ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

SORLIN

GERGONNE

Trigonométrie. Recherches de trigonométrie sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 273-304

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__273_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Recherches de trigonométrie sphérique;

Par M. SORLIN, professeur des sciences physiques au collége royal de Tournon, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

(*Extrait*; par M. GERGONNE.)

LE mémoire, fort étendu, que nous nous proposons ici de faire connaître par extrait, a été présenté, en 1819, à l'académie royale des sciences de Paris, qui, dans sa séance du 22 février même année, sur la proposition de MM. Legendre et Delambre, commissaires, l'a déclaré digne d'être inséré dans la collection des *Savans étrangers*. C'est, comme on va le voir, un recueil de formules de trigonométrie sphérique, dérivées les unes des autres de la manière la plus simple et la plus symétrique.

§. I.

Formules préliminaires.

En représentant par u et v deux arcs ou angles quelconques, on a, comme l'on sait, les quatre formules

$$\text{Cos.}(u+v)=\text{Cos.}u\text{Cos.}v-\text{Sin.}u\text{Sin.}v\ , \qquad (1)$$

$$\text{Cos.}(u-v)=\text{Cos.}u\text{Cos.}v+\text{Sin.}u\text{Sin.}v\ , \qquad (2)$$

$$\text{Sin.}(u+v)=\text{Sin.}u\text{Cos.}v+\text{Cos.}u\text{Sin.}v\ , \qquad (3)$$

$$\text{Sin.}(u-v)=\text{Sin.}u\text{Cos.}v-\text{Cos.}u\text{Sin.}v\ .\ (*) \qquad (4)$$

Si l'on suppose $v=u$, ces formules donneront

$$\text{Cos.}2u=\text{Cos.}^2u-\text{Sin.}^2u=1-2\text{Sin.}^2u=2\text{Cos.}^2u-1\ , \qquad (5)$$

$$1=\text{Cos.}^2u+\text{Sin.}^2u\ , \qquad (6)$$

$$\text{Sin.}2u=2\text{Sin.}u\text{Cos.}u\ . \qquad (7)$$

Si l'on prend tour-à-tour la somme et la différence des équations (1) et (2), ainsi que la somme et la différence des équations (3) et (4), en posant, pour abréger, $u+v=x$, $u-v=y$, on trouvera

$$\text{Cos.}y+\text{Cos.}x=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \qquad (8)$$

$$\text{Cos.}y-\text{Cos.}x=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \qquad (9)$$

$$\text{Sin.}x+\text{Sin.}y=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ , \qquad (10)$$

$$\text{Sin.}x-\text{Sin.}y=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ . \qquad (11)$$

d'où, en changeant y en $\frac{1}{2}\varpi-y$,

(*) Voyez, pour la démonstration la plus simple et la plus générale de ces théorèmes, la page 323 du XI.e volume du présent recueil.

$$\operatorname{Sin} y+\operatorname{Cos}.x=+2\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ ,\quad (12)$$

$$\operatorname{Sin} y-\operatorname{Cos} x=-2\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ ,\quad (13)$$

$$\operatorname{Sin}.x+\operatorname{Cos} y=+2\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\operatorname{Cos}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ ,\quad (14)$$

$$\operatorname{Sin}.x-\operatorname{Cos}.y=-2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi+(x-y)\}\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(x+y)\}\ .\quad (15)$$

Si, dans chacune de ces huit dernières formules, on change tour-à-tour y en $y+z$ et en $y-z$, en faisant, pour abréger,

$$x+y+z=2t\ ,\qquad (16)$$

il en résultera seize autres, desquelles rejetant les quatre qui n'offrent aucune symétrie, il restera les douze suivantes:

$$\operatorname{Sin}.x+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Cos}.z+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Sin}.z=+\operatorname{Sin}.t\operatorname{Cos}.(t-x)\ ,\quad (17)$$

$$\operatorname{Cos}.x+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=+\operatorname{Cos}.t\operatorname{Cos}.(t-x)\ ,\quad (18)$$

$$\operatorname{Sin}.x-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Sin}.z=-\operatorname{Cos}.t\operatorname{Sin}.(t-x)\ ,\quad (19)$$

$$\operatorname{Cos}.x-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=+\operatorname{Sin}.t\operatorname{Sin}.(t-x)\ ,\quad (20)$$

$$\operatorname{Cos}.x+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=+\operatorname{Cos}.(t-y)\operatorname{Cos}.(t-z)\ ,\quad (21)$$

$$\operatorname{Cos}.x-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=-\operatorname{Sin}.(t-y)\operatorname{Sin}.(t-z)\ ,\quad (22)$$

$$\operatorname{Sin}.x+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=+2\operatorname{Cos}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\operatorname{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ ,\quad (23)$$

$$\operatorname{Cos}.x+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Cos}.z+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Sin}.z=+2\operatorname{Cos}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\operatorname{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ ,\quad (24)$$

$$\operatorname{Sin}.x-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=-2\operatorname{Sin}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\operatorname{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ .\quad (25)$$

$$\operatorname{Cos}.x-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Sin}.z=-2\operatorname{Sin}.(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\operatorname{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\ ,\quad (26)$$

$$\operatorname{Sin}.x+\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos} z+\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=+2\operatorname{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\operatorname{Cos}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}\ ,\quad (27)$$

$$\operatorname{Sin}.x-\operatorname{Cos}.y\operatorname{Cos}.z-\operatorname{Sin}.y\operatorname{Sin}.z=-2\operatorname{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\operatorname{Sin}.\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}\ .\quad (28)$$

En combinant entre elles les douze dernières formules, soit par voie de multiplication, soit par voie de division, on en obtiendrait une multitude d'autres, plus ou moins utiles, et auxquelles, comme à celles-là, le calcul par logarithmes serait facilement applicable. Parmi ces formules, nous ne signalerons que les huit suivantes, sur lesquelles nous aurons besoin de nous appuyer plus loin. L'inspection de leurs seconds membres indique assez comment elles ont été déduites des douze qui précèdent, en ayant égard à la formule (6),

$$1-\mathrm{Cos.}^2x-\mathrm{Cos.}^2y-\mathrm{Cos.}^2z+2\mathrm{Cos}\,x\mathrm{Cos.}y\mathrm{Cos.}z=+4\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}(t-x)\mathrm{Sin.}(t-y)\mathrm{Sin.}(t-z), \quad (29)$$

$$1-\mathrm{Cos.}^2x-\mathrm{Cos.}^2y-\mathrm{Cos.}^2z-2\mathrm{Cos.}x\mathrm{Cos.}y\mathrm{Cos.}z=-4\mathrm{Cos.}t\mathrm{Cos.}(t-x)\mathrm{Cos.}(t-y)\mathrm{Cos.}(t-z), \quad (30)$$

$$1+\mathrm{Cos.}^2x-\mathrm{Cos.}^2y-\mathrm{Cos.}^2+2\mathrm{Cos.}x\mathrm{Sin.}y\mathrm{Sin.}z=-4\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}(t-x)\mathrm{Cos.}(t-y)\mathrm{Cos.}(t-z), \quad (31)$$

$$1+\mathrm{Cos.}^2x-\mathrm{Cos.}^2y-\mathrm{Cos.}^2z-2\mathrm{Cos.}x\mathrm{Sin.}y\mathrm{Sin.}z=+4\mathrm{Cos.}t\mathrm{Cos.}(t-x)\mathrm{Sin.}(t-y)\mathrm{Sin.}(t-z). \quad (32)$$

$$\left.\begin{array}{c}1-\mathrm{Sin.}^2x-\mathrm{Sin.}^2y-\mathrm{Sin.}^2z+2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Sin.}y\mathrm{Sin.}z\\ =+4\mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{array}{c}1-\mathrm{Sin.}^2x-\mathrm{Sin.}^2y-\mathrm{Sin.}^2z-2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Sin.}y\mathrm{Sin.}z\\ =+4\mathrm{Sin.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{c}1+\mathrm{Sin.}^2x-\mathrm{Sin.}^2y-\mathrm{Sin.}^2z+2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Cos.}y\mathrm{Cos.}z\\ =+4\mathrm{Cos.}(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\},\end{array}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{array}{c}1+\mathrm{Sin.}^2x-\mathrm{Sin.}^2y-\mathrm{Sin}\,^2z-2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Cos.}y\mathrm{Cos.}z\\ =+4\mathrm{Sin}\,(\tfrac{1}{4}\varpi-t)\mathrm{Cos.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-x)\}\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-y)\}\mathrm{Sin.}\{\tfrac{1}{4}\varpi-(t-z)\}.\end{array}\right\} \quad (36)$$

Ces formules sont susceptibles de simplifications plus ou moins notables, lorsque la somme des trois arcs ou angles x, y, z est de l'une de ces trois formes $\frac{1}{2}n\varpi$, $n\varpi$, $2n\varpi$.

§. II.

Résolution des triangles sphériques.

Soient x, y, z les trois côtés d'un triangle rectiligne, et X, Y, Z les angles respectivement opposés. En exprimant que chaque côté est égal à la somme des projections des deux autres sur sa direction, on aura les trois équations

$$\left.\begin{aligned} x&=y\text{Cos.}Z+z\text{Cos.}Y\,, \\ y&=z\text{Cos.}X+x\text{Cos.}Z\,, \\ z&=x\text{Cos.}Y+y\text{Cos.}X\,, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Prenant la somme des produits respectifs de ces trois équations par $-x$, $+y$, $+z$, transposant et réduisant, on aura

$$2yz\text{Cos.}X=y^2+z^2-x^2\,. \qquad (38)$$

Soient présentement a, b, c les trois côtés d'un triangle sphérique, et A, B, C les angles respectivement opposés. Par le sommet A soient menées aux côtés b et c des tangentes rencontrant en G et H les prolongemens des rayons menés du centre O de la sphère aux sommets B et C. Les deux triangles rectilignes GOH et GAH donneront (38)

$$2OG.OH\text{Cos.}a=\overline{OG}^2+\overline{OH}^2-\overline{GH}^2\,,$$

$$2AG.AH\text{Cos.}A=\overline{AG}^2+\overline{AH}^2-\overline{GH}^2\,;$$

d'où, en retranchant et simplifiant,

$$OG.OH\text{Cos.}a-AG.AH\text{Cos.}A=\overline{OA}^2\,;$$

ou encore

$$\left(\frac{AG}{OA}\right)\cdot\left(\frac{AH}{OA}\right)\text{Cos.}A=\left(\frac{OG}{OA}\right)\cdot\left(\frac{OH}{OA}\right)\text{Cos.}a-1\ ,$$

c'est-à-dire ;

$$\text{Tang.}b\text{Tang.}c\text{Cos.}A=\text{Sec.}b\text{Sec.}c\text{Cos.}a-1\ ;$$

ou enfin, en multipliant par Cos.bCos.c,

$$\text{Sin.}b\text{Sin.}c\text{Cos.}A=\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c\ . \qquad (i)$$

Par un point pris arbitrairement dans l'intérieur de l'angle trièdre formé par les plans des trois côtés du triangle, et dont le sommet est conséquemment au centre de la sphère, abaissons des perpendiculaires sur les trois faces de cet angle trièdre, et considérons ces perpendiculaires comme les trois arêtes d'un nouvel angle trièdre. Il est aisé de voir que les arêtes du premier seront perpendiculaires aux plans de faces de celui-ci, d'où il suit que les angles dièdres de chacun seront les supplémens des angles plans correspondans de l'autre et réciproquement ; et voilà pourquoi on dit que ces deux angles trièdres sont *supplémentaires*, *réciproques* ou *conjugués l'un de l'autre*.

Si donc du sommet du second comme centre on conçoit une sphère, les côtés du triangle sphérique intercepté seront $\varpi-A$, $\varpi-B$, $\varpi-C$, et les angles respectivement opposés $\varpi-a$, $\varpi-b$, $\varpi-c$; on doit donc avoir (i)

$$\text{Sin.}(\varpi-B)\text{Sin.}(\varpi-C)\text{Cos.}(\varpi-a)=\text{Cos.}(\varpi-A)-\text{Cos.}(\varpi-B)\text{Cos.}(\varpi-C)$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}B\text{Sin.}C\text{Cos.}a=\text{Cos.}A+\text{Cos.}B\text{Cos.}C\ . \qquad (I)$$

Les formules (i) et (I) en donnent chacune deux autres qu'on en déduit en changeant continuellement a et A en b et B, B et b en c et C, c et C en a et A, comme si l'on tournait sur la circonférence d'un cercle, où seraient écrites de suite les lettres a, b, c ou les lettres A, B, C.

Au moyen de cette remarque, la formule (i) donne

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Cos}.B=\mathrm{Cos}.b-\mathrm{Cos}.c\,\mathrm{Cos}.a\ ,\\ \mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Cos}.C=\mathrm{Cos}.c-\mathrm{Cos}.a\,\mathrm{Cos}.b\ ;\end{array}\right\}\quad(39)$$

d'où, en ajoutant et retranchant, tour-à-tour, et décomposant,

$$\mathrm{Sin}.a(\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Cos}.B+\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Cos}.C)=(1-\mathrm{Cos}.a)(\mathrm{Cos}.b+\mathrm{Cos}.c)\ ,$$

$$\mathrm{Sin}.a(\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Cos}.B-\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Cos}.C)=(1+\mathrm{Cos}.a)(\mathrm{Cos}.b-\mathrm{Cos}.c)\ ;$$

multipliant ces deux dernières équations membre à membre, et simplifiant, on aura

$$\mathrm{Sin}.^2c\,\mathrm{Cos}.^2B-\mathrm{Sin}.^2b\,\mathrm{Cos}.^2C=\mathrm{Cos}.^2b-\mathrm{Cos}.^2c=\mathrm{Sin}.^2c-\mathrm{Sin}.^2b\ ,$$

ou, en transposant,

$$\mathrm{Sin}.^2b(1-\mathrm{Cos}.^2C)=\mathrm{Sin}.^2c(1-\mathrm{Cos}.^2B)\ ;$$

ou enfin

$$\mathrm{Sin}.^2b\,\mathrm{Sin}.^2C=\mathrm{Sin}.^2c\,\mathrm{Sin}.^2B\ .$$

En extrayant les racines des deux membres de cette dernière équation, on levera l'ambiguïté qui naît des doubles signes en remarquant que, dans le cas particulier où $b=c$, on doit avoir aussi $B=C$. On trouvera ainsi

$$\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.C=\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.B\ ;$$

d'où, par la permutation des lettres,

$$\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}=\frac{\text{Sin }B}{\text{Sin.}b}=\frac{\text{Sin.}C}{\text{Sin.}c}\,. \qquad (ii)$$

On peut tirer la même chose de la formule (I). Elle donne ; en effet,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}C\text{Sin.}A\text{Cos.}b=\text{Cos.}B+\text{Cos.}C\text{Cos.}A\ ,\\ \text{Sin.}A\text{Sin.}B\text{Cos.}c=\text{Cos.}C+\text{Cos.}A\text{Cos.}B\ ;\end{array}\right\}\ (40)$$

d'où, en ajoutant et retranchant successivement,

$$\text{Sin.}A(\text{Sin.}C\text{Cos.}b+\text{Sin.}B\text{Cos.}c)=(1+\text{Cos.}A)(\text{Cos.}B+\text{Cos.}C)\ ,$$

$$\text{Sin.}A(\text{Sin.}C\text{Cos }b-\text{Sin.}B\text{Cos.}c)=(1-\text{Cos.}A)(\text{Cos.}B-\text{Cos.}C)\ ;$$

ce qui donne, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\text{Sin.}^2C\text{Cos.}^2b-\text{Sin.}^2B\text{Cos.}^2c=\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C=\text{Sin.}^2C-\text{Sin.}^2B\ ;$$

ou bien, en transposant,

$$\text{Sin.}^2B(1-\text{Cos.}^2c)=\text{Sin.}^2C(1-\text{Cos.}^2b)\ ;$$

ou encore

$$\text{Sin.}^2B\text{Sin.}^2c=\text{Sin.}^2C\text{Sin.}^2b\ ;$$

ce qui donne, par l'extraction des racines et la permutation des lettres,

$$\frac{\text{Sin.}a}{\text{Sin.}A}=\frac{\text{Sin.}b}{\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C}\ ; \qquad (II)$$

double égalité qui revient à celle que nous avons trouvée plus haut.

En éliminant Cos.b entre les deux équations (39), mettant pour

$\text{Sin}.b$, dans l'équation résultante, sa valeur $\text{Sin}.c.\dfrac{\text{Sin}.B}{\text{Sin}.C}$, réduisant, divisant par $\text{Sin}.a$ et chassant le dénominateur, il vient

$$\text{Sin}.c\text{Sin}.B\text{Cos}.C=\text{Sin}.a\text{Cos}.c\text{Sin}.C-\text{Cos}.a\text{Sin}.c\text{Cos}.B\text{Sin}.C\ ;$$

d'où, en divisant par $\text{Sin}.c\text{Sin}.C$ et transposant,

$$\text{Cos}.a\text{Cos}\,B=\text{Sin}.a\text{Cot}.c-\text{Sin}.B\text{Cot}.C\ . \qquad (iii)$$

En éliminant $\text{Cos}.B$ entre les deux équations (40), mettant pour $\text{Sin}.B$, dans l'équation résultante, sa valeur $\text{Sin}.C\dfrac{\text{Sin}.b}{\text{Sin}.c}$, réduisant, divisant par $\text{Sin}.A$ et chassant le dénominateur, il vient

$$\text{Sin}.C\text{Sin}.b\text{Cos}.c=\text{Sin}.A\text{Cos}.C\text{Sin}.c+\text{Cos}.A\text{Sin}.C\text{Cos}\,b\text{Sin}.c;$$

d'où, en divisant par $\text{Sin}.C\text{Sin}.c$ et transposant,

$$\text{Cos}.A\text{Cos}.b=\text{Sin}.b\text{Cot}.c-\text{Sin}.A\text{Cot}.C\ . \qquad (III)$$

Il est aisé de voir que les formules (iii) et (III) n'expriment qu'une seule et même propriété du triangle sphérique. Chacune d'elles, par la permutation des lettres, est d'ailleurs susceptible de trois formes différentes.

Les formules (i, I), (ii, II), (iii, III) ne laissent rien à désirer pour la résolution analitique des triangles sphériques ; mais les formules (ii, II) sont les seules qui se prêtent commodément au calcul par logarithmes ; cherchons-en donc d'autres qui jouissent du même avantage, pour suppléer à celles qui en sont privées.

Posons.

$$a+b+c=2s\ , \qquad (iv)$$

$$A+B+C=2S\ . \qquad (IV)$$

Les formules (5), (i, I) donnent

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}A}{2}}=\sqrt{-\frac{\text{Cos}\,a-\text{Sin.}b\text{Sin}\,c-\text{Cos.}b\text{Cos.}c}{2\text{Sin.}b\text{Sin.}c}},$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}a}{2}}=\sqrt{-\frac{\text{Cos.}A-\text{Sin.}B\text{Sin.}C+\text{Cos.}B\text{Cos.}C}{2\text{Sin.}B\text{Sin.}C}},$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}A}{2}}=\sqrt{+\frac{\text{Cos.}a+\text{Sin.}b\text{Sin}\,c-\text{Cos.}b\text{Cos.}c}{2\text{Sin.}b\text{Sin.}c}},$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}a}{2}}=\sqrt{+\frac{\text{Cos.}A+\text{Sin.}B\text{Sin.}C+\text{Cos.}B\text{Cos.}C}{2\text{Sin.}B\text{Sin.}C}},$$

d'où, en vertu des formules (18), (20), (21), (22),

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin}\,(s-b)\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}, \qquad (v)$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\text{Cos.}S\text{Cos.}(S-A)}{\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}, \qquad (V)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}, \qquad (vi)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{Cos.}(S-B)\text{Cos.}(S-C)}{\text{Sin.}B\text{Sin.}C}}. \qquad (VI)$$

En posant, pour abréger,

$$p^2=+\text{Sin.}s\,\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c), \qquad (vii)$$

$$P^2=-\text{Cos.}S\text{Cos.}(S-A)\text{Cos.}(S-B)\text{Cos.}(S-C), \qquad (VII)$$

on tire encore de là, au moyen de la formule (7),

$$\mathrm{Sin}.A=\frac{2p}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}\,,\quad (viii)\qquad \mathrm{Sin}\,a=\frac{2P}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}\,.\quad (VIII)$$

Par les formules (v, V), (vi, VI), on a

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Sin}.(s-c)\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.a}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}\,(s-b)}{\mathrm{Sin}.c\,\mathrm{Sin}.a}},\\ \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Sin}.(s-a)\mathrm{Sin}.(s-b)}{\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.b}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}\,(s-c)}{\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.b}};\end{array}\right\}\quad(41)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}b=\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Cos}.S(\mathrm{Cos}.S-B)}{\mathrm{Sin}.C\,\mathrm{Sin}.A}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Cos}\,(S-C)\mathrm{Cos}\,(S-A)}{\mathrm{Sin}.C\,\mathrm{Sin}.A}},\\ \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}c=\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Cos}.S\,\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.A\,\mathrm{Sin}.B}}, & \mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mathrm{Cos}.(S-B)}{\mathrm{Sin}.A\,\mathrm{Sin}.B}},\end{array}\right\}\quad(42)$$

De ces dernières on conclut, à l'aide des formules (1, 2, 3, 4, 7)

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(B\pm C)=\frac{\mathrm{Sin}.(s-c)\pm\mathrm{Sin}.(s-b)}{\mathrm{Sin}.a}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.s\,\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}}=\frac{\mathrm{Sin}.(s-c)\pm\mathrm{Sin}.(s-b)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}a}\,\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}A\,,$$

$$\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(B\pm C)=\frac{\mathrm{Sin}.s\mp\mathrm{Sin}.(s-a)}{\mathrm{Sin}.a}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}.(s-b)\mathrm{Sin}.(s-c)}{\mathrm{Sin}.b\,\mathrm{Sin}.c}}=\frac{\mathrm{Sin}.s\mp\mathrm{Sin}\,(s-a)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}a}\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}A\,,$$

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}(b\pm c)=\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\pm\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.A}\cdot\sqrt{-\frac{\mathrm{Cos}.S\,\mathrm{Cos}.(S-A)}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}}=\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\pm\mathrm{Cos}.(S-C)}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}\,\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a\,,$$

$$\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}(b\pm c)=\frac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mp\mathrm{Cos}.S}{\mathrm{Sin}.A}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}.(S-B)\mathrm{Cos}.(S-C)}{\mathrm{Sin}.B\,\mathrm{Sin}.C}}=\frac{\mathrm{Cos}.(S-A)\mp\mathrm{Cos}.S}{2\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}a\,.$$

dédoublant et décomposant les seconds membres, à l'aide des formules (8), (9), (10), (11), on trouvera également, soit par les deux premières, soit par les deux dernières équations,

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B+C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}, \qquad (ix, IX)$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}; \qquad (x, X)$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}, \ (xi) \quad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}. \ (XI)$$

on reconnaît là les quatre formules trouvées par MM. Gauss et Delambre, chacun de leur côté (*).

De ces formules, on conclut, par division,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tang.}\frac{1}{2}(B+C)=\dfrac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)}\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,, \\ \text{Tang.}\frac{1}{2}(B-C)=\dfrac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c)}\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,,\end{array}\right\}(xii)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tang.}\frac{1}{2}(b+c)=\dfrac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(B+C)}\text{Tang}\frac{1}{2}a\,, \\ \text{Tang.}\frac{1}{2}(b-c)=\dfrac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+C)}\text{Tang.}\frac{1}{2}a\,.\end{array}\right\}(XII)$$

Ce sont les analogies de Néper, qui complètent la série des formules usuelles nécessaires pour la résolution arithmétique des triangles.

(*) Voyez, sur ce sujet, *Theoria motûs corporum cœlestium*, *etc.*, de Gauss, page 51, la *Connaissance des temps* pour 1808, ou celle de 1812, page 349, ou la grande *Astronomie* de Delambre, tome I, page 157, ou l'*Abrégé*, page 110, ou encore la page 351 du III.e volume du présent recueil.

§. III.

Recherche des sommes ou différences d'angles ou de côtès.

La combinaison des formules (41) avec les formules (v) et (vi) donne

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}s}{\text{Sin.}a}\,, \qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}a}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}s=\frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}\,, \qquad (xiii)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{\text{Sin.}a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}\,. \qquad (xiv)$$

La combinaison des formules (42) avec les formules (V) et (VI) donne ensuite

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=-\frac{\text{Cos.}S}{\text{Sin.}A}\,, \qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Cos.}(S-A)}{\text{Sin.}A}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Cos}\,S=-\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}\,, \qquad (XIII)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=+\frac{\text{Sin.}A\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}\,. \qquad (XIV)$$

Mais les formules ($viii$, $VIII$) donnent (7)

$$\text{Sin}\,a\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C=\frac{P}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xv)$$

$$\text{Sin.}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\frac{p}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}\,, \qquad (XV)$$

$$\text{Sin.}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\frac{P}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}\,, \qquad (xvi)$$

$$\text{Sin.}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c=\frac{p}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}\,. \qquad (XVI)$$

Introduisant ces valeurs dans les numérateurs des quatre dernières formules, elles deviendront

$$\text{Sin.}s=\frac{P}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}\,, \qquad (xvii)$$

$$\text{Cos.}S=-\frac{p}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos}\tfrac{1}{2}c}\,, \qquad (XVII)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{P}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}\,, \qquad (xviii)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{p}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}\,. \qquad (XVIII)$$

Les formules (*viii*) et (*VIII*), divisées l'une par l'autre, donnent (*ii*)

$$\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}=\frac{p}{P}\cdot\frac{\text{Sin }B}{\text{Sin.}b}\cdot\frac{\text{Sin.}C}{\text{Sin.}c}=\frac{p}{P}\cdot\frac{\text{Sin.}^3A}{\text{Sin.}^3a}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{P}{p}=\frac{\text{Sin.}A}{\text{Sin.}a}\,. \qquad (xix\,,\,XIX)$$

en introduisant tour-à-tour les valeurs de Sin.a et Sin.A, tirées de cette dernière formule, dans les formules (*xiii*), (*XIII*), (*xiv*), (*XIV*), et ayant égard à la formule (7), on trouvera

$$\text{Sin.}s=\frac{2p}{P}\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xx)$$

$$\text{Cos.}S=-\frac{2P}{p}\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\ ; \qquad (XX)$$

$$\text{Sin}\,(s-a)=\frac{2p}{P}\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxi)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{2P}{p}\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\ . \qquad (XXI)$$

Si l'on multiplie respectivement ces quatre valeurs par les quatre qui les précèdent immédiatement, on aura encore

$$\text{Sin.}^2s=p\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Cot.}\tfrac{1}{2}B\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxii)$$

$$\text{Cos.}^2S=P\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Tang.}\tfrac{1}{2}b\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\ , \qquad (XXII)$$

$$\text{Sin.}^2(s-a)=p\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C\ , \qquad (xxiii)$$

$$\text{Cos.}^2(S-A)=P\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cot.}\tfrac{1}{2}b\text{Cot.}\tfrac{1}{2}c\ . \qquad (XXIII)$$

Les formules (ii, II) reviennent (7) à

$$\frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin}\,b\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b}\ , \qquad \frac{\text{Sin.}a\text{Cos.}\frac{1}{2}C}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\ ,$$

$$\frac{\text{Sin.}A\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Sin.}B\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}b}\ , \qquad \frac{\text{Sin.}A\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\ ;$$

au moyen desquelles les formules $(xiii)$, $(XIII)$, (xiv), (XIV) prennent cette nouvelle forme

$$\text{Sin.}s=\frac{\text{Sin.}b\text{Cos.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}B}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xxiv)$$

$$-\text{Cos.}S=\frac{\text{Sin.}B\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Cos.}\frac{1}{2}b}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (XXIV)$$

$$\text{Sin.}(s-a)=\frac{\text{Sin.}b\text{Sin.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B}=\frac{\text{Sin.}c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,, \qquad (xxv)$$

$$\text{Cos.}(S-A)=\frac{\text{Sin.}B\text{Cos.}\frac{1}{2}c\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b}=\frac{\text{Sin.}C\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\,. \qquad (XXV)$$

En vertu des formules (29) et (30), les valeurs (vii) et (VII) peuvent être écrites ainsi

$$p^2=\tfrac{1}{4}(1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c)\,, \qquad (xxvi)$$

$$P^2=\tfrac{1}{4}(1-\text{Cos.}^2A-\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C-2\text{Cos.}A\text{Cos.}B\text{Cos.}C)\,. \qquad (XXVI)$$

En transformant les cosinus d'angles en cosinus de moitiés, dans la première et en sinus de moitiés dans la seconde, à l'aide des formules (5), on trouvera

$$p^2=4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-(1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c)^2\,, \qquad (xxvii)$$

$$P^2=4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-(1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C)^2\,; \qquad (XXVII)$$

ou encore

$$p^2=4\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c-(1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c)^2\,, \qquad (xxviii)$$

$$P^2=4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C-(1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C)^2\,. \qquad (XXVIII)$$

Cela posé, on a, par les formules $(xvii)$ et $(XVII)$,

$$\text{Cos.}s=\sqrt{1-\text{Sin.}^2s}=\frac{\sqrt{4\text{Sin.}^2\frac{1}{2}A\text{Sin.}^2\frac{1}{2}B\text{Sin.}^2\frac{1}{2}C-P^2}}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{Sin.}S=\sqrt{1-\text{Cos.}^2S}=\frac{\sqrt{4\text{Cos.}^2\frac{1}{2}a\text{Cos.}^2\frac{1}{2}b\text{Cos.}^2\frac{1}{2}c-p^2}}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\ ;$$

à l'aide des formules $(xxvii)$ et $(XXVII)$, ces dernières deviendront

$$\text{Cos.}s=\frac{1-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}C}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}=-\frac{1-\text{Cos.}A-\text{Cos.}B-\text{Cos.}C}{4\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C},\ (xxix)$$

$$\text{Sin.}S=-\frac{1-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}c}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}=\frac{1+\text{Cos}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}{4\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}.\ (XXIX)$$

On aussi, par les formules $(xviii)$ et $(XVIII)$,

$$\text{Cos.}(s-a)=\sqrt{1-\text{Sin.}^2(s-a)}=\frac{\sqrt{4\text{Sin.}^2\frac{1}{2}A\text{Cos.}^2\frac{1}{2}B\text{Cos.}^2\frac{1}{2}C-P^2}}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{Sin.}(S-A)=\sqrt{1-\text{Cos.}^2(S-A)}=\frac{\sqrt{4\text{Cos.}^2\frac{1}{2}a\text{Sin.}^2\frac{1}{2}b\text{Sin.}^2\frac{1}{2}c-p^2}}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\ ;$$

à l'aide des formules $(xxviii)$ et $(XXVIII)$, ces dernières deviendront

$$\text{Cos.}(s-a)=\frac{1+\text{Sin.}^2\frac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}C}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C}=\frac{1-\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}{4\text{Sin.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B\text{Cos.}\frac{1}{2}C},\ (xxx)$$

$$\text{Sin.}(S-A)=\frac{1+\text{Cos.}^2\frac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}c}{2\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}=\frac{1+\text{Cos.}a-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}{4\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}.\ (XXX)$$

La comparaison des formules $(xvii)$, $(XVII)$, $(xviii)$, $(XXIII)$ aux formules $(xxix)$, $(XXIX)$, (xxx), (XXX), donne encore

$$\text{Tang.}s=-\frac{2P}{1-\text{Cos.}A-\text{Cos.}B-\text{Cos.}C},\qquad (xxxi)$$

$$\text{Cot.}S=-\frac{2p}{1+\text{Cos.}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}\,, \qquad (XXXI)$$

$$\text{Tang.}(s-a)=\frac{2P}{1-\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}\,, \qquad (xxxii)$$

$$\text{Cot.}(S-A)=\frac{2p}{1+\text{Cos.}a-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}\,. \qquad (XXXII)$$

En formant les expressions analogues, relatives à $s-b$, $s-c$, $S-B$, $S-C$, on en conclura

$$\text{Cot.}(s-a)+\text{Cot.}(s-b)+\text{Cot.}(s-c)=\frac{3+\text{Cos.}A+\text{Cos.}B+\text{Cos.}C}{2P}=\frac{\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}A+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}B+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}C}{P}\,, \quad (xxxiii)$$

$$\text{Tang.}(S-A)+\text{Tang.}(S-B)+\text{Tang.}(S-C)=\frac{3-\text{Cos.}a-\text{Cos.}b-\text{Cos.}c}{2p}=\frac{\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c}{p}\,. \quad (XXXIII)$$

Par les formules (5) et par la formule $(xxix)$, on a

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}s}{2}}=\sqrt{-\frac{1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}s}{2}}=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{-4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (34) et (35), on pourra leur donner cette forme

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{-\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,, \quad (xxxiv)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}}\,; \quad (xxxv)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}s=\sqrt{-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}\,. \quad (xxxvi)$$

Par les mêmes formules (5), et par la formule $(XXIX)$, on a

$$-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}S}{2}}=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c+2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,,$$

$$+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}S}{2}}=\sqrt{-\frac{1-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (29) et (30), on pourra leur donner cette forme

$$-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,, \quad (XXXV)$$

$$+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}\,; \quad (XXXIV)$$

d'où encore

$$-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)=\sqrt{\text{Tang.}\tfrac{1}{2}s\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-c)}\,. \text{(*)} \quad (XXXVI)$$

Par les formules (5) et par la formule (xxx), on trouve

(*) Si l'on désigne par T l'aire du triangle, on aura, comme l'on sait,

$$T=A+B+C-\varpi=2S-\varpi\,, \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{2}T=-(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,$$

et par conséquent

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}T=-\text{Cos.}S\,, \quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}T=\text{Sin.}S\,, \quad \text{Tang.}\tfrac{1}{2}T=-\text{Cot.}S\,,$$

on aura en outre $\tfrac{1}{4}T=-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)$, d'où

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}T=-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,, \text{Cos.}\tfrac{1}{4}T=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,, \text{Tang.}\tfrac{1}{4}T=-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\,,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}(s-a)}{2}}=\sqrt{-\frac{1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}(s-a)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C}{4\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (35) et (36), on pourra leur donner cette forme

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{-\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;\quad(xxxvii)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-B)\}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}}\,;\quad(xxxviii)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-a)=\sqrt{-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\varpi-S)\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(S-B)\}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-C)\}}\,.\quad(xxxix)$$

Par les mêmes formules (5) et par la formule (*XXX*), on trouve

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{1-\text{Sin.}(S-A)}{2}}=\sqrt{\frac{-1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\}=\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}(S-A)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c+2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}{4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}\,;$$

comparant ces formules aux formules (31) et (32), on pourra leur donner cette forme

---

de sorte que les formules (*XIII*), (*XVII*), (*XX*), (*XXIV*), (*XXIX*), (*XXXI*), (*XXXIV*), (*XXXV*), (*XXXVI*) offrent autant de moyens d'obtenir l'aire d'un triangle sphérique en fonction de trois de ses parties. On reconnaîtra en particulier la dernière pour celle de M. Lhuilier, donnée par M. Legendre, dans ses *Elémens de Géométrie*.

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\right\}=\sqrt{\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}s\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}, \quad (XXXVIII)$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\right\}=\sqrt{\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}s\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}}; \quad (XXXVII)$$

d'où encore

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\varpi-(S-A)\right\}=\sqrt{\text{Cot.}\tfrac{1}{2}s\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(s-a)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-b)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(s-c)}. \quad (XXXIX)$$

§. IV.

Recherches diverses.

Soit d l'arc de grand cercle mené du sommet A au milieu A' du côté a ; il divisera notre triangle en deux autres, pour lesquels on aura (i)

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}d\text{Cos.}AA'C=\text{Cos.}b-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}d\text{Cos.}AA'B=\text{Cos.}c-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d\ ;$$

en prenant la somme de ces deux équations et observant que

$$\text{Cos.}AA'C+\text{Cos.}AA'B=0\ ,$$

il viendra, en transposant,

$$2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}d=\text{Cos.}b+\text{Cos.}c=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Cos.}d = \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(b+c)\text{Cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a} \text{ . (*)} \qquad (xl)$$

L'arc d étant déterminé par cette formule, on trouvera ensuite (ii, II), $(viii)$

$$\text{Sin.}(d, a) = \frac{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}{\text{Sin.}d}, \qquad (xli)$$

$$\text{Sin.}(d, b) = \frac{p}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}b\text{Sin.}d}, \quad \text{Sin.}(d, c) = \frac{p}{\text{Cos.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}c\text{Sin.}d}. \qquad (xlii)$$

Soit D l'angle que fait avec le côté a l'arc de grand cercle a' qui divise l'angle A en deux parties égales ; il divisera notre triangle en deux autres dans lesquels on aura (I)

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}D\text{Cos.}a' = \text{Cos.}B + \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}D,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin}D\text{Cos.}a' = \text{Cos.}C - \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}D;$$

en prenant la différence de ces deux équations, il viendra, en transposant,

$$2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}D = \text{Cos.}C - \text{Cos.}B = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(B-C),$$

et, par suite,

$$\text{Cos.}D = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+C)\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}. \qquad (XL)$$

L'angle D étant déterminé, par cette formule, on trouvera ensuite (ii, II) et $(VIII)$

(*) Cette formule a été donnée par M. Querret, dans la *Connaissance des temps* pour 1822, page 335.

$$\text{Sin.}DA=\frac{\text{Sin.}B\text{Sin.}C}{\text{Sin.}D}\,, \qquad (XLI)$$

$$\text{Sin.}DB=\frac{P}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}B\text{Sin.}D}\,, \quad \text{Sin.}DC=\frac{P}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}C\text{Sin.}D}\,. \quad (XLII)$$

Soient O le pôle et R le rayon sphérique du cercle circonscrit à notre triangle. On sait que, si de ce point O on abaisse des arcs perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, ils tomberont sur leurs milieux ; de sorte qu'en désignant par A', B', C' les pieds de ces arcs perpendiculaires, on aura

$$A'B=A'C=\tfrac{1}{2}a\,, \quad B'C=B'A=\tfrac{1}{2}b\,, \quad C'A=C'B=\tfrac{1}{2}c\,,$$

et, de plus,

$$OA=OB=OC=R\,,$$

Cela posé, on aura

$$\text{Ang.}OAB+\text{Ang.}OAC=A\,,$$

$$\text{Ang.}OBC+\text{Ang.}OBA=B\,,$$

$$\text{Ang.}OCA+\text{Ang.}OCB=C\,;$$

retranchant la première de la somme des deux autres, il viendra

$$\text{Ang.}OBC+\text{Ang.}OCB+\text{Ang.}OBA-\text{Ang.}OAB+\text{Ang.}OCA-\text{Ang.}OAC=B+C-A$$

mais, dans les triangles isocèles AOB, BOC, COA, on a

$$\text{Ang.}OBC=\text{Ang.}OCB,\quad \text{Ang.}OCA=\text{Ang.}OAC,\quad \text{Ang.}OAB=\text{Ang.}OBA$$

réduisant donc, à l'aide de ces relations, il viendra

$$2\text{Ang.}OBC=2\text{Ang.}OCB=B+C-A=2(S-A)\ ,$$

d'où

$$\text{Ang.}OBC=\text{Ang.}OCB=S-A\ ;$$

or, dans le triangle sphérique rectangle $OA'B$, on a

$$\text{Tang.}OB\text{Cos.}OBC=\text{Tang.}BA'\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}R\text{Cos.}(S-A)=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\ ;$$

donc

$$\text{Cot.}R=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-A)\ ; \qquad (xliii)$$

c'est-à-dire (XIV),

$$\text{Cot.}R=\frac{\text{Sin.}A\text{Cos.}\frac{1}{2}b\text{Cos.}\frac{1}{2}c}{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}\ ; \qquad (xliv)$$

ou encore $(viii)$,

$$\text{Cot.}R=\frac{p}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}a\text{Sin.}\frac{1}{2}b\text{Sin.}\frac{1}{2}c}\ . \qquad (xlv)$$

voilà donc le rayon sphérique du cercle circonscrit exprimé par une fonction des trois côtés à laquelle le calcul par logarithmes est facilement applicable.

Si l'on veut avoir le même rayon en fonction des trois angles, il ne s'agira que de mettre pour le dénominateur sa valeur donnée par la formule (XX), il viendra ainsi

$$\text{Cot.}R=-\frac{P}{\text{Cos.}S}\ . \qquad (xlvi)$$

Soient présentement o le pôle et r le rayon sphérique du cercle inscrit, on sait que si de ce point on conduit des arcs de grands cercles aux trois sommets, ces arcs diviseront les angles du triangle en deux parties égales. Si en outre on désigne par A'', B'', C'' les points de contacts respectifs avec les côtés, on aura

$$A''B+A''C=a\ ,\quad B''C+B''A=b\ ,\quad C''A+C''B=c\ ;$$

d'où, en retranchant la première équation de la somme des deux autres,

$$AB''+AC''+BC''-BA''+CB''-CA''=b+c-a\ ;$$

mais on a ici

$$AB''=AC''\ ,\quad BC''=BA''\ ,\quad CB''=CA''\ ;$$

réduisant donc, à l'aide de ces relations, il viendra

$$2AB''=2AC''=b+c-a=2(s-a)\ ;$$

d'où

$$AB''=s-a\ ;$$

mais le triangle sphérique rectangle $oB''A$ donne

$$\text{Tang.}oB''=\text{Sin.}AB''\text{Tang.}oAB''\ ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}r=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-a)\ ;\qquad (XLIII)$$

ou bien (xiv)

$$\text{Tang.}r=\frac{\text{Sin.}a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}\ ;\qquad (XLIV)$$

ou encore ($VIII$)

$$\text{Tang.}r=\frac{p}{2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C}\,. \qquad (XLV)$$

Voilà donc le rayon sphérique du cercle inscrit exprimé par une fonction des trois angles à laquelle le calcul par logarithmes est facilement applicable.

Si l'on veut avoir le même rayon en fonction des trois côtés, il ne s'agira que de mettre pour le dénominateur sa valeur donnée par la formule (xx), il viendra ainsi

$$\text{Tang.}r=\frac{p}{\text{Sin.}s}\,. \qquad (XLVI)$$

Au moyen des formules auxquelles nous venons de parvenir, on obtiendrait facilement les rayons sphériques des cercles inscrit et circonscrit, en fonction de trois quelconques des six parties du triangle.

Nous ne devons pas quitter ce sujet sans rappeler qu'il a été démontré (tome XIV, page 61) qu'en désignant par δ la distance des pôles, on a

$$\text{Sin.}^2\delta=\frac{\text{Sin.}(R+r)+\text{Sin.}(R-r)}{2}\cdot\frac{3\text{Sin.}(R+r)-\text{Sin.}(R-r)}{2}\,. \qquad (43)$$

Si l'on prolonge les côtés du triangle sphérique deux à deux au-delà de leur point de concours, jusqu'à ce qu'ils rencontrent de nouveau la circonférence dont le troisième côté fait partie, on formera trois nouveaux triangles sphériques tels que chacun aura un angle égal, comme opposé au sommet, à l'un des angles du triangle proposé, compris entre deux côtés qui seront les supplémens des deux côtés correspondans de celui-là. En supposant donc qu'on ait circonscrit des cercles aux trois triangles ainsi formés, et qu'on désigne par R', R'', R''' les rayons sphériques de ces cercles, on aura $(xliii)$ et $(xlvi)$

$\text{Cot.}R'=-\text{Cot.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}S$, $\text{Cot.}R''=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-C)$, $\text{Cot.}R'''=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}(S-B)$;

multipliant ces équations entre elles et par l'équation (*xliii*) en ayant égard à la formule (*VII*), il viendra

$$\text{Cot.}R\text{Cot.}R'\text{Cot.}R''\text{Cot}\,R'''=P^2 . \qquad (XLVII)$$

Si l'on prolonge les côtés du triangle sphérique deux à deux jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau, on formera trois nouveaux triangles sphériques tels que chacun aura un côté commun avec le triangle proposé, compris entre deux angles qui seront les supplémens de leurs correspondans dans le même triangle (*). En supposant donc qu'on ait inscrit des cercles aux trois triangles ainsi formés, et qu'on désigne par r', r'', r''' les rayons sphériques de ces cercles, on aura (*XLIII*) et (*XLVI*)

$\text{Tang.}r'=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}s$, $\text{Tang.}r''=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-c)$, $\text{Tang.}r'''=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}(s-b)$;

multipliant ces équations entre elles et par l'équation (*XLIII*), en ayant égard à la formule (*vii*), il viendra

$$\text{Tang.}r\text{Tang.}r'\text{Tang}\,r''\text{Tang}\,r'''=p^2 . \qquad (xlvii)$$

Cherchons quel est, sur la sphère, le lieu des sommets A des triangles sphériques qui ont tous la base commune a et dans lesquels en outre la somme des angles est constante. Dans cette hypothèse on doit avoir $\text{Cos.}S=$Constante ; c'est-à-dire (*XIII*),

---

(*) Ces trois derniers sont ce que Viète appelle les *Anapléroses* du triangle proposé ; ils sont respectivement opposés, sur la sphère, aux trois dont il a été question ci-dessus.

$$\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a}=\text{Constante}\ ;$$

ou, plus simplement,

$$\text{Sin.}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Constante}\ ;$$

d'où encore

$$\frac{\text{Sin.}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a}=\text{Constante}\ .$$

Or, cette dernière expression est évidemment (*xliv*) celle du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle dont un des côtés serait le côté a, et les deux angles adjacens les supplémens respectifs des angles B et C; donc, si sur une même base a on construit une suite de triangles sphériques dont la somme des angles soit constante (*), et qu'ensuite on construise pour chacun d'eux, le triangle secondaire dont il vient d'être question, les cercles circonscrits aux triangles secondaires seront tous égaux ; ils auront donc aussi le même pôle, puisqu'ils passeront par les deux mêmes sommets B et C, c'est-à-dire qu'ils se confondront en un seul auquel tous ces triangles seront inscrits. Mais, si l'on considère les triangles formés en prolongeant les côtés b et c au-delà du sommet A des quantités respectives $\varpi-b$, $\varpi-c$, ils seront respectivement égaux et opposés à ceux-là, et seront conséquemment comme eux inscrits à un même cercle, dont le pôle sera à l'autre extrémité du diamètre de la sphère conduit par le pôle du premier ; puis donc que ces nouveaux triangles ont tous leur sommet A commun avec les triangles construits sur la base commune a de manière que la somme de leurs angles soit constante, il s'ensuit que ces

(*) Et qui auront conséquemment même surface.

derniers ont aussi leurs sommets opposés à a sur la circonférence de ce même cercle.

Ainsi, *le lieu des sommets de tous les triangles sphériques de même base et de même somme d'angles est la circonférence d'un petit cercle de la sphère.* C'est le théorème de Lexell (*Nova acta Petropolitana*, tom. V, pag. 1) qu'a démontré M. Legendre, dans la X.e note de ses *Élemens de Géométrie*.

Cherchons enfin quelle est, sur la surface de la sphère, la courbe enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont l'angle au sommet commun et même périmètre. Dans cette hypothèse, on doit avoir $\mathrm{Cos}.s=$Constante ; c'est-à-dire $(xiii)$

$$\frac{\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}B\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}=\text{Constante} ;$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}B\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}C=\text{Constante} ;$$

d'où encore

$$\frac{\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}B\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}=\text{Constante} .$$

Or, cette dernière expression est évidemment $(XLIV)$ celle du rayon sphérique du cercle inscrit au triangle dont un des angles serait l'opposé au sommet de l'angle A, et les deux côtés qui le comprendraient les supplémens respectifs des côtés b et c ; donc, si avec un même angle du sommet A on construit une suite de triangles sphériques de même périmètre, et qu'ensuite, pour chacun d'eux, on construise le triangle secondaire dont il vient d'être question, les cercles circonscrits aux triangles secondaires seront tous égaux ; ils auront donc aussi le même pôle, puisqu'ils toucheront tous les deux mêmes arcs de cercles b et c ; c'est-à-dire qu'ils se confondront tous en un seul, auquel tous ces triangles seront circonscrits. Mais, si l'on considère les triangles formés par le côté a et les prolongemens des deux autres b et c au-delà de C et B, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau, ils seront respectivement égaux et opposés à ceux-là, et seront conséquemment comme eux circonscrits à un même cercle, dont le pôle sera à l'autre extrémité du diamètre de la sphère conduit par le pôle du premier ; puis donc que ces nouveaux triangles ont tous le côté a commun avec ceux qui ont l'angle A commun et même périmètre, il s'ensuit que ces derniers ont aussi leur côté a tangent à ce même cercle.

Ainsi, *l'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et même périmètre est la circonférence d'un petit cercle de la sphère.* Ce théorème, que celui de Lexell aurait dû faire pressentir, n'avait pas encore été démontré.

Si l'on fait attention à la manière dont nous avons numéroté nos formules, on reconnaîtra qu'excepté les formules dans lesquelles les angles et les côtés qui leur sont respectivement opposés figurent de la même manière, toutes les formules de la trigonométrie sphérique sont doubles, et peuvent être distribuées en deux séries de telle sorte qu'on passera d'une formule de l'une quelconque des deux séries à sa correspondante dans l'autre série, en y remplaçant simplement les côtés par les supplémens des angles et les angles par les supplémens des côtés. Cette correspondance, qui n'a pas échappé à M. Sorlin, est une suite évidente de la propriété des triangles polaires ou supplémentaires l'un de l'autre ; et il en résulte qu'en général il n'est aucun théorème ou problème de trigonométrie sphérique auquel il n'en réponde nécessairement un autre dans lequel les supplémens des angles ont pris la place des côtés et *vice versâ*.

On doit remarquer aussi que toute formule de trigonométrie sphérique dans laquelle les arcs ne figurent que par leurs sinus ou leurs tangentes, et qui est homogène par rapport à ces deux sortes de fonctions, donne naissance à une formule de géométrie plane qu'on en déduit en substituant simplement les arcs à leurs sinus et tangentes et les considérant ensuite comme des lignes droites; ce qui revient évidemment à supposer que le rayon de la sphère devient infini. Avec cette attention, on déduira des diverses formules auxquelles nous sommes parvenus les formules suivantes, en regard de chacune desquelles nous avons placé le numéro de la formule de trigonométrie sphérique de laquelle elle est déduite.

$$\frac{\mathrm{Sin}.A}{a}=\frac{\mathrm{Sin}.B}{b}=\frac{\mathrm{Sin}.C}{c}, \qquad (ii,\ II)$$

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad (v) \qquad \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \qquad (vi)$$

$$p^2=s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad (vii)$$

$$\mathrm{Sin}.A=\frac{2p}{bc}, \qquad (viii)$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}A}=\frac{b-c}{a}, \quad (ix,\ IX) \qquad \frac{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A}=\frac{b+c}{a}, \quad (XI)$$

$$\mathrm{Tang}.\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\mathrm{Cot}.\tfrac{1}{2}A, \qquad (xii)$$

$$\frac{s}{a}=\frac{\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}B\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}C}{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A}, \quad (xiii) \qquad \frac{s-a}{a}=\frac{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}B\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}C}{\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A}, \quad (xiv)$$

$$s^2=p\mathrm{Cot}.\tfrac{1}{2}A\mathrm{Cot}.\tfrac{1}{2}B\mathrm{Cot}.\tfrac{1}{2}C, \qquad (xxii)$$

$$(s-a)^2=p\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}A\mathrm{Tang}.\tfrac{1}{2}B\mathrm{Tang}.\tfrac{1}{2}C, \qquad (xxiii)$$

$$s=\frac{b\text{Cos.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}B}=\frac{c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Cos.}\frac{1}{2}B}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}\,; \qquad (xxiv)$$

$$s-a=\frac{b\text{Sin.}\frac{1}{2}C\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}B}=\frac{c\text{Cos.}\frac{1}{2}A\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C}\,; \qquad (xxv)$$

$$r=(s-a)\text{Tang.}\frac{1}{2}A=\frac{a\text{Sin.}\frac{1}{2}B\text{Sin.}\frac{1}{2}C}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}=\frac{p}{s}\,, \qquad (XLIII,\ XLIV,\ XLVI)$$

$$\delta^2=R(R-2r)\,, \qquad (43)$$

$$rr'r''r'''=p^2\,.\ (*) \qquad (xlvii)$$

Le théorème démontré en dernier lieu donne aussi ce théorème de géométrie élémentaire, qui ne paraît pas connu ; mais de la vérité duquel on peut s'assurer directement par des considérations très-simples : *l'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont l'angle du sommet commun et le même périmètre est une circonférence de cercle* (**).

(*) Ce théorème a été donné par M. Lhuilier, dans ses *Élémens d'analise géométrique et d'analise algébrique*.

(**) L'auteur du mémoire que nous venons d'extraire, et de plusieurs autres qu'il nous a promis de mettre successivement à notre disposition, ancien élève particulier de Lalande et de Delambre, et qui a concouru, durant plusieurs années, à la rédaction des volumes de la *Connaissance des temps*, joint à beaucoup de savoir en astronomie et à une grande dextérité à manier les formules trigonométriques, une écriture extrêmement lisible et agréable à l'œil, genre de mérite assez rare chez les savans. A ces divers titres, il pourrait être utilement employé soit au *Bureau des longitudes*, soit dans les *Bureaux du Cadastre*, soit encore comme