ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Géométrie analytique. Recherches analitiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches, renfermant la solution de plusieurs questions proposées dans le présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 309-344

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__309_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherches analitiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches, renfermant la solution de plusieurs questions proposées dans le présent recueil;

Par M. CH. STURM.

DANS l'essai que l'on va lire, nous avons beaucoup moins en vue de découvrir des propriétés nouvelles des polygones plans ou gauches, que de montrer comment on peut, par une application convenable de l'analise, déduire, d'une manière uniforme, toutes les propriétés de ces polygones d'un petit nombre d'équations fondamentales. Ces propriétés sont en très-grand nombre sans doute, ou, pour mieux dire, leur nombre est illimité, et c'est assez faire comprendre que nous ne saurions nous proposer ici de les démontrer toutes ; mais un petit nombre d'exemples bien choisis suffira pour montrer comment on doit se conduire dans les cas très-nombreux que le dessein d'abréger nous aura forcé d'omettre. La résolution générale des polygones plans, c'est-à-dire, l'art d'assigner les diverses parties inconnues de ces polygones en fonction des données nécessaires pour les déterminer devrait naturellement faire partie de notre travail ; mais M. le professeur Lhuilier préparant dans ce moment un ouvrage où ce sujet doit être traité dans le plus grand détail, nous croyons superflu de nous y arrêter.

§. I.

Soit, dans l'espace, un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de n côtés, dont nous nommerons les côtés consécutifs r_1, r_2, r_3, ... r_n. Concevons un système d'axes rectangulaires auquel ce polygone soit rapporté, et soient α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; ...... α_n, β_n, γ_n les angles que forment respectivement ces côtés avec les axes des coordonnées. Soient enfin (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), ... (x_n, y_n, z_n), les sommets des angles (r_n, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), ... (r_{n-1}, r_n).

Par les principes connus, nous aurons cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{lll}
x_2=x_1+r_1\text{Cos.}\alpha_1\,, & y_2=y_1+r_1\text{Cos.}\beta_1\,, & z_2=z_1+r_1\text{Cos.}\gamma_1\,, \\
x_3=x_2+r_2\text{Cos.}\alpha_2\,, & y_3=y_2+r_2\text{Cos.}\beta_2\,, & z_3=z_2+r_2\text{Cos.}\gamma_2\,, \\
x_4=x_3+r_3\text{Cos.}\alpha_3\,, & y_4=y_3+r_3\text{Cos.}\beta_3\,, & z_4=z_3+r_3\text{Cos.}\gamma_3\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\
x_1=x_n+r_n\text{Cos.}\alpha_n\,; & y_1=y_n+r_n\text{Cos.}\beta_n\,; & z_1=z_n+r_n\text{Cos.}\gamma_n\,;
\end{array}\right\}\quad(1)$$

En prenant successivement les sommes d'équations de chacune des colonnes, on aura, sur-le-champ, par l'effet des réductions, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
r_1\text{Cos.}\alpha_1+r_2\text{Cos.}\alpha_2+r_3\text{Cos.}\alpha_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\alpha_n=0\,, \\
r_1\text{Cos.}\beta_1+r_2\text{Cos.}\beta_2+r_3\text{Cos.}\beta_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\beta_n=0\,, \\
r_1\text{Cos.}\gamma_1+r_2\text{Cos.}\gamma_2+r_3\text{Cos.}\gamma_3+\ldots\ldots+r_n\text{Cos.}\gamma_n=0\,;
\end{array}\right\}\quad(2)$$

dont chacune exprime ce théorème connu : *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, la somme des produits respectifs des côtés par les cosinus tabulaires des angles que forment leurs* *directions avec celle d'une droite indéfinie quelconque est égale à zéro* ; ou, en d'autres termes, *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, la somme des projections des côtés sur une même droite indéfinie quelconque est égale à zéro.*

§. II.

Avant d'aller plus loin, nous tirerons des équations (2) quelques conséquences relatives à la statique.

Et d'abord : *Si des forces respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, et proportionnelles aux longueurs de ces côtés, sont appliquées à un même point de l'espace, elles se feront équilibres.* En effet, si plusieurs forces proportionnelles aux longueurs r_1, r_2, r_3, ... r_n, et dont les directions sont déterminées par les angles α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 ; α_3, β_3, γ_3 ; ...... α_n, β_n, γ_n, sont appliquées à un même point de l'espace, les conditions connues de leur équilibre ne seront autres que les équations (2).

Il résulte de ce théorème que, des forces d'intensité et de directions quelconques étant appliquées à un même point de l'espace, si l'on décrit, dans l'espace, un polygone ouvert dont les côtés soient respectivement parallèles et proportionnels à ces forces, la droite qui fermera le polygone sera parallèle et proportionnelle à leur résultante.

Et, comme les mêmes forces appliquées à un même point ne sauraient avoir qu'une seule et même résultante, dans quelque ordre d'ailleurs qu'on les combine, il faut en conclure que, si deux polygones ouverts ont un même nombre de côtés égaux et parallèles chacun à chacun ; dans quelque ordre d'ailleurs que se succèdent ces côtés, dans les deux polygones, les droites qui les formeront seront égales et parallèles.

On voit, par ce qui précède, que la plupart des théorèmes que nous démontrerons, sur les polygones rectilignes, pourront s'appliquer immédiatement à la composition et à la décomposition des forces autour d'un même point.

Par des points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n), pris à volonté dans l'espace, en nombre égal à celui des sommets du polygone, soient menées des droites respectivement parallèles et proportionnelles à ses côtés $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$. Soient (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2), ... (a'_n, b'_n, c'_n) les extrémités de ces droites; en représentant par λ le rapport donné, on aura

$$a'_1=a_1+\lambda r_1\,\mathrm{Cos}.\alpha_1\,,\quad b'_1=b_1+\lambda r_1\,\mathrm{Cos}.\beta_1\,,\quad c'_1=c_1+\lambda r_1\,\mathrm{Cos}.\gamma_1\,,$$

$$a'_2=a_2+\lambda r_2\,\mathrm{Cos}.\alpha_2\,,\quad b'_2=b_2+\lambda r_2\,\mathrm{Cos}\,\beta_2\,,\quad c'_2=c_2+\lambda r_2\,\mathrm{Cos}.\gamma_2\,,$$

$$a'_3=a_3+\lambda r_3\,\mathrm{Cos}.\alpha_3\,,\quad b'_3=b_3+\lambda r_3\,\mathrm{Cos}.\beta_3\,,\quad c'_3=c_3+\lambda r_3\,\mathrm{Cos}.\gamma_3\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'_n=a_n+\lambda r_n\,\mathrm{Cos}.\alpha_n\,;\quad b'_n=b_n+\lambda r_n\,\mathrm{Cos}\,\beta_n\,;\quad c'_n=c_n+\lambda r_n\,\mathrm{Cos}.\gamma_n\,;$$

d'où, en ajoutant les équations d'une même colonne et ayant égard aux équations (2),

$$a'_1+a'_2+a'_3+\ldots\ldots+a'_n=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n\,,$$

$$b'_1+b'_2+b'_3+\ldots\ldots+b'_n=b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n\,,$$

$$c'_1+c'_2+c'_3+\ldots\ldots+c'_n=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_n\,.$$

Ces équations signifient que le centre commun de gravité des points (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2), ... (a'_n, b'_n, c'_n) coïncide avec celui des points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n).

Donc, *Si, par des points pris à volonté, dans l'espace, on mène des droites respectivement parallèles et proportionnelles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche; le centre de gravité d'un système de poids égaux sera le même,* *soit que ces poids se trouvent situés aux points où ces droites se terminent ou qu'on les place à leurs points de départ.*

En supposant que les points de départ sont pris respectivement sur les directions des côtés du polygone, on conclura de là que, *Si des poids égaux, placés d'abord arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, parcourent simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs respectivement proportionnelles à celles de ces mêmes côtés ; leur centre commun de gravité demeurera immobile* (*).

Si l'on suppose, au contraire, que toutes ces droites émanent d'un même point quelconque de l'espace ; comme ce point sera à lui-même son centre de gravité, on conclura de la même proposition générale que, *Si, par un point quelconque de l'espace, on conduit des droites parallèles et proportionnelles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, ce point sera le centre commun de gravité d'un système de masses égales placées aux extrémités de ces droites.*

Cette dernière proposition, combinée avec la première du présent §., donne la suivante : *Un point autour duquel des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace se font équilibre est le centre commun de gravité de masses égales placées aux extrémités des droites qui, partant de ce point, représentent ces forces en intensité et en direction.*

Et comme, lorsque des forces ne se font pas équilibre autour d'un point, il suffit, pour établir l'équilibre dans le système, d'y introduire une force égale et directement opposée à leur résultante,

---

(*) C'est là l'un des deux théorèmes de statique énoncés à la page 391 du XIV.e volume des *Annales*, et déjà démontré à la page 129 du présent volume.

J. D. G.

il en faut conclure que, *Lorsque des forces agissent dans des directions quelconques sur un même point de l'espace*, 1.° *le centre des moyennes distances des extrémités des droites qui représentent ces forces en intensité et en direction est un point de la direction de leur résultante*; 2.° *cette résultante est représentée en intensité par autant de fois la distance de ce centre au point d'application des forces qu'il y a de composantes dans le système* (*).

Maintenant, par les mêmes points (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ... (a_n, b_n, c_n), menons encore des droites respectivement parallèles aux côtés du polygone, mais d'une même longueur quelconque k; en désignant leurs extrémités respectives par (a''_1, b''_1, c''_1), (a''_2, b''_2, c''_2), ... (a''_n, b''_n, c''_n), nous aurons

$$a''_1=a_1+k\mathrm{Cos}\,\alpha_1\,,\quad b''_1=b_1+k\mathrm{Cos}\,\beta_1\,,\quad c''_1=c_1+k\mathrm{Cos}.\gamma_1\,,$$

$$a''_2=a_2+k\mathrm{Cos}.\alpha_2\,,\quad b''_2=b_2+k\mathrm{Cos}.\beta_2\,,\quad c''_2=c_2+k\mathrm{Cos}\,\gamma_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\,,\quad \ldots\ldots\ldots\,,\quad \ldots\ldots\ldots\,,$$

$$a''_n=a_n+k\mathrm{Cos}.\alpha_n\,;\quad b''_n=b_n+k\mathrm{Cos}.\beta_n\,;\quad c''_n=c_n+k\mathrm{Cos}\,\gamma_n\,.$$

Prenant successivement la somme des produits respectifs des équations de chaque colonne par r_1, r_2, ... r_n, en ayant égard aux équations (2), il viendra

---

(*) C'est le théorème énoncé à la page 272 du présent volume. M. Gerono remarque qu'il en résulte que, si plusieurs systèmes de forces, concourant en divers points de l'espace, sont composés de forces représentées en intensité et en direction par les distances de ces points à un certain nombre de points fixes, les résultantes de ces systèmes se croiseront toutes au centre des moyennes distances de ces derniers points.

Si l'on suppose ensuite que ces points de concours des composantes sont infiniment éloignés, on retombe sur le théorème relatif au *centre des forces parallèles*, du moins pour le cas où ces forces sont égales.

J. D. G.

$$a''_1r_1+a''_2r_2+a''_3r_3+\ldots+a''_nr_n=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+\ldots+a_nr_n\,,$$

$$b''_1r_1+b''_2r_2+b''_3r_3+\ldots+b''_nr_n=b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3+\ldots+b_nr_n\,,$$

$$c''_1r_1+c''_2r_2+c''_3r_3+\ldots+c''_nr_n=c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3+\ldots+c_nr_n\,;$$

d'où on conclut ce théorème : *Si, par des points pris à volonté dans l'espace, on mène des droites d'une même longueur quelconque, respectivement parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, le centre de gravité d'un système de poids respectivement parallèle aux longueurs de ces côtés sera le même, soit que ces poids soient situés aux points où ces droites se terminent, ou qu'on les place à leurs points de départ.*

En supposant que les points de départ soient pris respectivement sur les directions des côtés du polygone, on conclura de là que, *Si des poids respectivement proportionnels aux longueurs des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, et placés arbitrairement sur les directions de ces côtés, y parcourent simultanément et dans le même sens des longueurs égales quelconques, leur centre commun de gravité demeurera immobile* (*).

Si l'on suppose, au contraire, que toutes ces droites émanent d'un même point quelconque de l'espace, comme ce point sera à lui-même son centre de gravité, on conclura de la même proposition générale que, *Si, dans une sphère, on mène des rayons parallèles aux côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, et qu'on place aux extrémités de ces rayons des poids respectivement proportionnels aux longueurs des côtés auxquels ils*

(*) C'est l'autre théorème de statique de l'endroit déjà cité.
J. D. G.

sont parallèles ; leur centre commun de gravité coïncidera avec le centre de la sphère.

§. III.

Si le polygone proposé se réduit à un triangle, les équations (2) se réduisent aux suivantes :

$$r_1\mathrm{Cos}.\alpha_1+r_2\mathrm{Cos}.\alpha_2+r_3\mathrm{Cos}.\alpha_3=0\ ,$$

$$r_1\mathrm{Cos}.\beta_1+r_2\mathrm{Cos}.\beta_2+r_3\mathrm{Cos}.\beta_3=0\ ,$$

$$r_1\mathrm{Cos}.\gamma_1+r_2\mathrm{Cos}.\gamma_2+r_3\mathrm{Cos}.\gamma_3=0\ .$$

Transposant les derniers termes dans les seconds membres, prenant ensuite la somme des quarrés des équations résultantes, en se rappelant les relations connues

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha_1+\mathrm{Cos}.^2\beta_1+\mathrm{Cos}.^2\gamma_1=1\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha_2+\mathrm{Cos}.^2\beta_2+\mathrm{Cos}.^2\gamma_2=1\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.^2\alpha_3+\mathrm{Cos}.^2\beta_3+\mathrm{Cos}.^2\gamma_3=1\ ,$$

on obtient

$$r^2_3=r^2_1+r^2_2+2r_1r_2(\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}\,\alpha_2+\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\beta_2+\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\gamma_2)\ .$$

Mais, en supposant, pour un moment, que la droite r_1 est parallèle à l'axe des x, l'angle α_1 sera nul, et les angles β_1 et γ_1 seront droits, de sorte qu'on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha_1=1\ ,\quad \mathrm{Cos}.\beta_1=0\ ,\quad \mathrm{Cos}.\gamma_1=0\ .$$

Quant à l'angle α_2, ce sera alors l'angle (r_1, r_2) lui-même ; de sorte que l'on aura

$$r^2_3 = r^2_1 + r^2_2 + 2r_1r_2\,\text{Cos.}(r_1, r_2)\ ;$$

comparant cette dernière avec celle de laquelle elle est dérivée, on obtient la formule bien connue

$$\text{Cos.}(r_1\ ,\ r_2) = \text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\alpha_2 + \text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\beta_2 + \text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\gamma_2\ ;$$

de laquelle on déduit ensuite aisément

$$\text{Sin.}^2(r_1, r_2) = \left\{\begin{array}{l} (\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\beta_2 - \text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\alpha_2)^2 \\ +(\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\gamma_2 - \text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\beta_2)^2 \\ +(\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos}\,\alpha_2 - \text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\gamma_2)^2 \end{array}\right\}.$$

L'équation

$$r^2_3 = r^2_1 + r^2_2 + 2r_1r_2\,\text{Cos.}(r_1\ ,\ r_2)$$

exprime aussi une proposition fondamentale de la trigonométrie rectiligne ; mais nous verrons bientôt qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale.

Retournons présentement aux équations (2). En prenant la somme de leurs produits respectifs, d'abord par $\text{Cos.}\alpha_1$, $\text{Cos.}\beta_1$, $\text{Cos.}\gamma_1$, puis par $\text{Cos.}\alpha_2$, $\text{Cos}\,\beta_2$, $\text{Cos}\,\gamma_2$, et ainsi de suite, et enfin par $\text{Cos.}\alpha_n$, $\text{Cos.}\beta_n$, $\text{Cos.}\gamma_n$, observant que

$$\text{Cos.}^2\alpha_1 + \text{Cos.}^2\beta_1 + \text{Cos.}^2\gamma_1 = 1\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\alpha_2 + \text{Cos.}^2\beta_2 + \text{Cos.}^2\gamma_2 = 1\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

et que

$$\mathrm{Cos}.\alpha_1\,\mathrm{Cos}.\alpha_2+\mathrm{Cos}.\beta_1\,\mathrm{Cos}.\beta_2+\mathrm{Cos}.\gamma_1\,\mathrm{Cos}.\gamma_2=\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_2)\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.\alpha_1\,\mathrm{Cos}.\alpha_3+\mathrm{Cos}.\beta_1\,\mathrm{Cos}.\beta_3+\mathrm{Cos}.\gamma_1\,\mathrm{Cos}.\gamma_3=\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_3)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l}
r_1+r_2\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_2)+r_3\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_3)+\ldots\ldots+r_n\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_n)=0\ ,\\
r_1\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_2)+r_2+r_3\mathrm{Cos}.(r_2\,,r_3)+\ldots\ldots+r_n\mathrm{Cos}.(r_2\,,r_n)=0\ ,\\
r_1\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_3)+r_2\mathrm{Cos}.(r_2\,,r_3)+r_3+\ldots\ldots+r_n\mathrm{Cos}.(r_3\,,r_n)=0\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_1\mathrm{Cos}.(r_1\,,r_n)+r_2\mathrm{Cos}.(r_2\,,r_n)+r_3\mathrm{Cos}.(r_3\,,r_n)+\ldots+r_n=0\ .
\end{array}\right\}(3)$$

On parviendrait également à ces équations, en supposant successivement, dans les équations (2), que chacune des droites r_1, r_2, r_3,.... r_n devient, à son tour, parallèle à l'axe des x. Elles se traduisent dans l'énoncé que voici : *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, chaque côté est égal à la somme des produits de tous les autres par les cosinus des angles que forment leurs directions avec la sienne.*

Si l'on prend la somme des quarrés des équations (2), il vient, en faisant les réductions convenables,

$$r^2_1+r^2_2+r^2_3+..+r^2_n+2r_1r_2\mathrm{Cos}.(r_1,r_2)+2r_1r_3\mathrm{Cos}.(r_1,r_3)+2r_2r_3\mathrm{Cos}.(r_2,r_3)+..=0\ (4)$$

c'est-à-dire, *La somme des quarrés des côtés d'un polygone rectiligne quelconque, plan ou gauche, augmentée des doubles produits de ces côtés deux à deux, multipliés par les cosinus des angles que forment entre elles leurs directions, est égale à zéro.*

Si l'on prend de nouveau la somme des quarrés des équations

(2), mais après avoir préalablement transporté leurs premiers termes dans le second membre, il viendra, par l'effet de semblables réductions,

$$r_1^2=r_2^2+r_3^2+\ldots+r_n^2+2r_2r_3\,\mathrm{Cos.}(r_2,r_3)+2r_2r_4\,\mathrm{Cos.}(r_2,r_4)+2r_3r_4\,\mathrm{Cos.}(r_3,r_4)+\ldots=0\;(s)$$

donc, *Dans tout polygone rectiligne fermé, plan ou gauche, le quarré de l'un quelconque des côtés est égal à la somme des quarrés de tous les autres augmentée de la somme des doubles produits de ces derniers deux à deux multipliés par les cosinus des angles que forment entre elles leurs directions.* Ce théorème fait en même temps connaître l'intensité de la résultante de plusieurs forces données d'intensité et de direction autour d'un même point de l'espace.

Si, au lieu de transposer seulement les premiers termes des équations (2), on y transpose un même nombre quelconque de termes correspondans, et qu'on prenne ensuite la somme des quarrés des équations résultantes, en y faisant toujours les mêmes réductions, on obtiendra cette autre proposition : *La somme des quarrés d'un certain nombre de côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, augmentée des doubles produits de ces côtés deux à deux multipliés par les cosinus des angles qu'ils comprennent entre eux, est égale à la somme des quarrés des côtés restans augmentée des produits de ces derniers deux à deux multipliés par les cosinus des angles qu'ils comprennent entre eux.*

Si l'on désigne par Π le périmètre du polygone, on aura

$$\Pi=r_1+r_2+r_3+\ldots\ldots\ldots+r_n\;,$$

d'où, en quarrant,

$$\Pi^2=r_1^2+r_2^2+r_3^2+\ldots\ldots+r_n^2+2r_1r_2+2r_1r_3+2r_2r_3+\ldots\ldots\;;$$

mais nous avons trouvé plus haut

$$0=r_1^2+r_2^2+r_3^2+\ldots+r_n^2+2r_1r_2\,\mathrm{Cos.}(r_1,r_2)+2r_1r_3\,\mathrm{Cos.}(r_1,r_3)+2r_2r_3\,\mathrm{Cos.}(r_2,r_3)+\ldots;$$

retranchant cette dernière de la précédente, nous aurons, en nous rappelant qu'en général $1-\text{Cos.}x=2\text{Sin.}^2\frac{1}{2}x$,

$$\Pi^2=4\{r_1r_2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_1,r_2)+r_1r_3\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_1,r_3)+r_2r_3\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(r_2,r_3)+\ldots\}.$$

Ainsi, *Le quarré du demi-périmètre d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, est égal à la somme des produits de ses côtés deux à deux multipliés par les quarrés des sinus des moitiés des angles que comprennent entre elles leurs directions.*

§. IV.

Posons généralement, pour abréger,

$$x^m{}_1+x^m{}_2+x^m{}_3+\ \ldots\ldots\ +x^m{}_n=\text{X}_m\,,$$

$$y^m{}_1+y^m{}_2+y^m{}_3+\ \ldots\ldots\ +y^m{}_n=\text{Y}_m\,,$$

$$z^m{}_1+z^m{}_2+z^m{}_3+\ \ldots\ldots\ +z^m{}_n=\text{Z}_m\,.$$

Le quarré de la distance entre deux sommets quelconques est

$$(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2+(z_p-z_q)^2\ ;$$

ou, en développant,

$$(x^2{}_p+y^2{}_p+z^2{}_p)-2(x_px_q+y_py_q+z_pz_q)+(x^2{}_q+y^2{}_q+z^2{}_q)\ .$$

Si l'on veut avoir la somme des quarrés des distances du sommet $(x_p\,,y_p\,,z_p)$ à tous les autres, il faudra prendre la somme des résultats qu'on obtient en mettant dans cette formule pour q tous les nombres naturels de 1 à n inclusivement. Il ne sera pas même nécessaire d'en excepter le nombre p puisque la distance d'un sommet à lui-même est nulle. On obtiendra ainsi, pour la somme de ces quarrés, à l'aide des notations ci-dessus,

$$n(x_p^2+y_p^2+z_p^2)-2(X_1x_p+Y_1y_p+Z_1z_p)+(X_2+Y_2+Z_2)\ .$$

Si présentement on veut avoir la somme des quarrés de toutes les droites, soit côtés, soit diagonales, qui joignent les sommets deux à deux, lesquelles sont au nombre de $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$, il ne s'agira que de prendre la demi-somme des résultats qu'on déduit de cette dernière formule en y mettant successivement pour p tous les nombres naturels de 1 à n inclusivement. Nous disons la demi-somme, parce que menant, tour à tour, des droites de chaque sommet à tous les autres, chaque droite se trouve menée deux fois. On aura ainsi, pour la somme des quarrés de toutes ces droites,

$$n(X_2+Y_2+Z_2)-(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)\ .$$

Cherchons ensuite la somme des quarrés des longueurs des droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés que des diagonales. Nous venons déjà de remarquer que le nombre tant des côtés que des diagonales était $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$, et leurs milieux sont en même nombre. Si donc on représente respectivement par X'_1, Y'_1, Z'_1 les sommes des premières puissances des coordonnées de ces milieux parallèles à chaque axe, et par X'_2, Y'_2, Z'_2 les sommes des quarrés de ces mêmes coordonnées; en posant $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=n'$, on aura, pour la somme des quarrés des droites dont il s'agit, d'après la précédente formule,

$$n'(X'_2+Y'_2+Z'_2)-(X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1)\ ;$$

Cela posé, 1.° comme la coordonnée parallèle aux x du milieu de la droite qui joint deux sommets quelconques est $\frac{x_p+x_q}{2}$, nous aurons

$$X'_1=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\ .$$

$$+\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_2+x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-2}+x_n}{2}$$

$$+\frac{x_1+x_4}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_3+x_n}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x_1+x_n}{2}\ .$$

Ces termes sont au nombre de $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$; et, comme il entre deux de nos n sortes de lettres dans chacun, il s'ensuit qu'ils se composent de $n(n-1)$ lettres; et comme il est d'ailleurs manifeste que chacune des n sortes de lettres y figure de la même manière, il s'ensuit que chaque sorte de lettre y figure $n-1$ fois; de sorte qu'on doit avoir

$$X'_1=\frac{(n-1)(x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n)}{2}=\frac{n-1}{2}\cdot X_1\ ;$$

et par conséquent

$$X'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot X_1^2\ .$$

On aura semblablement

$$Y'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot Y^2_1\ ,\qquad Z'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}\cdot Z^2_1\ ;$$

et, par suite,

$$X'^2_1+Y'^2_1+Z'^2_1=\frac{(n-1)^2}{4}(X^2_1+Y^2_1+Z^2_1).$$

2.° On aura, par les mêmes considérations,

$$\begin{aligned}X'_2=&\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{x_{n-2}+x_n}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{x_1+x_4}{2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{x_3+x_n}{2}\right)^2\\&+\ldots\ldots\\&+\left(\frac{x_1+x_n}{2}\right)^2\end{aligned}$$

En faisant, pour un moment, abstraction des doubles produits qui naîtront du développement des quarrés, nous nous trouverons dans le même cas que ci-dessus avec cette seule différence que les quarrés des coordonnées x_1, x_2, ... x_n se trouveront substitués à leurs premières puissances, et que le dénominateur commun sera 4; de sorte qu'il y a d'abord, dans le développement de X'_2,

$$\frac{n-1}{4}(x^2_1+x^2_2+x^2_3+\ldots\ldots+x^2_n)=\frac{n-1}{4}X_2.$$

Mais il s'y trouve de plus

$$\frac{x_1x_2}{2}+\frac{x_2x_3}{2}+\frac{x_3x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-1}x_n}{2};$$

$$+\frac{x_1x_3}{2}+\frac{x_2x_4}{2}+\ldots\ldots+\frac{x_{n-2}x_n}{2}$$

$$+\frac{x_1x_4}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_3x_n}{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x_1x_i}{2}$$

c'est tout simplement la demi-somme des produits deux à deux des coordonnées x_1, x_2, x_3, ... x_n. Or, on a

$$X^2_1=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2=(x^2_1+x^2_2x^2_3+\ldots+x^2_n)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots);$$

c'est-à-dire,

$$X^2_1=X_2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots\ldots);$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots\ldots\ldots)=\frac{X_1{}^2-X_2}{4};$$

ajoutant donc cette quantité à celle que nous avons déjà obtenue ci-dessus, nous aurons

$$X'_2=\frac{n-1}{4}X_2+\frac{X_1{}^2-X_2}{4},$$

ou, en réduisant,

$$X'_2=\frac{X_1{}^2}{4}+\frac{n-2}{4}X_2.$$

On aura semblablement

$$Y'_2 = \frac{Y_1^2}{4} + \frac{n-2}{4} Y_2 , \qquad Z'_2 = \frac{Z_1^2}{4} + \frac{n-2}{4} Z_2 ,$$

et par suite

$$X'_2 + Y'_2 + Z'_2 = \frac{X^2_1 + Y^2_1 + Z^2_1}{4} + \frac{n-2}{4} (X_2 + Y_2 + Z_2) :$$

Nous avons trouvé tout à l'heure pour la somme des quarrés des droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés que des diagonales

$$n'(X'_2 + Y'_2 + Z'_2) - (X'^2_1 + Y'^2_1 + Z'^2_1) ;$$

mais nous venons de trouver

$$X'_2 + Y'_2 + Z'_2 = \tfrac{1}{4}\{(n-2)(X_2 + Y_2 + Z_2) + (X^2_1 + Y^2_1 + Z^2_1)\} ,$$

$$X'^2_1 + Y'^2_1 + Z'^2_1 = \tfrac{1}{4}(n-1)^2 (X^2_1 + Y^2_1 + Z^2_1) ,$$

nous avons d'ailleurs $n' = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$; en substituant donc, nous trouverons pour cette somme de quarrés

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \{n(X_2 + Y_2 + Z_2) - (X^2_1 + Y^2_1 + Z^2_1)\} ;$$

mais nous avons trouvé ci-dessus, pour la somme des quarrés tant des côtés que des diagonales,

$$n(X_2 + Y_2 + Z_2) - (X^2_1 + Y^2_1 + Z^2_1) ;$$

donc, en désignant par S_1 cette dernière somme et par S_2 l'autre, nous aurons

$$4S_2=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}S_1\ .$$

Or, si l'on considère que, dans le présent §., les sommets ne se trouvent assujettis à aucun ordre de succession déterminé, on verra que l'équation que nous venons d'obtenir revient au théorème suivant : *Des points, en nombre quelconque, étant situés d'une manière quelconque dans l'espace, si l'on joint ces points deux à deux par des droites, de toutes les manières possibles, puis les milieux de ces droites deux à deux par d'autres droites, de toutes les manières possibles, le quadruple de la somme des quarrés de ces dernières droites sera égal à autant de fois la somme des quarrés des premières qu'un nombre de choses inférieur d'une unité à celui des points dont il s'agit peut donner de combinaisons deux à deux* (*).

§. V.

Présentement, soit éliminé le côté r_1 entre les équations (2), prises deux à deux, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}
r_2(\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\gamma_2-\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\beta_2)+r_3(\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\gamma_3-\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\beta_3)+\ldots=0\,,\\
r_2(\mathrm{Cos}.\gamma_1\mathrm{Cos}.\alpha_2-\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}\,\gamma_2)+r_3(\mathrm{Cos}.\gamma_1\,\mathrm{Cos}.\alpha_3-\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}.\gamma_3)+\ldots=0\,,\\
r_2(\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}.\beta_2-\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\alpha_2)+r_3(\mathrm{Cos}.\alpha_1\mathrm{Cos}.\,\beta_3-\mathrm{Cos}.\beta_1\mathrm{Cos}.\,\alpha_3)+\ldots=0\,.
\end{array}\right\}(6)$$

(*) C'est le théorème de la page 272 du présent volume. M. Gerono, en nous l'adressant, en a pris occasion de relever une méprise de Carnot qui, dans sa *Géométrie de position*, page 331, a énoncé ce théorème, sous le n.° XXXI, d'une manière défectueuse.

J. D. G.

Afin d'évaluer la quantité $\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\gamma_2 - \text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\beta_2$ et ses analogues, soient menées, par un point quelconque de l'espace, des parallèles aux côtés r_1, r_2, r_3, ... r_n du polygone ; la première fera, avec toutes les autres, des angles (r_1, r_2), r_1, r_3, ...(r_1, r_n). Soient élevées, par le même point, aux plans de ces divers angles, des perpendiculaires que nous désignerons respectivement par r_1r_2, r_1r_3, ... r_1r_n ; en représentant les angles que forment ces perpendiculaires avec les axes des coordonnées par

$$\begin{array}{lll}(r_1r_2, x), & (r_1r_2, y), & (r_1r_2, z), \\ (r_1r_3, x), & (r_1r_3, y), & (r_1r_3, z), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ (r_1r_n, x), & (r_1r_n, y), & (r_1r_n, z).\end{array}$$

Cela posé, soient, pour un moment, a, b, c les cosinus des angles (r_1r_2, x), (r_1r_2, y), (r_1r_2, z) que fait avec les axes la perpendiculaire r_1r_2 au plan de l'angle (r_1r_2), construite comme il vient d'être dit. Comme elle est perpendiculaire, à la fois aux directions des deux droites r_1, r_2, on aura, par les conditions connues de perpendicularité,

$$a\text{Cos.}\alpha_1 + b\text{Cos.}\beta_1 + c\text{Cos.}\gamma_1 = 0,$$
$$a\text{Cos.}\alpha_2 + b\text{Cos.}\beta_2 + c\text{Cos.}\gamma_2 = 0;$$

d'où on tire

$$b = a.\frac{\text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\alpha_2 - \text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\gamma_2}{\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\gamma_2 - \text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\beta_2}, \quad c = a.\frac{\text{Cos.}\alpha_1\text{Cos.}\beta_2 - \text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\alpha_2}{\text{Cos.}\beta_1\text{Cos.}\gamma_2 - \text{Cos.}\gamma_1\text{Cos.}\beta_2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

on trouvera

$$(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2)^2=a^2\left\{\begin{array}{l}(\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2)^2\\+(\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\alpha_2-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\alpha_2)^2\\+(\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\beta_2-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2)^2\end{array}\right\};$$

or, le multiplicateur de a^2, dans le second membre (§. III) n'est autre chose que $\text{Sin.}^2(r_1, r_2)$, d'où il suit qu'on aura, en extrayant la racine quarrée,

$$\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2=\pm a\text{Sin}.(r_1,r_2)=\pm\text{Sin}.(r_1,r_2)\text{Cos}.(r_1,r_2,x).$$

Les signes $+$ et $-$ étant ici arbitraires, nous ferons choix du signe $+$, et nous aurons, en formant les équations analogues,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\gamma_2-\text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}.\beta_2=\text{Sin}.(r_1\ ,\ r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,\ x)\ ,\\ \text{Cos}.\gamma_1\text{Cos}\ \alpha_2-\text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\gamma_2=\text{Sin}.(r_1\ ,\ r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,\ y)\ ,\\ \text{Cos}.\alpha_1\text{Cos}.\beta_2-\text{Cos}.\beta_1\text{Cos}.\alpha_2=\text{Sin}.(r_1\ ,\ r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,\ z)\ .\end{array}\right\}(7)$$

Substituant ces valeurs et les autres que nous obtiendrions de même forme, par un semblable calcul, dans les équations (6), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l}r_2\text{Sin}.(r_1\ ,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,\ x)+r_3\text{Sin}.(r_1,\ r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\ ,\ x)+\ldots\ldots=0\ ,\\ r_2\text{Sin}.(r_1\ ,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,y)+r_3\text{Sin}.(r_1,\ r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\ ,\ y)+\ldots\ldots=0\ ,\\ r_2\text{Sin}.(r_1\ ,r_2)\text{Cos}.(r_1r_2\ ,\ z)+r_3\text{Sin}.(r_1,\ r_3)\text{Cos}.(r_1r_3\ ,\ z)+\ldots\ldots=0\ .\end{array}\right\}(8)$$

Ces équations (8) étant de même forme que les équations (2), nous pourrons opérer sur elles de la même manière. Pour pouvoir noter les résultats de ces opérations, nous représenterons simplement par $(r_1r_2\ ,r_1r_3)$ l'angle que forment entre elles les perpendiculaires aux plans des deux angles $(r_1\ ,\ r_2)$, (r_1, r_3), et ainsi de suite pour les autres. Ces angles sont la mesure des angles dièdres formés par les plans de ces mêmes angles, et qui peuvent s'étendre de zéro à quatre droites ; attendu qu'on doit les compter invariablement, en partant de l'un quelconque des angles plans dont il s'agit, et en tournant constamment dans le même sens, jusqu'à ce qu'en passant par tous les autres on y soit revenu de nouveau. Tout cela admis, les équations (8) donneront d'abord (3)

$$\left.\begin{array}{l}
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_4)+..=0,\\
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+..=0,\\
r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_4)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)+..=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(9)$$

On aura, en second lieu, (4)

$$\left.\begin{array}{l}
0=r_2^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_2)+r_3^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_3)+r_4^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)+\ldots+r_n^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_n)\\
\qquad+2r_2r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(r_1r_2,r_1r_3)+\ldots
\end{array}\right\}(10)$$

On aura enfin (5)

$$\left.\begin{array}{l}
r_2^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_2)=r_3^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_3)+r_4^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)+\ldots\ldots+r_n^2\,\mathrm{Sin.}^2(r_1,r_4)\\
\qquad+2r_3r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(r_1r_3,r_1r_4)+\ldots
\end{array}\right\}(11)$$

Soient désignées, pour un moment, par p_2, p_3, ... p_n, les perpendiculaires aux plans des angles (r_1, r_2), (r_1, r_3), ...(r_1, r_n), dont il a été question ci-dessus ; les deux premières équations (8) pourront être écrites ainsi

$$r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(p_2,x)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(p_3,x)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(p_4,x)+..=0$$

$$r_2\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_2)\mathrm{Cos.}(p_2,y)+r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Cos.}(p_3,y)+r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Cos.}(p_4,y)+..=0$$

Si, du produit de la première par $\mathrm{Cos.}(p_2, y)$, on retranche le produit de la seconde par $\mathrm{Cos.}(p_2, x)$, afin d'éliminer r_2 entre elles, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} r_3\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\,[\mathrm{Cos.}(p_3,x)\mathrm{Cos.}(p_2,y)-\mathrm{Cos.}(p_2,x)\mathrm{Cos.}(p_3,y)] \\ +r_4\,\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\,[\mathrm{Cos.}(p_4,x)\mathrm{Cos.}(p_2,y)-\mathrm{Cos.}(p_2,x)\mathrm{Cos.}(p_4,y)] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=0.$$

Or, les formules (7) donnent

$$\mathrm{Cos.}(p_3,x)\mathrm{Cos.}(p_2,y)-\mathrm{Cos.}(p_2,x)\mathrm{Cos.}(p_3,y)=\mathrm{Sin.}(p_2,p_3)\mathrm{Cos.}(p_2p_3,z)\,,$$

$$\mathrm{Cos.}(p_4,y)\mathrm{Cos.}(p_2,y)-\mathrm{Cos.}(p_2,x)\mathrm{Cos.}(p_4,y)=\mathrm{Sin.}(p_2,p_4)\mathrm{Cos.}(p_2p_4,z)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a d'ailleurs, par la définition même des lignes p_2, p_3, ..p_n,

$$(r_1,z)=(p_2p_3,z)=(p_2p_4,z)=\ldots\ldots$$

et, en outre,

$$\mathrm{Sin}\,(p_2,p_3)=\mathrm{Sin.}(r_1r_2,r_1r_3),\quad \mathrm{Sin.}(p_2,p_4)=\mathrm{Sin.}(r_1r_2,r_1r_4),\ldots$$

au moyen de quoi l'équation ci-dessus deviendra, en divisant par Cos.(r_1, z),

$$r_3\mathrm{Sin.}(r_1,r_3)\mathrm{Sin.}(r_1r_2,r_1r_3)+r_4\mathrm{Sin.}(r_1,r_4)\mathrm{Sin.}(r_1r_2,r_1r_4)+\ldots=0\,. \quad (12)$$

Comme cette dernière équation, et toutes les autres qu'on en pourrait déduire, ne renferment plus rien de relatif aux axes des coordonnées, elles ne sauraient être susceptibles de transformations ultérieures.

§. VI.

Après nous être occupés d'un polygone rectiligne quelconque, occupons-nous, en particulier, du quadrilatère gauche, dont la théorie se lie à celle des coordonnées obliques.

Soient, dans l'espace, trois axes obliques, donnés de position, et un point quelconque, rapporté à ces axes, par les trois coordonnées x, y, z. Soit r la distance de ce point à l'origine, laquelle est la diagonale d'un parallélipipède obliquangle, ayant x, y, z pour les trois arêtes d'un même angle. Trois arêtes consécutives de ce parallélipipède forment avec cette diagonale r, un quadrilatère gauche, auquel nous pouvons appliquer les formules générales trouvées précédemment. Nous conviendrons seulement de changer la direction de son côté r, c'est-à-dire que nous considérerons la diagonale comme allant de l'origine au point (x, y, z); en conséquence, il faudra, dans toutes nos formules, changer $\text{Cos.}(r, x)$, $\text{Cos.}(r, y)$, $\text{Cos.}(r, z)$ en $-\text{Cos}(r, x)$, $-\text{Cos.}(r, y)$, $-\text{Cos.}(r, z)$.

Cela posé, r' étant une droite de direction arbitraire, les équations (2) donnent d'abord

$$r\text{Cos.}(r, r') = x\text{Cos.}(x, r') + y\text{Cos.}(y, r') + z\text{Cos.}(z, r') \quad . \qquad (13)$$

On tire ensuite des équations (3)

$$\left.\begin{aligned}
r &= x\text{Cos.}(r, x) + y\text{Cos.}(r, y) + z\text{Cos.}(r, z) \,, \\
r\text{Cos}(r, x) &= x + y\text{Cos.}(x, y) + z\text{Cos.}(x, z) \,, \\
r\text{Cos.}(r, y) &= x\text{Cos.}(x, y) + y + z\text{Cos.}(y, z) \,, \\
r\text{Cos.}(r, z) &= x\text{Cos.}(x, z) + y\text{Cos.}(y, z) + z \,.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Si l'on met, dans la première des équations (14), les valeurs de x, y, z tirées des trois autres, on parviendra à l'équation de relation connue entre les six angles que forment deux à deux dans l'espace quatre droites r, x, y, z de direction arbitraire. Cette équation est

$$1-\text{Cos.}^2(y,z)-\text{Cos.}^2(z,x)-\text{Cos.}^2(x,y)+2\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cos.}^2(r,x)\text{Sin.}(y,z)-2\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r,z)[\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(z,x)]\\+\text{Cos.}^2(r,y)\text{Sin.}^2(z,x)-2\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r,x)[\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(x,y)]\\+\text{Cos.}^2(r,z)\text{Sin.}^2(x,y)-2\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r,y)[\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(y,z)]\end{array}\right\}. \quad (15)$$

Soient α , β , γ les angles dièdres adjacens à l'une des faces d'un tétraèdre et α', β' , γ' les angles dièdres respectivement opposés. Si , d'un point pris dans l'intérieur du tétraèdre on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses quatre faces , ces perpendiculaires formeront deux à deux six angles qui auront entre eux la relation ci-dessus ; mais ces angles seront les supplémens respectifs des six angles dièdres du tétraèdre , d'où il suit que ces derniers auront entre eux la relation suivante :

$$1-\text{Cos.}^2\alpha'-\text{Cos.}^2\beta'-\text{Cos.}^2\gamma'-2\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta'\text{Cos.}\gamma'$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cos.}^2\alpha\text{Sin.}^2\alpha'+2(\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos}\,\beta'\text{Cos.}\gamma')\text{Cos}\,\beta\text{Cos.}\gamma\\+\text{Cos}^2\beta\text{Sin.}^2\beta'+2(\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\gamma'\text{Cos.}\alpha')\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha\\+\text{Cos.}^2\gamma\text{Sin.}^2\gamma'+2(\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}\alpha'\text{Cos}\,\beta')\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\end{array}\right\};$$

et la première des deux questions proposées à la page 396 du XIII.e volume des *Annales* , consisterait à déduire de cette équation une relation entre les angles α , β , γ , α' , β' , γ' eux-mêmes ; mais peut-être parviendrait-on plus aisément au but à l'aide d'un procédé analogue à ceux qui ont été mis en usage dans l'article de la page 271 du tome IX.

Les formules (4) donnent

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}(y,z)+2zx\text{Cos.}(z,x)+2xy\text{Cos.}(x,y)\ ; \quad (16)$$

c'est-à-dire que : *Le quarré de la diagonale d'un parallélipipède* *est égal à la somme des quarrés des trois arêtes qui partent de l'une de ses extrémités, augmentée des doubles produits de ces arêtes deux à deux, multipliés par les cosinus des angles que comprennent leurs directions.*

En vertu des équations (9), on a

$$r^2\text{Sin.}^2(r,x)=y^2\text{Sin.}^2(x,y)+z^2\text{Sin.}^2(x,z)+2xy\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz) \ ;$$

mais en quarrant la seconde des équations (14) on a

$$r^2\text{Cos.}^2(r,x)=x^2+y^2\text{Cos.}^2(x,y)+z^2\text{Cos.}^2(x,z)+2xy\text{Cos.}(x,y)$$

$$+2xz\text{Cos.}(x,z)+2yz\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z) \ ;$$

ajoutant cette équation à la précédente, il viendra

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2xy\text{Cos.}(x,y)+2xz\text{Cos.}(x,z)$$

$$+2yz\{\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz)+\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z)\} \ ;$$

en égalant cette valeur de r^2 à celle qui est donnée par la formule (16), on aura

$$\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(x,z)\text{Cos.}(xy,xz)=\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(x,z) \ ; \quad (17)$$

équation que l'on reconnaîtra pour l'équation fondamentale de la trigonométrie sphérique.

En vertu des équations (9), on a

$$x\text{Sin.}(z,x)\text{Sin.}(zx,rz)=y\text{Sin.}(y,z)\text{Sin.}(yz,rz) \ ,$$

$$y\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(xy,rx)=z\text{Sin.}(z,x)\text{Sin.}(xy,rx) \ ;$$

$$z\text{Sin.}(y,z)\text{Sin.}(yz,ry)=x\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.}(xy,ry) \ ;$$

donc, en multipliant

$$\text{Sin.}(zx, rz)\text{Sin.}(xy, rx)\text{Sin.}(yz, ry)=\text{Sin.}(yz, rz)\text{Sin.}(zx, rx)\text{Sin.}(xy, ry).$$

On peut, dans l'équation (13) faire disparaître, de trois manières, deux des termes du second membre, en y supposant nulles deux des quantités Cos.(x, r'), Cos.(y, r'), Cos.(z, r'); la droite r', dabord de direction indéterminée, devient alors perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, ce qui donne

$$r\text{Cos.}(r,yz)=x\text{Cos.}(x,yz),\ r\text{Cos.}(r,zx)=y\text{Cos.}(y,zx),\ r\text{Cos.}(r,xy)=z\text{Cos.}(z,xy). \quad (18)$$

En substituant les valeurs de x, y, z qui en résultent dans les équations trouvées ci-dessus, on obtiendra diverses formules indépendantes des longueurs des droites r, x, y, z et relatives seulement à leur direction; les principales sont

$$1=\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos}(x,yz)}\text{Cos.}(r,x)+\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos}(r,y)+\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(r,z),$$

$$\text{Cos.}(r,x)-\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}=\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(x,y)+\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(z,x);$$

$$\text{Cos.}(r,y)-\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}=\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(y,z)+\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(x,y),$$

$$\text{Cos.}(r,z)-\frac{\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(z,xy)}=\frac{\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(z,x)+\frac{\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(y.z).$$

$$1=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\text{Cos.}^2(r,yz)}{\text{Cos.}^2(x,yz)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,zx)\text{Cos.}(r,xy)}{\text{Cos.}(y,zx)\text{Cos.}(z,xy)}\text{Cos.}(y,z)\\[2ex]
+\dfrac{\text{Cos.}^2(r,zx)}{\text{Cos.}^2(y,zx)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,xy)\text{Cos.}(r,yz)}{\text{Cos.}(z,xy)\text{Cos.}(x,yz)}\text{Cos.}(z,x)\\[2ex]
+\dfrac{\text{Cos.}^2(r,xy)}{\text{Cos.}^2(z,xy)}+2\dfrac{\text{Cos.}(r,yz)\text{Cos.}(r,zx)}{\text{Cos.}(x,yz)\text{Cos.}(y,zx)}\text{Cos.}(x,y)
\end{array}\right\}$$

Soit encore une droite r', menée, dans une direction quelconque, par l'origine des axes obliques, et soit (x', y', z') son extrémité; l'équation (13), multipliée par r', donnera

$$rr'\text{Cos.}(r, r') = r'x\text{Cos.}(r', x) + r'y\text{Cos.}(r', y) + r'z\text{Cos.}(r', z) \;;$$

mais les trois dernières équations (14) donnent

$$r'\text{Cos.}(r', x) = x' + y'\text{Cos.}(x, y) + z'\text{Cos.}(z, x) \;,$$
$$r'\text{Cos.}(r', y) = y' + z'\text{Cos.}(y, z) + x'\text{Cos.}(x, y) \;,$$
$$r'\text{Cos.}(r', z) = z' + x'\text{Cos.}(z, x) + y'\text{Cos.}(y, z) \;;$$

mettant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$rr'\text{Cos.}(r, r') = \left\{\begin{array}{r} xx' + (yz' + zy')\text{Cos.}(y, z) \\ + yy' + (zx' + xz')\text{Cos}(z, x) \\ + zz' + (xy' + yx')\text{Cos.}(x, y) \end{array}\right\} .$$

En substituant aux rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, $\frac{x'}{r}$. $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$, leurs valeurs angulaires, données par les équations (18), cette formule donnera le cosinus de l'angle de deux droites, rapportées à des coordonnées obliques.

§. VII.

Les formules relatives à la transformation des coordonnées se déduisent de l'équation (13) de la manière la plus simple.

Soient, en effet dans l'espace, deux systèmes d'axes obliques ayant la même origine; soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées d'un même point quelconque, dans les deux systèmes, et soit r la distance de ce point à l'origine. Si p désigne une autre droite de direction arbitraire menée par cette origine, l'équation (13) donnera

$$r\text{Cos.}(r\,,p)=x\,\text{Cos.}(x\,\,,p)+y\,\text{Cos.}(y\,\,,p)+z\,\text{Cos.}(z\,\,,p)\ ,$$

$$r\text{Cos.}(r\,,p)=x'\text{Cos.}(x'\,,p)+y'\,\text{Cos.}(y'\,,p)+z'\text{Cos.}(z'\,,p)\ ;$$

et conséquemment

$$x\text{Cos.}(x,p)+y\text{Cos.}(y,p)+z\text{Cos.}(z,p)=x'\text{Cos.}(x',p)+y'\text{Cos.}(y',p)+z'\text{Cos.}(z',p). \quad (19)$$

Nous ferons disparaître deux termes de cette dernière équation, en posant

$$\text{Cos.}(y\,,p)=0\ ,\quad \text{Cos.}(z\,,p)=0\ ;$$

alors la droite p sera perpendiculaire au plan des yz. Désignant alors par $(x\,,\,yz)$, $(x'\,,yz)$, les angles que fait cette droite avec les axes des x et des x', et employant des notations analogues pour les autres angles du même genre, l'équation (19) deviendra

$$x\text{Cos.}(x,yz)=x'\text{Cos.}(x'yz)+y'\text{Cos.}(y',yz)+z'\text{Cos.}(z',yz)\ ; \quad (20)$$

et, comme on pourrait appliquer le même raisonnement à chacun des autres axes, on aura, pour les formules générales de la transformation des coordonnées,

$$\left.\begin{aligned}x\text{Cos.}(x,yz)&=x'\text{Cos.}(x',yz)+y'\text{Cos.}(y',yz)+z'\text{Cos.}(z'yz)\ ,\\ y\text{Cos.}(y,zx)&=y'\text{Cos.}(y',zx)+z'\text{Cos.}(z',zx)+x'\text{Cos.}(x',zx)\ ,\\ z\text{Cos.}(z,xy)&=z'\text{Cos.}(z',xy)+x'\text{Cos.}(x'xy)+y'\text{Cos.}(y',xy)\ .\end{aligned}\right\}(21)$$

On obtient par les mêmes moyens, les formules réciproques,

$$\left.\begin{aligned}x'\text{Cos.}(x',y'z')&=x\text{Cos.}(x,y'z')+y\text{Cos.}(y,y'z')+z\text{Cos.}(z,y'z')\,,\\ y'\text{Cos.}(y',z'x')&=y\text{Cos.}(y,x'x')+z\text{Cos.}(z,z'x')+x\text{Cos.}(x,z'x')\,,\\ z'\text{Cos.}(z',x'y')&=z\text{Cos.}(z,x'y')+x\text{Cos.}(x,x'y')+y\text{Cos}(y,x'y')\,.\end{aligned}\right\}(22)$$

Ces équations sont celles qui résolvent le problème général de la transformation des coordonnées. Les neuf coefficiens qui entrent dans leurs seconds membres sont, en vertu de l'équation (15), liés par trois conditions, de manière que six seulement d'entre eux sont nécessaires et indépendans.

Lorsque les axes primitifs des x, y, z sont rectangulaires, les équations (21) se simplifient et deviennent

$$x = x'\text{Cos.}(x',x) + x'\text{Cos.}(y',x) + z'(z',x) \;,$$

$$y = y'\text{Cos.}(y',y) + z'\text{Cos.}(z',y) + x'(x',y) \;,$$

$$z = z'\text{Cos.}(z',z) + x'\text{Cos.}(x',z) + y'(y',z) \;;$$

et les trois équations de relation dont il vient d'être question ci-dessus

$$\text{Cos.}^2(x',x) + \text{Cos.}^2(x'y) + \text{Cos.}^2(x',z) = 1 \;,$$

$$\text{Cos.}^2(y',y) + \text{Cos.}^2(y',z) + \text{Cos.}^2(y',x) = 1 \;,$$

$$\text{Cos.}^2(z',z) + \text{Cos.}^2(z',x) + \text{Cos.}^2(z',y) = 1 \;.$$

Supposons de nouveau les deux systèmes de coordonnées obliques ; mais admettons que les axes des x', y', z' soient respectivement perpendiculaires aux plans des yz, zx, xy, alors les axes des x, y, z seront, à l'inverse, respectivement perpendiculaires aux plans des $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, en introduisant ces conditions dans les équations (21) et (22), en posant, pour abréger,

$$\text{Cos.}(y,z) = a \;, \qquad \text{Cos.}(zx,xy) = a' \;, \qquad \text{Cos.}(x,yz) = \text{A} \;,$$

$$\text{Cos.}(z,x) = b \;, \qquad \text{Cos.}(xy,yz) = b' \;, \qquad \text{Cos.}(y,zx) = \text{B} \;,$$

$$\text{Cos.}(x,y) = c \;, \qquad \text{Cos.}(yz,zx) = c' \;, \qquad \text{Cos.}(z,xy) = \text{C} \;.$$

Ces équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l} Ax=x'+c'y'+b'z' \ , \\ By=y'+a'z'+c'x' \ , \\ Cz=z'+b'x'+a'y' \ ; \end{array}\right\} (23) \qquad \left.\begin{array}{l} Ax'=x+cy+bz \ , \\ By'=y+az+cx \ , \\ Cz'=z+bx+ay \ . \end{array}\right\} (24)$$

Si l'on résout les équations (24) par rapport à x, y, z, en multipliant respectivement les résultats par A, B, C, et posant, pour abréger,

$$k^2=1-a^2-b^2-c^2+2abc \ ,$$

on trouvera

$$Ax=\frac{1}{k^2}\left\{A^2(1-a^2)x'+AB(ab-c)y'+CA(ca-b)z'\right\}$$

$$By=\frac{1}{k^2}\left\{B^2(1-b^2)y'+BC(bc-a)z'+AB(ab-c)x'\right\}$$

$$Cz=\frac{1}{k^2}\left\{C^2(1-c^2)z'+CA(ca-b)x'+BC(bc-a)y'\right\}$$

comparant ces dernières équations aux équations (23), on aura, à cause de l'identité qui doit évidemment exister entre leurs seconds membres,

$$\left.\begin{array}{ll} A^2(1-a^2)=k^2 \ , & BC(bc-a)=a'k^2 \ , \\ B^2(1-b^2)=k^2 \ , & CA(ca-b)=b'k^2 \ , \\ C^2(1-c^2)=k^2 \ , & AB(ab-c)=c'k^2 \ . \end{array}\right\} (25)$$

Il est manifeste que si l'on eût opéré d'abord sur les équations (23) pour comparer ensuite les résultats aux équations (24); en posant, pour abréger,

$$k'^2=1-a'^2-b'^2-c'^2+2a'b'c' \ ,$$

on aurait eu

$$\left.\begin{array}{ll} A^2(1-a'^2)=k'^2\,, & BC(b'c'-a')=ak^2\,, \\ B^2(1-b'^2)=k'^2\,, & CA(c'a'-b')=bk^2\,, \\ C^2(1-c'^2)=k'^2\,; & AB(a'b'-c')=ck^2\,. \end{array}\right\}(26)$$

Equations dont le système équivaut évidemment à celui des premières.

Les axes des x, y, z sont les arêtes d'un angle trièdre dont les angles plans sont (x,y), (y,z), (z,x); et dont nous désignerons les angles dièdres respectivement opposés par X, Y, Z. On peut supposer que les perpendiculaires élevées aux faces de cet angle trièdre, sont tellement dirigées que les angles qu'elles font avec les arêtes opposées n'excèdent pas l'angle droit; alors les cosinus A, B, C de ces angles sont positifs, et les équations de gauche (25) et (26) donnent

$$\begin{array}{ll} A\sqrt{1-a^2}=k\,, & A\sqrt{1-a'^2}=k'\,, \\ B\sqrt{1-b^2}=k\,, & B\sqrt{1-b'^2}=k'\,, \\ C\sqrt{1-c^2}=k\,, & C\sqrt{1-c'^2}=k'\,; \end{array}$$

d'où, par division

$$\frac{k}{k'}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a'^2}}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-b'^2}}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c'^2}}\,.$$

Si l'on compare les produits deux à deux des trois premières, puis des trois dernières, avec les équations de droite (25) et (26), on aura

$$\begin{array}{ll} bc-a=\sqrt{1-b^2}.\sqrt{1-c^2}.a'\,, & b'c'-a'=\sqrt{1-b'^2}.\sqrt{1-c'^2}.a\,, \\ ca-b=\sqrt{1-c^2}.\sqrt{1-a^2}.b'\,, & c'a'-b'=\sqrt{1-c'^2}.\sqrt{1-a'^2}.b\,, \\ ab-c=\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}.c'\,, & a'b'-c'=\sqrt{1-a'^2}.\sqrt{1-b'^2}.c\,. \end{array}$$

Maintenant, les angles que font entre elles les perpendiculaires aux plans des faces de l'angle trièdre, et dont les cosinus sont a', b', c', peuvent être égaux aux angles dièdres X, Y, Z ou bien en être les supplémens. La question se décide par l'examen d'un cas particulier. Quand les angles plans zx, xy sont droits, ce qui rend b et c nuls, l'angle (y, z) ne diffère pas de l'angle dièdre X, et l'on a $a=\text{Cos.X}$; mais nos formules donnent, en même temps $-a=a'$, donc $a'=-\text{Cos.X}$; d'où l'on conclut qu'en général a', b', c' sont les cosinus des supplémens des angles dièdres X, Y, Z. Quant à A, B, C, ce sont visiblement les sinus des angles que font les arêtes avec les faces opposées, angles que, pour abréger, nous dénoterons simplement par X', Y', Z'. Désignant en outre, pour abréger, x, y, z, respectivement, les angles (y, z), (z, x), (x, y) ; les formules ci-dessus deviendront

$$\text{Sin.}x\text{Sin.X}'=\text{Sin.}y\text{Sin.Y}'=\text{Sin.}z\text{Sin.Z}'=k\ ,$$

$$\text{Sin.XSin.X}'=\text{Sin.YSin.Y}'=\text{Sin.ZSin.Z}'=k'\ ;$$

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.X}}=\frac{\text{Sin.}y}{\text{Sin.Y}}=\frac{\text{Sin.}z}{\text{Sin.Z}}=\frac{k}{k'}\ ,$$

$$\text{Sin.}y\text{Sin.}z\text{Cos.X}=\text{Cos.}x-\text{Cos.}y\text{Cos.}z\ ,\quad \text{Sin.YSin.ZCos.}x=\text{Cos.X}+\text{Cos.YCos.Z}\ ,$$

$$\text{Sin.}z\text{Sin.}x\text{Cos.Y}=\text{Cos.}y-\text{Cos.}z\text{Cos.}x\ ,\quad \text{Sin.ZSin.XCos.}y=\text{Cos.Y}+\text{Cos.ZCos.X}\ ,$$

$$\text{Sin}x\text{Sin.}y\text{Cos.Z}=\text{Cos.}z-\text{Cos.}x\text{Cos.}y\ ,\quad \text{Sin.XSin.YCos.}z=\text{Cos.Z}+\text{Cos.XCosY}\ .$$

Nous retrouvons donc ainsi l'ensemble des formules de la trigonométrie sphérique.

Le volume P du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions des coordonnées x, y, z, est égal à l'aire de la face qui renferme les coordonnées x et y multipliée par la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette face de l'extrémité de l'arête z qui lui est opposée. Or, l'aire de cette face est $xy\text{Sin.}(x, y)$, et la perpendiculaire a pour expression $z\text{Cos.}(z, xy)$ ou $z\text{Sin.Z}'$; donc

$$\text{P}=xyz\text{Sin.}(x,y)\text{Sin.Z}'\ ;$$

mais nous avons trouvé

$$\mathrm{Sin.}(y,z)\mathrm{Sin.Z}'=k=\sqrt{1-\mathrm{Cos.}^2(x,y)-\mathrm{Cos.}^2(y,z)-\mathrm{Cos.}^2(z,x)+2\mathrm{Cos.}(x,y)\mathrm{Cos}(y,z)\mathrm{Cos.}(z,x)}\ ;$$

donc finalement

$$\mathrm{P}=xyz\sqrt{1-\mathrm{Cos.}^2(x,y)-\mathrm{Cos.}^2(y,z)-\mathrm{Cos.}^2(z,x)+2\mathrm{Cos.}(x,y)\mathrm{Cos.}(y,z)\mathrm{Cos.}(z,x)}\ .$$

§. VIII.

La formule (13) va nous conduire à l'équation du plan. En désignant, en effet, par p la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur un plan donné de position, (x, y, z) représentant un point quelconque de ce plan, et r la distance du même point à l'origine, on aura par l'équation (13)

$$r\mathrm{Cos.}(r,p)=x\mathrm{Cos.}(x,p)+y\mathrm{Cos.}(y,p)+z\mathrm{Cos.}(z.p)\ .$$

Or $r\mathrm{Cos}(r, p)$ n'est autre chose que la perpendiculaire p ; donc

$$x\mathrm{Cos.}(x,p)+y\mathrm{Cos.}(y,p)+z\mathrm{Cos.}(z,p)=p\ . \qquad (27)$$

Telle est donc sous une forme très-simple l'équation entre les trois coordonnées de l'un quelconque des points d'un plan donné. On doit remarquer, au surplus, que les trois coefficiens du premier membre sont liés entre eux par l'équation (15) qui, lorsque les axes sont rectangulaires, se réduit à

$$\mathrm{Cos.}^2(x,p)+\mathrm{Cos.}^2(y,p)+\mathrm{Cos.}^2(z,p)=1\ .$$

Dans la même hypothèse, si

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=\mathrm{D}$$

représente l'équation d'un plan, on aura

$$\mathrm{Cos.}(x,p)=\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}\,,\quad \mathrm{Cos.}(y,p)=\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}\,,\quad \mathrm{Cos.}(z,p)=\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}\,,$$

$$p=\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}\ .$$

Soit (x', y', z') un point quelconque de l'espace, et soit P la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan (27) ; si, par le point (x', y', z') on conçoit un plan parallèle à celui-là, son équation sera de la forme

$$x\text{Cos.}(x, p)+y\text{Cos.}(y, p)+z\text{Cos.}(z, p)=p' ; \qquad (28)$$

et conséquemment on devra avoir

$$x'\text{Cos.}(x, p)+y'\text{Cos.}(y, p)+z'\text{Cos.}(z, p)=p' ;$$

or, la perpendiculaire P est visiblement égale à la différence des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les deux plans parallèles (27) et (28) ; donc suivant que le plan (27) sera ou ne sera pas situé entre l'origine et le point (x',y',z'), on aura

$$\pm P=p'-p=x'\text{Cos.}(x,p)+y'\text{Cos.}(y,p)+z'\text{Cos.}(z,p)-p . \qquad (29)$$

D'après les formules déterminées ci-dessus, on voit que, si l'équation proposée était de la forme

$$Ax+By+Cz=D ,$$

on aurait alors

$$P=\pm\frac{Ax'+By'+Cz'-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} ;$$

formule connue.

Soit un second plan

$$A'x+B'y+C'z=D' ;$$

l'angle des deux plans sera égal à (p, p'), p' étant ici la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le second plan ; or, on a (§. VI)

$$\text{Cos.}(p,p')=\text{Cos.}(x,p)\text{Cos.}(x,p')+\text{Cos.}(y,p)\text{Cos.}(y,p')+\text{Cos.}(z,p)\text{Cos}(z,p') ;$$

donc

$$\text{Cos.}(p, p')=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+B'^2)}} ;$$

formule également connue.

§. IX.

Nous terminerons par la recherche des relations entre les aires des faces d'un polyèdre et les angles dièdres qu'elles déterminent par leur rencontre.

Soient t_1, t_2, t_3, ... t_n les aires de ces faces. Rapportons le polyèdre à des axes rectangulaires ayant leur origine dans son intérieur ; et soient p_1, p_2, p_3, ... p_n les perpendiculaires abaissées de cette origine sur les plans de ses faces, et allant conséquemment du dedans au dehors. Soient encore α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2;....., α_n, β_n, γ_n les angles que font ces mêmes perpendiculaires avec les trois faces.

Si l'on considère un autre point (x, y, z), pris dans l'intérieur du polyèdre, comme le sommet commun d'une suite de pyramides ayant ses faces pour bases, leurs hauteurs seront (29)

$$\begin{array}{l}
p_1-x\mathrm{Cos}.\alpha_1-y\mathrm{Cos}.\beta_1-z\mathrm{Cos}.\gamma_1\;,\\
p_2-x\mathrm{Cos}.\alpha_2-y\mathrm{Cos}.\beta_2-z\mathrm{Cos}.\gamma_2\;,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\;,\\
p_n-x\mathrm{Cos}.\alpha_n-y\mathrm{Cos}.\beta_n-z\mathrm{Cos}.\gamma_n\;;
\end{array}$$

de sorte qu'en désignant par P le volume de tout le polyèdre, égal à la somme des volumes de ces pyramides, on aura

$$3\mathrm{P}=\left\{\begin{array}{l}
t_1(p_1-x\mathrm{Cos}.\alpha_1-y\,\mathrm{Cos}.\beta_1-z\mathrm{Cos}.\gamma_1)\\
+t_2(p_2-x\mathrm{Cos}.\alpha_2-y\mathrm{Cos}.\beta_2-z\mathrm{Cos}.\gamma_2)\\
+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+t_n(p_n-x\mathrm{Cos}.\alpha_3-y\mathrm{Cos}.\beta_n-z\mathrm{Cos}.\gamma_n)
\end{array}\right\};$$

ou bien

$$3\mathrm{P}=t_1p_1+t_2p_2+\dots\dots+t_np_n-\left\{\begin{array}{l}
x(t_1\mathrm{Cos}.\alpha_1+t_2\mathrm{Cos}.\alpha_2+\dots\dots\,t_n\mathrm{Cos}.\alpha_n)\\
+y(t_1\mathrm{Cos}.\beta_1+t_2\mathrm{Cos}.\beta_2+\dots\dots\,t_n\mathrm{Cos}.\beta_n)\\
+z(t_1\mathrm{Cos}.\gamma_1+t_2\mathrm{Cos}.\gamma_2+\dots\dots\,t_n\mathrm{Cos}.\gamma_n)
\end{array}\right\};$$

et, comme on a aussi

$$3\mathrm{P}=t_1p_1+t_2p_2+\dots\dots+t_np_n\;,$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{r}x(t_1\text{Cos.}\alpha_1+t_2\text{Cos.}\alpha_2+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\alpha_n)\\+y(t_1\text{Cos.}\beta_1+t_2\text{Cos}\,\beta_2+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\beta_n)\\+z(t_1\text{Cos.}\gamma_1+t_2\,\text{Cos.}\gamma_2+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\gamma_n)\end{array}\right\}=0\,;$$

et, comme x, y, z sont tout à fait arbitraires et indépendans, cette équation équivaut aux trois suivantes

$$t_1\text{Cos.}\alpha_1+t_2\text{Cos.}\alpha_2+t_3\text{Cos.}\alpha_3+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\alpha_n=0\ ,$$
$$t_1\text{Cos.}\beta_1+t_2\text{Cos.}\beta_2+t_3\text{Cos.}\beta_3+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\beta_n=0\ ,$$
$$t_1\text{Cos.}\gamma_1+t_2\text{Cos}\,\gamma_2+t_3\text{Cos.}\gamma_3+\ldots\ldots\ t_n\text{Cos.}\gamma_n=0\ ;$$

équations absolument de même forme que les équations (2), relatives aux polygones rectilignes fermés, plans ou gauches, de sorte que toutes les propositions que nous en avons déduites pour ces polygones s'appliquent sans restrictions aucunes, aux polyèdres, pourvu que l'on substitue les aires des faces aux longueurs des côtés et les directions des perpendiculaires à ces faces à celles de ces mêmes côtés ; et c'est assez dire que nous ne devons pas insister davantage sur ce sujet.