ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

**Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 132 du présent volume**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 15 (1824-1825), p. 236-242
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__236_0>

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 132 du présent volume ;*

Par M. Querret, ancien chef d'institution.

PROBLÈME I. *Entre tous les arcs de cercles de même longueur et de différens rayons, quel est celui qui comprend le plus grand segment circulaire entre lui et sa corde ?*

*Solution.* Pour fixer les idées, supposons qu'il soit question d'un segment plus petit que le demi-cercle. Soient $a$ la longueur constante de l'arc dont il s'agit, $x$ la longueur variable de son rayon, et $y$ l'aire du segment qui lui répond, nous trouverons successivement

$$\text{Angle du secteur} \ldots = \frac{a}{x}\,,$$

$$\text{Aire du secteur} \ldots = \frac{1}{2}ax\,,$$

$$\text{Corde de l'arc} \ldots = 2x\,\text{Sin.}\frac{a}{2x}\,,$$

$$\text{Flèche de l'arc} \ldots = x\left(1-\text{Cos.}\frac{a}{2x}\right),$$

$$\text{Hauteur du triangle.} \;.\; = x\,\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}\;,$$

$$\text{Aire du triangle.} \;.\;.\;.\; = x^2\text{Sin.}\frac{a}{2x}\;\text{Cos.}\,\frac{a}{2x} = \tfrac{1}{2}x^2\text{Sin.}\,\frac{a}{x}\;,$$

$$y = \text{secteur} - \text{triangle.} \; = \tfrac{1}{2}ax - \tfrac{1}{2}x^2\text{Sin.}\frac{a}{x}\;.$$

Nous remarquerons que cette dernière formule convient également au cas où le segment devrait excéder le demi-cercle, pourvu que, comme on le pratique ordinairement, $\text{Sin.}\frac{a}{x}$ soit pris avec son signe.

On peut même concevoir tels segmens de cercles qui excèdent tant qu'on voudra le cercle auquel ils se trouvent correspondre. Un segment de cercle est, en effet, la surface comprise entre un arc quelconque et sa corde; or, rien n'empêche qu'on ne prenne l'arc plus grand qu'une circonférence et même plus grand que tant de circonférences on voudra; et alors le segment vaudra lui-même plus d'un cercle entier, et pourra même surpasser tel nombre de cercles on voudra. Cette remarque rendra plus faciles à interpréter les résultats que nous allons obtenir.

En différentiant deux fois consécutivement la valeur de $y$, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}a - x\,\text{Sin}\,\frac{a}{x} + \tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\;,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-x^2}{x^2}\,\text{Sin.}\,\frac{a}{x} + \frac{a}{x}\;\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\;.$$

Suivant donc les théories connues, on obtiendra la condition commune au *maximum* et au *minimum* en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et les valeurs de $x$ qui résulteront de cette condition répondront au *maximum* ou au *minimum* suivant qu'elles rendront $\frac{d^2y}{dx^2}$ *négatif* ou *positif*.

L'égalité à zéro de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ donne

$$a\left(1+\text{Cos.}\,\frac{a}{x}\right)-2x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{x}=0,$$

ou bien

$$2a\,\text{Cos.}^2\,\frac{a}{2x}-4x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{2x}\,\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0,$$

ou encore

$$\left(a\,\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}-2x\,\text{Sin.}\,\frac{a}{2x}\right)\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0.$$

En égalant le premier facteur à zéro, il vient

$$\text{Tang.}\,\frac{a}{2x}=\frac{a}{2x}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{a}{2x}=0 \qquad \text{et} \qquad x=\infty.$$

Cette valeur répond évidemment au cas où l'arc $a$ est une ligne droite. Il se confond alors avec sa corde, et le segment est nul et conséquemment *minimum*. On trouve, en effet, pour $x$ infini,

Angle du secteur $=0$,

Aire du secteur $=\infty$,

Corde de l'arc. . $=a$,

Segment. . . . $=0$,

comme cela doit être. On trouve ensuite $\frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{a}{2x}$, qui est le caractère du *minimum*.

Si, au contraire, on égale le dernier facteur à zéro, il viendra

$$\text{Cos.}\,\frac{a}{2x}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{2x}=\frac{(2n+1)\varpi}{2},$$

$n$ étant un nombre entier positif quelconque, ce qui donne

$$x=\frac{a}{(2n+1)\varpi}.$$

Il en résulte

$$\text{Sin.}\,\frac{a}{x}=0, \qquad \text{Cos.}\,\frac{a}{x}=-1,$$

et on trouve, en conséquence,

$$\text{Angle du secteur }=(2n+1)\varpi,$$

$$\text{Aire du secteur }=\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi},$$

$$\text{Corde de l'arc . }=\frac{2a}{(2n+1)\varpi},$$

$$\text{Flèche de l'arc. }=\frac{a}{(2n+1)\varpi},$$

$$\text{Segment. . . . . }=\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi};$$

on trouve de plus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(2n+1)\varpi,$$

ce qui montre que l'aire du segment est ici un *maximum* ; mais, à cause de l'indétermination de $n$, on voit qu'il y a ici une infinité de *maxima*, lesquels consistent tous en un certain nombre de cercles plus un demi-cercle. La valeur

$$y=\frac{a^2}{2(2n+1)\varpi}$$

prouve en outre que le *maximum maximorum* aura lieu, lorsqu'on aura $n=0$, et alors le segment sera évidemment un simple demi-cercle.

*PROBLÈME II. Entre toutes les calottes sphériques de même surface et de différens rayons, quelle est celle qui comprend le plus grand segment sphérique entre elle et le plan du cercle qui lui sert de base ?*

*Solution.* Pour fixer les idées, supposons qu'il soit question d'une calotte moindre que l'hémisphère. Soient $a^2$ la surface constante de la calotte dont il s'agit, $x$ la longueur variable du rayon de la sphère à laquelle elle appartient, et enfin $y$ le volume du segment sphérique qui lui répond ; nous trouverons successivement

Flèche de la calotte . $\dfrac{a^2}{2\varpi x}$ ,

Volume du secteur. . . $\dfrac{1}{3}a^2x$ ,

Hauteur du cône. . . $\dfrac{2\varpi x^2-a^2}{2\varpi x}$ ,

Rayon de sa base . . $\dfrac{a\sqrt{4\varpi x^2-a^2}}{2\varpi x}$ , Aire de cette base. . . $\dfrac{a^2(4\varpi x^2-a^2)}{4\varpi x^2}$,

Volume du cône. . . $\dfrac{a^2(4\varpi x^2-a^2)(2\varpi x^2-a^2)}{24\varpi^2 x^3}$,

$y=$ secteur — cône. . $a^4 . \dfrac{6\varpi x^2-a^2}{24\varpi^2 x^3}$.

En différentiant deux fois la valeur de $y$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a^4}{8\varpi^2}\cdot\frac{a^2-2\varpi x^2}{x^4}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{a^4}{2\varpi^2}\cdot\frac{\varpi x^2-a^2}{x^5}.$$

En égalant donc à zéro la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, on obtiendra pour la condition commune au *maximum* et au *minimum*

$$a^2-2\varpi x^2=0, \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{a^2}{2\varpi x};$$

il faut donc que le rayon soit égal à la flèche du segment, ou, en d'autres termes, que ce segment soit une hémisphère.

On tire de là

$$\varpi x^2-a^2=-\varpi x^2,$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{a^4}{2\varpi x^3};$$

et comme $x$ est positif, il s'ensuit que cette valeur est *négative* et qu'ainsi l'hémisphère est le segment *maximum*.

Si l'on supposait le secteur plus grand que l'hémisphère, on aurait

$$\text{Hauteur du cône}\ldots = \frac{a^2-2\varpi x^2}{2\varpi x},$$

$$\text{Son volume}\ldots\ldots = \frac{a^2(4\varpi x^2-2^2)(a^2-2\varpi x^2)}{24\varpi^2 x^3};$$

$$y = \text{secteur} + \text{cône} = a^4.\frac{6\varpi x^2-a^2}{24\varpi^2 x^3};$$

valeur pareille à la précédente, et qui conduirait aux mêmes conséquences.