\frac{t^2\mathrm{l}^2(1+x)}{2!}+\frac{t^3\mathrm{l}^3(1+x)}{3!}+\ldots\ldots$$

mais on a aussi (15)

$$(1+x)^t=1+\frac{t}{1}x+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}x^2+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}x^3+\ldots$$

donc en égalant ces valeurs, supprimant l'unité de part et d'autre, et divisant ensuite par t,

$$\mathrm{l}(1+x)+t\left\{\frac{\mathrm{l}^2(1+x)}{2!}+\frac{t\mathrm{l}^3(1+x)}{3!}+\frac{t^2\mathrm{l}^4(1+x)}{4!}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=x+\frac{t-1}{2}x^2+\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}x^3+\frac{t-1}{2}\cdot\frac{t-2}{3}\cdot\frac{t-3}{4}x^4+\ldots$$

d'où en faisant $t=0$

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots \quad (22)$$

tel est donc le développement du logarithme Néperien de $1+x$.

Terminons par le développement des fonctions circulaires (*). Si, dans l'équation (21), on fait $t=\pm x\sqrt{-1}$, elle deviendra

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\pm\sqrt{-1}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right) \quad (23)$$

de sorte qu'en posant

(*) M. Ampère acquitte ici l'engagement qu'avait pris M. de Stainville, à la page 240 du IX.e volume du présent recueil.

J. D. G.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots,\\ \psi(x)&=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}e^{+x\sqrt{-1}}&=\varphi(x)+\sqrt{-1}.\psi(x)\ ,\\ e^{-x\sqrt{-1}}&=\varphi(x)-\sqrt{-1}.\psi(x)\ ;\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

d'où, en multipliant,

$$1=\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2\ ;\qquad(26)$$

de sorte que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont, pour chaque valeur de x, les sinus et cosinus d'un certain angle. Cherchons à le déterminer.

En posant $x=1$, dans les équations (24), elles donnent

$$\varphi(1)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\ldots,$$

$$\psi(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots\ldots;$$

ce qui donne, en faisant aussi $x=1$, dans l'équation (23),

$$e^{\pm\sqrt{-1}}=\varphi(1)\pm\sqrt{-1}.\psi(1)\ ,$$

d'où

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\varphi(x)\pm\sqrt{-1}\psi(x)=\{\varphi(1)\pm\sqrt{-1}\psi(1)\}^x\ ;\qquad(27)$$

et, comme on a (26)

$$\{\varphi(1)\}^2+\{\psi(1)\}^2=1\ ,$$

il est permis de considérer $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ comme les sinus et cosinus d'un certain angle constant α, et de poser, conséquemment

$$\text{Cos.}\alpha=\varphi(1)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots..$$

$$\text{Sin.}\alpha=\psi(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots...$$

l'équation (27) deviendra alors

$$\varphi(x)\pm\sqrt{-1}\,\psi(x)=\{\text{Cos.}\alpha\pm\sqrt{-1}\text{Sin}\,\alpha\}^{x},$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$\varphi(x)\pm\sqrt{-1}.\psi(x)=\text{Cos.}\alpha x\pm\sqrt{-1}\text{Sin.}\alpha x,$$

ce qui donne évidemment

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\text{Cos.}\alpha x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots,\\ \psi(x)&=\text{Sin.}\alpha x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots;\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

il reste donc à déterminer l'angle constant α.

On a, comme l'on sait, en prenant x suffisamment petit,

$$\alpha x\left\{\begin{aligned}&>\text{Sin.}\alpha x,\\ &<\text{Tang.}\alpha x=\frac{\text{Sin}\,\alpha x}{\text{Cos.}\alpha x};\end{aligned}\right.$$

donc on a

$$\frac{\text{Sin.}\alpha x}{\alpha x}\left\{\begin{aligned}&<1,\\ &>\text{Cos.}\alpha x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots;\end{aligned}\right.$$

ou, en mettant pour Sin. αx sa valeur $\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\dots$,

$$\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\dots\right)\left\{\begin{aligned}&<1,\\ &>1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\dots\end{aligned}\right.$$

En supposant x décroissant indéfiniment, la première inégalité tendra sans cesse à devenir $\frac{1}{\alpha}<1$ ou $\alpha>1$, tandis que l'autre, au contraire, tendra sans cesse à devenir $\frac{1}{\alpha}>1$ ou $\alpha<1$; ces deux inégalités ne sauraient donc subsister à la fois qu'autant qu'on aura $\alpha=1$; on a donc simplement (28)

$$\mathrm{Cos}.x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots ,$$

$$\mathrm{Sin}.x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$